Алгебра
һәм анализ башлангычлары

10—11

Алгебра һәм анализ башлангычлары 10-11

Алгебра
һәм анализ башлангычлары

Татар урта гомуми
белем бирү мәктәбенең
10–11 нче сыйныфлары
өчен дәреслек

А. Н. Колмогоров редакциясендә

Россия Федерациясе Мәгариф һәм фән министрлыгы тарафыннан тәкъдим ителгән

Казан • «Мәгариф» нәшрияты
Москва • «Просвещение»
2007

УДК 373.167.1:51*10/11
ББК 22.14 я721
А47

Авторлары: **А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлев, С. И. Шварцбурд**

Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10—11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; Под ред. А. Н. Колмогорова.— 15-е изд.— М.: Просвещение, 2006.

Охраняется Законом РФ «Об авторском праве и смежных правах». Воспроизведение всей книги или ее части на любых видах носителей запрещается без письменного разрешения издательства.

Переводное издание учебника выпущено в свет по Лицензионному договору 3/67 от 14.06.07 г. Экземпляры переводного издания подлежат распространению исключительно в Республике Татарстан, а также среди татарской диаспоры на территориях других субъектов Российской Федерации.

А47 **Алгебра һәм анализ башлангычлары**: Татар урта гомуми белем бирү мәкт. 10—11 нче с-флары өчен д-лек/А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницин һ. б.; Русчадан З. Х. Билалова, В. З. Закиров, Л. Ш. Галиева, Ф. М. Хафизова, Л. Х. Мөхәммәтҗанова тәрҗ.— Казан: Мәгариф, 2007.— 383 б.: рәс б-н.
ISBN 978-5-7761-1704-6

ISBN 978-5-7761-1704-6

© Издательство «Просвещение», 1990
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2000
Все права защищены
© Татарчага тәрҗемә, «Мәгариф» нәшрияты, 2001, үзгәрешләр белән

Сүз башы

Сез яңа фән өйрәнә башлыйсыз. Китап исемендәге «алгебра» сүзе сезгә инде таныш.

Курсның, асылда, яңа булган өлеше анализ башлангычларын өйрәнүгә багышлана. Математик анализ (яки анализ) — математиканың бер тармагы. Ул фән буларак XVIII йөздә формалашкан һәм ике төп өлкәне — дифференциаль һәм интеграль исәпләү өлкәләрен — үз эченә ала. Анализ табигать фәннәренең үсешендә гаять зур роль уйный. Төрле практик мәсьәләләр чишкәндә килеп чыккан функцияләрне тикшерүнең көчле, шактый универсаль методы барлыкка килә. Анализның башлангыч төшенчәләре һәм методлары (чыгарылма, дифференциаллау, башлангыч функция, интеграл, функциянең максимум һәм минимумнарын эзләү методы) белән танышу — курсның иң мөһим максатларыннан берсе.

Дәреслектән ничек файдаланырга кирәклеге турында берничә күрсәтмә биреп китәбез. Китап ахырында урнаштырылган эчтәлек һәм атамалар күрсәткече сезгә кирәкле бүлекне, билгеләмә яки теореманы тиз табарга ярдәм итәр. Күнегүләргә җаваплар һәм күрсәтмәләр тиңдәшле бүлекләрдә бирелде. Тәкъдим ителгән мәсьәләләрне чишүнең төп идеясе белән танышу өчен, ■ һәм ■ тамгалары белән аерып күрсәтелгән бик күп мисалларны чишү үрнәкләре китерелде. Тагын шуны да искәртәбез: уртача белем алу өчен, сез чишә белергә тиешле бу мәсьәләләр мәҗбүри исәпләнгән әзерлек дәрәҗәсен күрсәтәләр. Калган мәсьәләләр бераз катлаулырак.

Контроль эшкә әзерләнүне җиңеләйтү максатында, һәр бүлек ахырында төп материалны кабатлау өчен сораулар һәм мәсьәләләр китерелде. Бу сорауларга җавапларны һәм андый мәсьәләләрне чишү үрнәкләрен тиңдәшле пунктларның текстында табарга була.

«Тарихтан мәгълүматлар» дигән материалны укып, математик анализны иҗат иткән кешеләр һәм өйрәнелә торган төшенчәләрнең, термин һәм символларның ничек килеп чыгуы турында белә аласыз.

Дәреслекнең кайбер пунктларында теоретик характердагы өстәмә материал бар, ул ▶ һәм ◀ тамгалары белән аерып күрсәтелде.

Мәктәпне тәмамлаганда сезгә чыгарылыш имтиханнары бирергә туры киләчәк. Билгеле булганча, урта мәктәп курсының теоретик материалы кыскача «Математика. Белешмә материаллар» китабында бирелгән. Курсны кабатлау өчен, практик күнегүләр «Кабатлау өчен сораулар һәм мәсьәләләр» дигән бүлектә урнаштырылды. Ахырда йомгаклау бүлеге катлаулырак мәсьәләләрдән тора.

Уку ярдәмлегендә кулланылган тамгалаулар

N	— барлык натураль саннар күплеге
Z	— барлык бөтен саннар күплеге
Z_0	— барлык тискәре булмаган бөтен саннар күплеге
Q	— барлык рациональ саннар күплеге
R	— барлык реаль саннар күплеге, санлы туры
$[a; b]$	— очлары a һәм b булган йомык аралык (кисемтә), монда $a < b$
$(a; b)$	— очлары a һәм b булган ачык аралык (интервал), монда $a < b$
$(a; b]$, $[a; b)$	— очлары a һәм b булган ярымачык аралыклар, монда $a < b$
$(a; \infty)$, $[a; \infty)$, $(-\infty; b)$, $(-\infty; b]$	— чиксез аралыклар
$(-\infty; \infty)$	— чиксез аралык, санлы туры
$\vec{a}$	— векторның тамгаланышы
$(a-\delta; a+\delta)$	— a ноктасының δ-тирәлеге
$[x]$	— x санының бөтен кисәге
$\{x\}$	— x санының вакланма кисәге
$\|x\|$	— x санының модуле (абсолют зурлыгы)
$f(x)$	— f функциясенең x ноктасындагы кыйммәте
$D(f)$	— f функциясенең билгеләнү өлкәсе
$E(f)$	— f функциясенең кыйммәтләре өлкәсе
Δx	— x аргументының үсемтәсе
$\Delta f(x_0)$, Δf	— f функциясенең x_0 ноктасындагы үсемтәсе
$f'(x_0)$	— f функциясенең x_0 ноктасындагы чыгарылмасы
sin	— синус функциясе
cos	— косинус функциясе
tg	— тангенс функциясе
ctg	— котангенс функциясе
e	— e саны, $(e^x)' = e^x$ булган күрсәткечле функциянең нигезе
$\log_a$	— нигезе a булган логарифм
lg	— унарлы логарифм
ln	— натураль логарифм (нигезе e булган логарифм)
$\max\limits_{[a;b]} f$	— f функциясенең $[a; b]$ кисемтәсендәге иң зур кыйммәте
$\min\limits_{[a;b]} f$	— f функциясенең $[a; b]$ кисемтәсендәге иң кечкенә кыйммәте
$\int_a^b f(x)dx$	— f функциясенең a дан b га кадәр чикләрдәге интегралы
arcsin a	— a санының арксинусы
arccos a	— a санының арккосинусы
arctg a	— a санының арктангенсы
arcctg a	— a санының арккотангенсы

I бүлек

Тригонометрик функцияләр

§ 1. Санча аргументның тригонометрик функцияләре

1. Синус, косинус, тангенс һәм котангенс (кабатлау)

1. Радианлы үлчәм. Сез почмакларны радианнарда үлчәү белән таныш инде. 1 *радианлы* почмак — дугасының озынлыгы әйләнә радиусына тигез булган үзәк почмак ул (1 нче рәсем). Радианлы һәм градуслы үлчәм $180° = \pi$ радиан тигезлеге белән бәйләнгән; $n°$ лы почмак $\frac{\pi n}{180}$ радианга тигез.

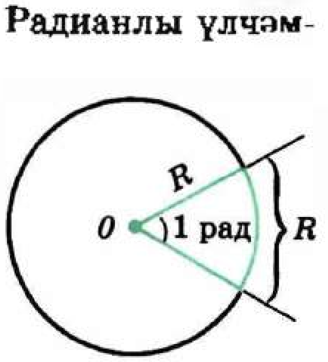
Почмакларны радианнар белән үлчәгәндә, кайбер формулаларның күренеше гадиләшә төшә. Мәсәлән r радиуслы әйләнәдә α радианлы дуганың озынлыгы

$$l = \alpha r; \qquad (1)$$

формуласы буенча табыла; r радиуслы түгәрәкнең α радианлы дуганы эченә алган сектор мәйданы S ны табу формуласы түбәндәгечә булыр:

$$S = \frac{\alpha r^2}{2}. \qquad (2)$$

(1) һәм (2) формулалар дугалары ($n°$ зурлыгындагы) градуслы үлчәмдә бирелгән әйләнә дугасы озынлыгын һәм сектор мәйданын исәпләп чыгару өчен кулланыла торган $l = \frac{\pi r n}{180}$ һәм $S = \frac{\pi r^2 n}{360}$ рәвешендәге аналогик формулалардан гадирәк. Радианлы үлчәмнең байтак өстенлекләре булу (17 нче пунктны да карагыз) тригонометриядә почмакларның градуслы үлчәмен түгел, бәлки күбрәк радианлы үлчәмен куллануга китерде.



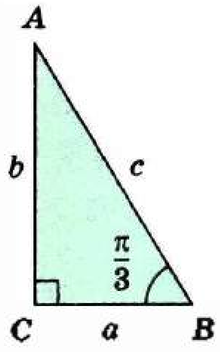
1 нче рәсем

Алгебра курсыннан сез α радианлы (монда α — теләсә нинди реаль сан) почмакка боруның ничек билгеләнүен беләсез. Шулай ук сезгә α ның (α — почмак яки сан) синусы, косинусы, тангенсы һәм котангенсы билгеләмәләре дә таныш.

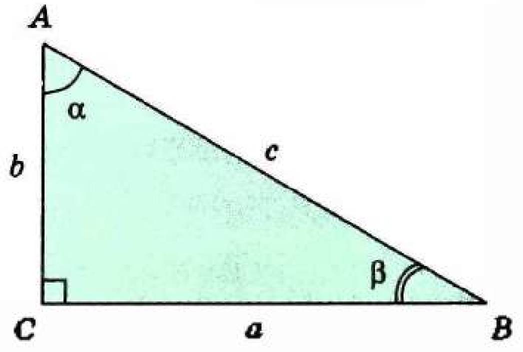
1 нче мисал. $\frac{\pi}{3}$ почмагының синусы, косинусы, тангенсы, котангенсы кыйммәтләрен табыйк.

Бер почмагы 30° булган турыпочмаклы өчпочмакта бу почмакка каршы ятучы катет c гипотенузасының яртысына тигез (2 нче рәсем). $c = 1$ булудан чыгып табабыз:

$$a = \frac{c}{2} = \frac{1}{2};\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



2 нче рәсем



3 нче рәсем

Шуңа күрә $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Гомумән, кысынкы α почмагының төп тригонометрик функцияләре кыйммәтләрен геометрия курсында тапкан шикелле үк табарга мөмкин (3 нче рәсем):

$$\cos\alpha = \frac{b}{c},\ \sin\alpha = \frac{a}{c},\ \operatorname{tg}\ \alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a}.$$

Теләсә нинди почмакның синусы, косинусы, тангенсы һәм котангенсының якынча кыйммәтләре калькулятор яки таблица ярдәмендә табыла. (Монда һәм алга таба да В. М. Брадисның «Дүртурынлы математик таблицалар»ы күз алдында тотыла.)

Теләсә нинди почмакның синусы, косинусы, тангенсы, котангенсының кыйммәтләрен табу мәсьәләсе, сезгә таныш формулаларны кулланып, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ өчен $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ ның кыйммәтләрен табуга кайтарып калдырыла. Мәсәлән, түбәндәге таблицаны тутырырга мөмкин (7 нче битне карагыз).

2. Тригонометриянең төп формулалары. Синус, косинус, тангенс, котангенсның билгеләмәләреннән үк *төп тригонометрик бердәйлекләр* килеп чыга:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha};\ \operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

α	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

Кушу формулалары **калган формулаларны чыгару өчен нигез булып торалар:**

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};\quad \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

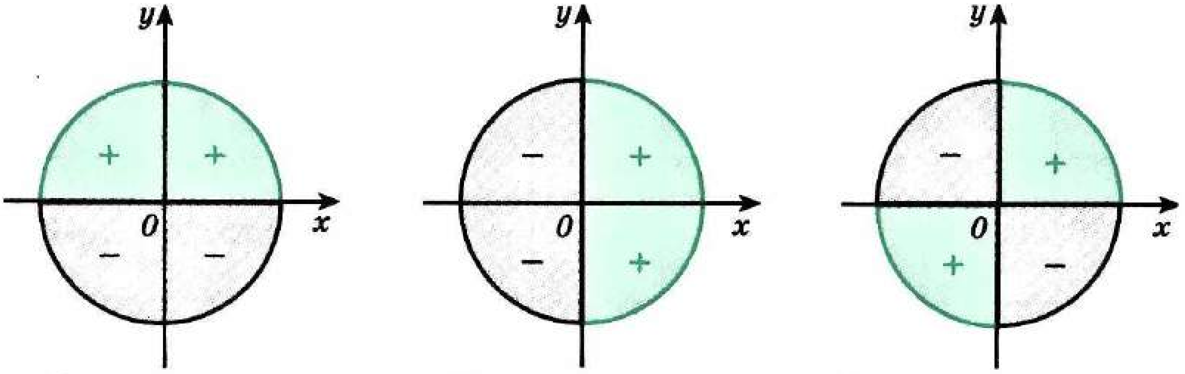
$\sin\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right)$, $\cos\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right)$, $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right)$, $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right)$, $n \in \mathbf{Z}$,

күренештәге аңлатмаларның рәвешен үзгәртү өчен, $\beta = \frac{\pi n}{2}$ монда $n \in \mathbf{Z}$ дип алып, кушу формулаларыннан ***китерү формулаларын*** табабыз.

Бу формулаларны истә калдыру өчен, түбәндәге ***мнемоник кагыйдәдән*** файдалану уңайлы:

> **а)** $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ **булса, китерелгән функция алдына башта бирелгән функция алдындагы тамга куела (4 нче рәсем).**
> **б)** n **так булса, функция «кофункциягә» үзгәрә;** n **җөп булса, функция үзгәрми. (Косинус, синус, котангенс, тангенс тиңдәшле рәвештә синус, косинус, тангенс һәм котангенсның «кофункцияләре» дип атала.)**

Мәсәлән:



Синус тамгалары *Косинус тамгалары* *Тангенс һәм котангенс тамгалары*

4 нче рәсем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha; \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha \quad \text{h.б.}$$

Сезгә шулай ук ***синусларның (косинусларның) суммасы һәм аермасы формулалары*** да таныш:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$\alpha = \beta$ дип алып, кушу формулаларыннан *икеләтелгән аргумент формулалары* чыгарыла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha; \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ һәм $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ формулаларына $t = \frac{\alpha}{2}$ кыйммәтен куеп, *ярты аргумент формулаларын* табабыз:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \tag{3}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}. \tag{4}$$

2 нче мисал. Таблицалардан файдаланмыйча, (3) формуланы кулланып, $\sin\frac{\pi}{12}$ кыйммәтен табыйк:

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

$0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{12} > 0$ булганга табабыз: $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Җавапны гадиләштерергә мөмкин:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

(3) тигезлекне (4) гә буынга-буын бүлсәк,

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{5}$$

формуласы килеп чыгар.

$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ тигезлегенең уң кисәгендә санаучысын да, ваклаучысын да $2\cos\frac{\alpha}{2}$ гә тапкырлап табабыз:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \text{ ягъни}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{6}$$

Аналогик рәвештә $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ тигезлегенең уң кисәгендә санаучысын да, ваклаучысын да $2\sin\frac{\alpha}{2}$ гә тапкырлап,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (7)$$

формуласын чыгарабыз.

3 нче мисал. Таблица кулланмыйча $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}$ кыйммәтен табыйк:

$$\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{1+\cos\frac{5\pi}{4}} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = (\sqrt{2}+1)^2.$$

$\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{8} < \pi$ икәнен искә алабыз. Шуңа күрә $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8} < 0$ һәм, димәк, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8} = -(\sqrt{2}+1)$.

4 нче мисал. $\cos\alpha = 0,8$ һәм $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ булганда, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ һәм $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ не табыйк.

$\frac{\alpha}{2}$ почмагы беренче чиреккнеке, димәк, $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$. Шуңа күрә

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0,8}{2}} = \sqrt{0,1} \approx 0,3162;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+0,8}{2}} = \sqrt{0,9} \approx 0,9487;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0,8}{1+0,8}} = \frac{1}{3} \approx 0,3333.$$

Күнегүләр

Күнегүләр һәр пунктта ике өлешкә бүлеп бирелгән. Беренче өлештә бирелгән мәсьәләләр шушы тема буенча мәҗбүри исәпләнгән хәзерлек дәрәҗәсен билгелиләр: уртача билгесе алу өчен, шундый мәсьәләләрне чишә белергә кирәк. Күп очракта бу мәсьәләләрне чишү ысуллары белән тиңдәшле пункт текстында тикшерелгән мисалларны карап танышырга мөмкин.

1. Почмакларның зурлыкларын радианлы үлчәмдә күрсәтегез:

а) 45°, 36°, 180°; б) 120°, 310°, 360°;
в) 60°, 72°, 270°; г) 150°, 216°, 90°.

2.— Почмакларның зурлыкларын градуслы үлчәмдә күрсәтегез:

а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{36}$; б) $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{9}$;

в) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{5}$, π; г) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{12}$.

3.— Аңлатманың санча кыйммәтен табыгыз:

а) $\sin 0 + \cos\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{4}$; б) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\pi + \mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}$;

в) $6\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos 0 + \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}$; г) $3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6}$.

4.— Түбәндәге тигезлекләр үтәлерлек α, β, γ саннары бармы?

а) $\sin\alpha = -0,5$, $\cos\beta = \sqrt{3}$, $\mathrm{tg}\ \gamma = -2,5$;

б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cos\beta = -2,2$, $\mathrm{tg}\ \gamma = 0,31$;

в) $\sin\alpha = 1,3$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{4}$, $\mathrm{tg}\ \gamma = 5,2$;

г) $\sin\alpha = -\frac{7}{9}$, $\cos\beta = \sqrt{2,5}$, $\mathrm{tg}\ \gamma = -7,5$.

5.— Бер үк санның синусы белән косинусы тиңдәшле рәвештә тигез булулары мөмкинме?

а) $-\frac{7}{25}$ һәм $\frac{24}{25}$; б) 0,4 һәм 0,7;

в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ һәм $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ һәм $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

6.— Бер үк санның тангенсы белән котангенсы тиңдәшле рәвештә тигез булулары мөмкинме?

а) $-\frac{3}{5}$ һәм $-\frac{5}{3}$; б) $(\sqrt{3} - 2)$ һәм $(\sqrt{3} + 2)$;

в) 2,4 һәм $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ һәм $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

7.— а) $\sin\alpha = -0,8$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; г) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

булганда, калган өч төп тригонометрик функциянең кыйммәтләрен табыгыз.

8.— Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$; б) $\frac{1 - 2\cos^2\beta}{\cos\beta + \sin\beta}$;

в) $(\sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha)\ \mathrm{ctg}\ \alpha$; г) $\frac{\sin^2 t - 1}{\cos^2 t} + \mathrm{tg}^2 t$.

9. Исәпләп чыгарыгыз:

а) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}-\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}}{\cos 0{,}3\pi\sin 0{,}2\pi+\sin 0{,}3\pi\cos 0{,}2\pi}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}$; г) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{18}}{\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}}$.

10. а) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$;

б) $\cos\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=-\frac{8}{17}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$

булганда, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\sin(\alpha-\beta)$ һәм $\cos(\alpha+\beta)$ ны исәпләп чыгарыгыз.

11. Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}$; б) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\sin\alpha}$; г) $\operatorname{ctg}^2\alpha\ (1-\cos 2\alpha)+\cos^2\alpha$.

12. Тиңдәшле тригонометрик функциянең аргументы $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ аралыгында булырлык итеп, бирелгән аңлатманың рәвешен үзгәртегез:

а) $\sin\frac{7\pi}{8}$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$, $\operatorname{tg}0{,}6\pi$, $\operatorname{ctg}(-1{,}2\pi)$;

б) $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$, $\cos 1{,}8\pi$, $\operatorname{ctg}0{,}9\pi$.

13. Аңлатманың санча кыйммәтен табыгыз:

а) $8\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$;

б) $10\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{4}$;

в) $\dfrac{\sin^2(\pi-t)}{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)}-\cos(2\pi-t)$.

14. Тигезлек дөресме?

а) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\frac{11\pi}{24}-\cos\frac{\pi}{8}=-\sin\frac{7\pi}{24}$;

в) $\sin\frac{11\pi}{18}+\sin\frac{7\pi}{18}=\cos\frac{2\pi}{9}$;

г) $\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$.

15.— а) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

в) $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; г) $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

булса, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$ не табыгыз.

16.— а) $\alpha = 0{,}19$; б) $\alpha = 1{,}37$; в) $\alpha = 0{,}9$; г) $\alpha = 1{,}2$ булганда, калькулятор яки таблица ярдәмендә $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}\,\alpha$ ның кыйммәтләрен табыгыз.

17.— Калькулятор яки таблица ярдәмендә
а) $17°$; $43°24'$; $83°36'$; $72°12'$ почмакларының радианлы үлчәмен;
б) 0,384; 0,48; 1,11; 1,48 почмакларының градуслы үлчәмен табыгыз.

18.— Дуганың радианлы үлчәме α га, әйләнәсенең радиусы R га тигез булган дуганың озынлыгын исәпләп чыгарыгыз:

а) $\alpha = 2$, $R = 1$ см; б) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ см;

в) $\alpha = 0{,}1$, $R = 1$ м; г) $\alpha = \frac{9\pi}{10}$, $R = 10$ м.

19.— Түгәрәкнең радиусы R һәм секторның үзәк почмагының радианлы үлчәме α билгеле булганда, секторның мәйданын исәпләп чыгарыгыз:

а) $\alpha = 0{,}1$, $R = 1$ м; б) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$, $R = 3$ м.

20.— а) Тиңдәшле дугасының озынлыгы түгәрәк диаметрына тигез булган секторның үзәк почмагының радианлы үлчәмен табыгыз.
б) Сектор дугасының озынлыгы аның периметрыннан өч тапкыр кыскарак. Аның үзәк почмагының радианлы үлчәмен табыгыз.

Аңлатмаларның кыйммәтләрен табыгыз (21—22).

21.— а) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ булганда, $3\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos(3\alpha - \pi)$;

б) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ булганда, $\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + 3\text{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}\right)$;

в) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ булганда, $4\cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \text{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$;

г) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ булганда, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \text{tg}^2\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

22.— а) $\frac{1 + \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{ctg}\,\alpha}$ булганда, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

б) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ булганда, $\text{tg}\,\alpha = \frac{5}{4}$;

в) $\frac{\cos\alpha + \text{ctg}\,\alpha}{\text{ctg}\,\alpha}$ булганда, $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

г) $\sin^2\alpha - \cos^2\beta$ булганда, $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = 0{,}5$.

23. — $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ булганда, тигезлекнең дөрес икәнен исбатлагыз:

а) $\sin\alpha\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha\sqrt{1+\mathrm{tg}^{-2}\alpha}}$;

б) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

в) $\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$;

г) $\sqrt{\sin^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha}}$.

Бердәйлекне исбатлагыз (24—26).

24. — а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; б) $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)} + \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)} = 2$.

25. — а) $(\sin^2 t + 2\sin t\cos t - \cos^2 t)^2 = 1 - \sin 4t$;

б) $\frac{\cos\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin\alpha} = \mathrm{tg}\,3\alpha$;

в) $\frac{1 - 4\sin^2 t - \cos^2 t}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \cos 2t$;

г) $\frac{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \mathrm{tg}\,2\alpha$.

26. — а) $\cos t = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}$; б) $\sin\beta = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}}$.

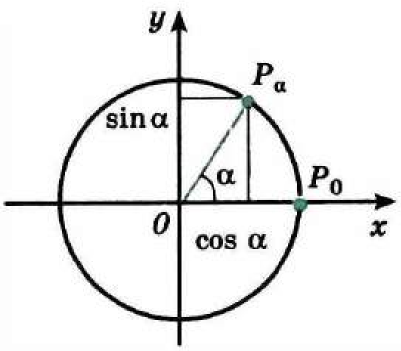
27. — Таблица һәм калькулятор кулланмыйча исәпләп чыгарыгыз:

а) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; б) $\left(\sin\frac{7\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{18}\right) : \cos\frac{2\pi}{9}$;

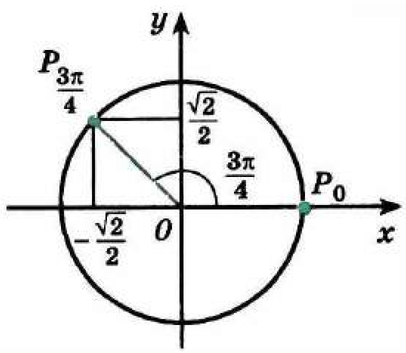
в) $\left(\sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2$; г) $\frac{\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}}$.

2. Тригонометрик функцияләр һәм аларның графиклары

1. Синус һәм косинус функцияләре. Үзәге координаталар башлангычында, ә радиусы 1 гә тигез булган әйләнәне *берәмлек әйләнә* дип атыйлар. Берәмлек әйләнәнең P_α ноктасы P_0 (1; 0) ноктасын α радиан почмакка борып табылсын, ди. Ул вакытта P_α ноктасының ординатасы — α почмагының синусы, ә бу ноктаның абсциссасы α почмагының косинусы икәнлеген аңлау кыен түгел (5 нче рәсем).



5 нче рәсем



6 нчы рәсем

1 нче мисал. $\frac{3\pi}{4}$ **радианлы почмакның синусын, косинусын, тангенсын һәм котангенсын табыйк.**

Тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмакның үзлекләреннән файдаланып, $P_{\frac{3\pi}{4}}$ ноктасының координаталарын (6 нчы рәсем) җиңел табып була: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Шуңа күрә $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$. ■

Алга таба без барлык почмаклар да радианнарда үлчәнгән дип исәпләрбез һәм шуңа күрә *рад* тамгасы, кагыйдә буларак, төшереп калдырылыр. Почмакларны үлчәү берәмлеген (1 радиан) билгеләнгән дип исәпләргә сүз куешып, мәсәлән, *x санының синусын x* радианлы почмакның синусы буларак, *x санының косинусын x* радианлы почмакның косинусы буларак табабыз h. б.

> Билгеләмә. **$y = \sin x$ һәм $y = \cos x$ формулалары белән бирелгән санлы функцияләрне тиңдәшле рәвештә *синус* һәм *косинус* дип атыйлар** (һәм sin һәм cos дип тамгалыйлар).

Бу функцияләрнең билгеләнү өлкәсе — барлык реаль саннар күплеге. Берәмлек әйләнә нокталарының ординаталары да, абсциссалары да барлык кыйммәтләрен −1 дән алып 1 гә кадәр алганга күрә, [−1; 1] кисемтәсе синус һәм косинус функцияләренең кыйммәтләре өлкәсе була. *f* функциясенең билгеләнү өлкәсен — $D(f)$ аша, кыйммәтләре өлкәсен $E(f)$ аша тамгалыйк. Ул вакытта болай язарга мөмкин:

$$D(\sin) = D(\cos) = R; \quad E(\sin) = E(\cos) = [-1;\ 1].$$

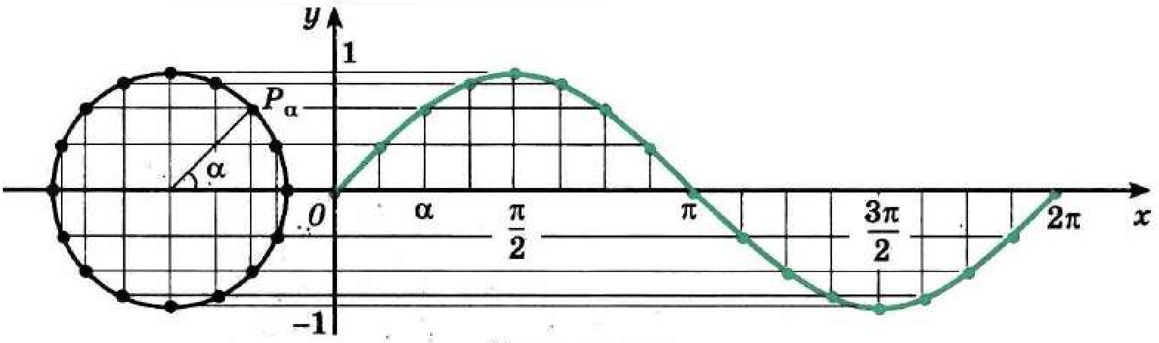
Синус һәм косинус функцияләренең сезгә таныш түбәндәге үзлекләрен исегезгә төшереп китәбез.

> Теләсә нинди x өчен:
> 1) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$;
> 2) $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi n) = \cos x$
> (n — теләсә нинди бөтен сан) тигезлекләре дөрес.

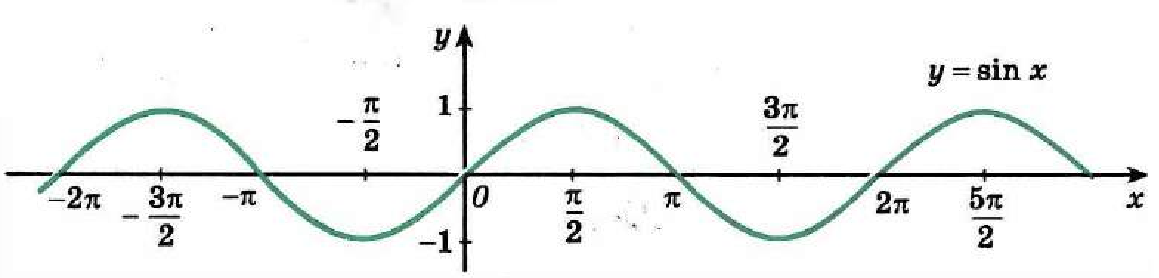
2. Синусоида. [0; 2π] кисемтәсендә синус функциясенең графигын төзик. Моның өчен ординаталар күчәрендә — (0; −1) һәм (0; 1) нокталарын, ә абсциссалар күчәрендә 2π абсциссалы ноктаны билгелибез (игътибар итегез: [0; 2π] кисемтәсенең озынлыгы якынча 6,28 гә тигез). [0; 2π] кисемтәсен һәм берәмлек әйләнәне 16 тигез өлешкә бүләбез (7 нче рәсем). Графикның α абсциссалы ноктасын төзү өчен, синусның билгеләмәсеннән файдаланабыз: берәмлек әйләнәдә P_α ноктасын билгеләп, P_α аша абсциссалар күчәренә параллель туры үткәрәбез (7 нче рәсем). Бу туры белән $x = \alpha$ турысының кисешү ноктасы эзләнелгән нокта булыр, чөнки аның ординатасы P_α ноктасының ординатасы белән тәңгәл килә, а sin α билгеләмә буенча P_α ның ординатасына тигез.

7 нче рәсемдә графикның 16 ноктасын төзү күрсәтелгән. Шул нокталарны салмак кәкре сызык белән тоташтырып, синус графигының [0; 2π] кисемтәсендәге эскизын табабыз. Синус графигын бу кисемтәдән тыш дәвам итү өчен, $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$ (n — теләсә нинди бөтен сан) булуын искәрәбез. Шуңа күрә $x_0 + 2\pi n$ (монда $0 \leq x_0 \leq 2\pi$) күренешендәге барлык нокталарда синусның кыйммәтләре тәңгәл киләләр һәм, димәк, синусның барлык турыдагы графигы аның төзелгән графигын Ox күчәре буйлап (уңга һәм сулга) 2π, 4π, 6π h.б. га параллель күчәре ярдәмендә табыла (8 нче рәсем). Синусның графигы *синусоида* дип атала. Безгә синусның кыйммәтләрен табарга ярдәм иткән ординаталар күчәрендәге [−1; 1] кисемтәсен кайвакыт *синуслар сызыгы* дип тә атыйлар.

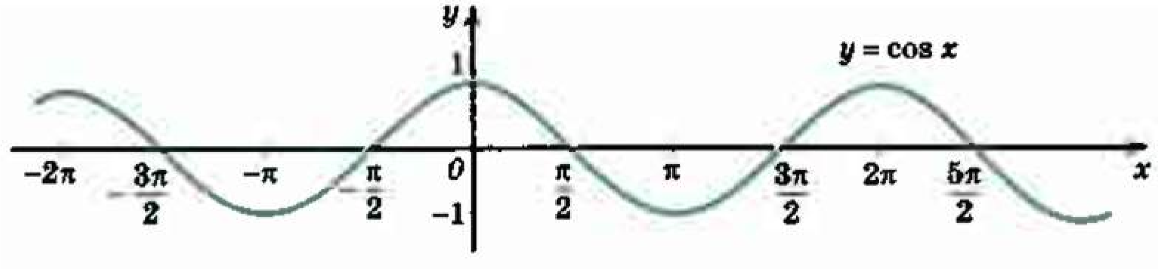
Косинусның графигын төзү өчен, $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ булуын искә төшерәбез. Шулай булгач, косинусның теләсә нинди x_0 ноктасындагы кыйммәте синусның $x_0 + \frac{\pi}{2}$ ноктасындагы кыйммәтенә тигез. Бу исә косинус графигы синус графигын Ox күчәре буйлап тискәре юнәлештә $\frac{\pi}{2}$ ераклыкка параллель күчереп табыла дигән



7 нче рәсем



8 нче рәсем



9 нчы рәсем

сүз. Шуңа күрә $y = \cos x$ функциясенең графигы да синусоида була (9 нчы рәсем).

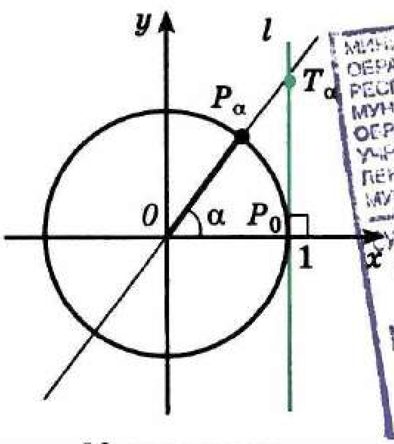
3. Тангенс, котангенс функцияләре һәм аларның графиклары.

> Билгеләмә. $y = \mathrm{tg}\, x$ һәм $y = \mathrm{ctg}\, x$ формулалары белән бирелгән санлы функцияләрне тиндәшле рәвештә *тангенс* һәм *котангенс* дип атыйлар (һәм tg һәм ctg дип тамгалыйлар).

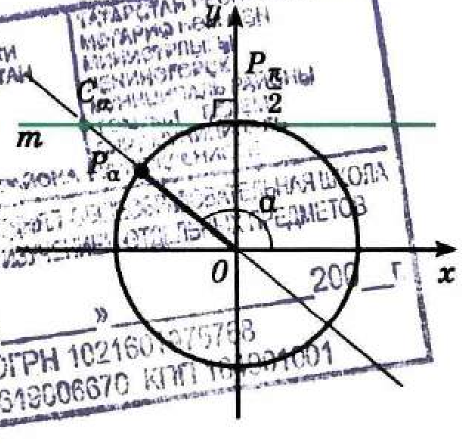
Тангенс функциясенең билгеләнү өлкәсе — косинусы нульгә тигез булмаган ($\cos x \neq 0$) барлык x саннары күплеге, ягъни $\frac{\pi}{2} + \pi n$ га тигез булмаган барлык x саннары күплеге (n барлык бөтен саннар күплеге Z ны «йөгереп үтә» дип исәпләнә. Котангенсның билгеләнү өлкәсе синусы нульгә тигез булмаган ($\sin x \neq 0$) барлык x саннары күплегеннән, ягъни πn га тигез булмаган (монда $n \in Z$) барлык саннардан тора.

Берәмлек әйләнәгә P_0 ноктасында l орынмасын үткәрәбез (10 нчы рәсем). α — косинусы нульгә тигез булмаган ($\cos \alpha \neq 0$) теләсә нинди сан булсын, ди. Ул вакытта P_α ($\cos \alpha$; $\sin \alpha$) ноктасы ординаталар күчәрендә ятмый һәм, димәк, OP_α турысы l ны 1 абсциссалы ниндидер T_α ноктасында кисеп үтә. Бу ноктаның ординатасын табыйк.

Моның өчен OP_α турысының $O(0; 0)$ һәм P_α ($\cos \alpha$; $\sin \alpha$) нокталары аша үтүен искәрәбез. Шуңа күрә әлеге турының тигезләмәсе $y = x\, \mathrm{tg}\, \alpha$ була. Бу туры өстендә яткан T_α ноктасының абсциссасы 1 гә тигез. OP_α турысы тигезләмәсеннән T_α ноктасының ординатасы $\mathrm{tg}\, \alpha$ га тигез икәнен табабыз. Димәк, OP_α һәм l турыларының

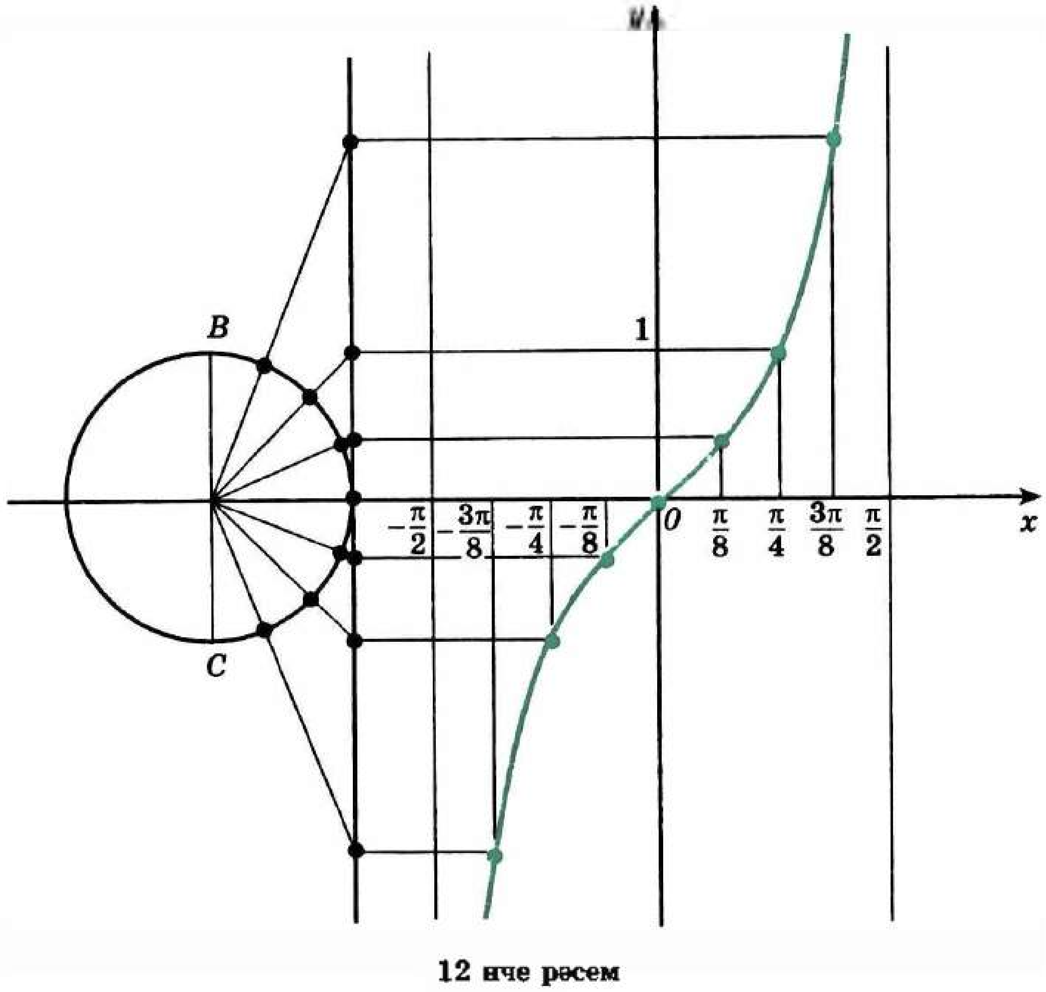


10 нчы рәсем



11 нче рәсем

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАТАРСТАН МУНИЦИПАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ... ОГРН 1021601... ИНН 1619006670 КПП ...



12 нче рәсем

кисешү ноктасының ординатасы α ның тангенсына тигез. Шуңа күрә l турысын *тангенслар сызыгы* дип атыйлар.

Шулай ук OP_α турысы белән $P_{\frac{\pi}{2}}$ ноктасы аша берәмлек әйләнәгә үткәрелгән m орынмасының кисешү ноктасы C_α ның абсциссасы (11 нче рәсем) $\mathrm{ctg}\,\alpha$ тигез икәнен исбатлап була ($\sin\alpha \neq 0$ дип алына). Шуңа күрә m турысын *котангенслар сызыгы* дип атыйлар.

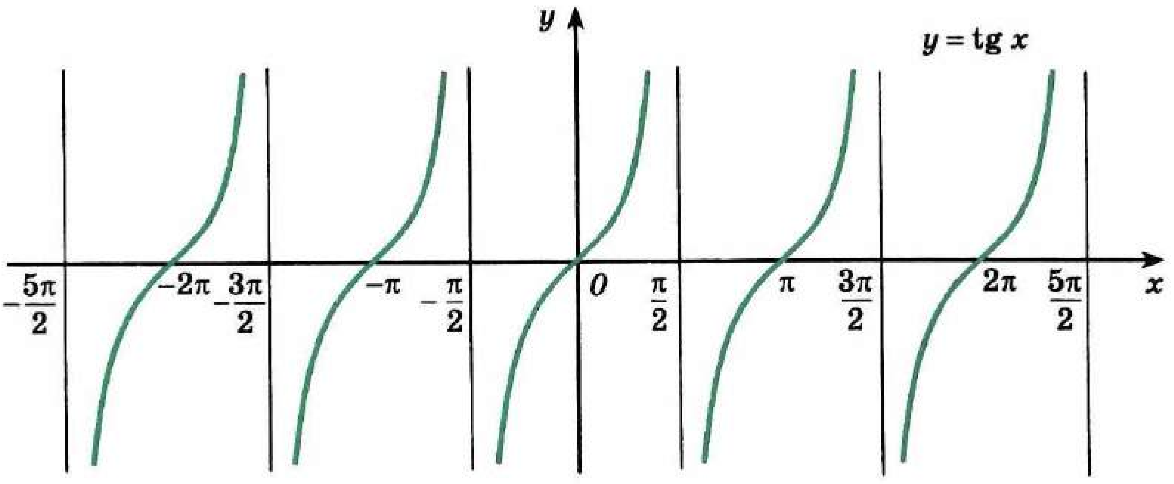
Тангенсның (котангенсның) кыйммәтләре өлкәсе — барлык саңлы туры. Моны tg функциясе өчен исбатлыйк. y_0 — теләсә нинди реаль сан булсын. $T(1;\ y_0)$ ноктасын карыйк. Хәзер генә күрсәтелгәнчә, TOx почмагының тангенсы y_0 гә тигез. Димәк, tg функциясе теләсә нинди реаль y_0 кыйммәтен кабул итә. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

tg һәм ctg функцияләренең сезгә таныш булган түбәндәге үзлекләрен исегезгә төшереп китәбез:

1) $\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\,x$; $\mathrm{ctg}\,(-x) = -\mathrm{ctg}\,x$;

2) $\mathrm{tg}\,(x + \pi n) = \mathrm{tg}\,x$; $\mathrm{ctg}\,(x + \pi n) = \mathrm{ctg}\,x$, $n \in Z$.

$\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында тангенсның графигын төзү (12 нче рәсем) синусның графигын төзүгә карата сөйләгәннәргә охшаш. (tg функциясенең ноктадагы кыйммәте тангенслар сызыгы ярдәмендә табыла.) $\mathrm{tg}\,(x + \pi n) = \mathrm{tg}\,x$ ($n \in Z$) бердәйлеге булу сәбәпле,



13 нче рәсем

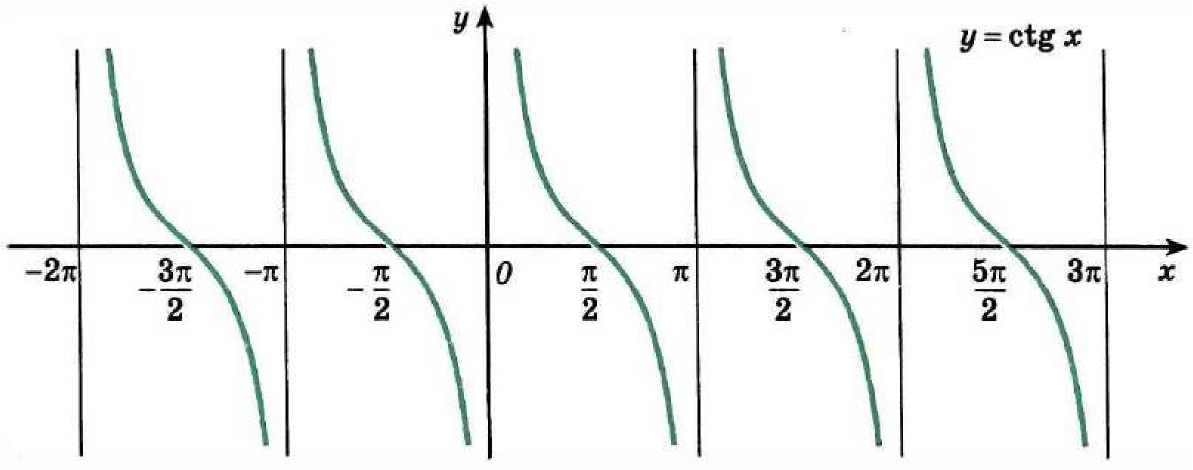
тангенс функциясенең барлык билгеләнү өлкәсендәге графигы (13 нче рәсем) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалындагы графиктан Ox күчәре буйлап (уңга һәм сулга), π, 2π һ. б. га күчерү юлы белән табыла (13 нче рәсем). tg функциясенең графигын *тангенсоида* дип атыйлар.

Котангенсның графигы 14 нче рәсемдә бирелгән.

Синус, косинус, тангенс һәм котангенсны еш кына *төп тригонометрик функцияләр* дип атыйлар. Кайвакыт тагын төп ике тригонометрик функция — *секанс* һәм *косеканс* кулланыла (тиңдәшле рәвештә sec һәм cosec дип тамгалана).

Төп тригонометрик функцияләрнең ни өчен 6 булуын аңлау өчен, кысынкы α почмагының тригонометрик функцияләрен кысынкы почмагы α булган турыпочмаклы өчпочмакның яклар чагыштырмасы буларак та билгеләргә мөмкин (3 нче рәсем). Андый чагыштырмалар 6:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a};$$
$$\sec\alpha = \frac{c}{b};\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.$$



14 нче рәсем

28.— а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; б) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \pi$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$;

в) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; г) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $\alpha = 2\pi$, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

булса, берәмлек әйләнәдә P_α ноктасын билгеләгез.

29.— α тигез

а) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $-\pi$; б) $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$;

в) $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 3π; г) $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{2}$

булса, берәмлек әйләнәдә P_α ноктасының координаталарын табыгыз.

30.— α тигез

а) $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{8\pi}{7}$, $-2,7$; б) $\frac{5\pi}{3}$, $1,8\pi$, $-3,2$;

в) $\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{2\pi}{5}$, $1,9$; г) $\frac{5\pi}{9}$, $-2,3\pi$, $3,7$

булса, P_α ноктасы координаталар яссылыгының кайсы чирегендә урнашкан?

31.— Санның тамгасын табыгыз:

а) $\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{9\pi}{8}\operatorname{tg}2,3\pi$; б) $\sin 1\cos 3\operatorname{ctg}5$;

в) $\sin 1,3\pi\cos\frac{7\pi}{9}\operatorname{tg}2,9$; г) $\sin 8\cos 0,7\operatorname{tg}6,4$.

32.— α тигез

а) 4π, $-\pi$; б) $\frac{5\pi}{2}$, $-5,5\pi$;

в) π, -2π; г) $\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$

булса, α ның синусы һәм косинусы кыйммәтләрен табыгыз.

33.— Функциянең графигын төзегез:

а) $y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$; б) $y = -\sin(x + \pi)$;

в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; г) $y = \operatorname{tg}(x + \pi)$.

34.— Берәмлек әйләнәдә координаталары түбәндәге шартны канәгатьләндерүче $P_\alpha(x; y)$ ноктасын билгеләгез:

а) $y = 0,5$; $x > 0$; б) $x = -\frac{1}{2}$, $y > 0$;

в) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y > 0$; г) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x < 0$.

35.— а) $\sin\alpha = -0,5$; б) $\cos\alpha = 0,3$;
в) $\cos\alpha = -0,4$; г) $\operatorname{tg}\alpha = 2$

булганда, миллиметрлы кәгазьдә берәмлек әйләнә, ә аннары α үзәк почмагын төзегез.

Бирелгән функциянең билгеләнү өлкәсен һәм кыйммәтләре өлкәсен табыгыз. Аның графигын төзегез (36—37).

36.— а) $y = 2 + \sin x$; б) $y = 1 + \operatorname{tg} x$;
в) $y = \cos x - 1$; г) $y = 3 + \sin x$.

37.— а) $y = 2 \sin x$; б) $y = -\frac{1}{2}\cos x$;
в) $y = 0{,}5 \operatorname{tg} x$; г) $y = -1{,}5 \sin x$.

Функция графигының координата күчәрләре белән кисешү нокталарының координаталарын табыгыз (38—39).

38.— а) $y = \sin x$; б) $y = 1 + \cos x$;
в) $y = \cos x$; г) $y = \sin x - 1$.

39.— а) $y = x^2 - 3x$; б) $y = \sin x - 1{,}5$;
в) $y = 2{,}5 + \cos x$; г) $y = \frac{1}{x} + 1$.

§ 2.

Функцияләрнең төп үзлекләре

3. Функцияләр һәм аларның графиклары

1. Санлы функция. Функция төшенчәсе белән сез алгебра курсында таныштыгыз. Анализ башлангычларын өйрәнгәндә, функциянең түбәндәге билгеләмәсен кабул итү уңайрак.

> Билгеләмә. **D күплегендәге һәр x санына билгеле бер кагыйдә буенча x ка бәйле y санын тиңдәш итүче тиңдәшлек билгеләнү өлкәсе D булган *санлы функция* дип атала.**

Функцияләрне, гадәттә, латин (ә кайвакыт грек) хәрефләре белән тамгалыйлар. Ирекле рәвештә алынган f функциясен карыйк. Бәйсез үзгәрешле x ны *функциянең аргументы* дип атыйлар. x санына тиңдәшле y санын *f функциясенең x ноктасындагы кыйммәте* дип атыйлар һәм $f(x)$ дип тамгалыйлар. f функциясенең билгеләнү өлкәсен $D(f)$ дип тамгалыйлар, x саны f функциясенең билгеләнү өлкәсенә кергәндәге барлык $f(x)$ саннарыннан торган күплекне *f функциясенең кыйммәтләре өлкәсе* дип атыйлар һәм $E(f)$ дип тамгалыйлар.

Еш кына функция нинди дә булса формула ярдәмендә бирелә. Бу вакытта, әгәр нинди дә булса өстәмә чикләүләр бирелмәсә, үзгәрешленең формуланы мәгънәле иткән барлык кыйммәтләре күплеге шул формула белән бирелгән функциянең билгеләнү өлкәсе дип исәпләнә. Мәсәлән, $f(x) = \frac{1}{x}$ формуласының барлык $x \neq 0$ өчен мәгънәсе бар, шуңа күрә нульгә тигез булмаган барлык реаль саннар күплеге $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясенең билгеләнү өлкәсе

дип исәпләнә. Аның кыйммәтләре өлкәсе билгеләнү өлкәсе белән тәңгәл килә, һәм ул $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$ интервалларының берләшмәсеннән гыйбарәт.

Гомумән, A һәм B күплегенең берсенә генә булса да кергән барлык элементлардан торган күплек *A һәм B күплекләренең берләшмәсе* дип атала. A һәм B күплекләренең берләшмәсе $A \cup B$ рәвешендә тамгалана. Мәсәлән, $[0; 2]$ һәм $[1; 3]$ кисемтәләренең берләшмәсе $[0; 3]$ кисемтәсе була.

$\cup$ символы санлы аралыкларның берләшмәсе рәвешендә күрсәтергә мөмкин булган саннар күплекләрен тамгалау өчен уңай. Мәсәлән, $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясе өчен

$$D(f) = E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty).$$

$y = \operatorname{tg} x$ функциясенең билгеләнү өлкәсе $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, монда $n \in Z$ рәвешендәге барлык интервалларның берләшмәсеннән тора, ә аның кыйммәтләре өлкәсе — барлык санлы туры: $E(\operatorname{tg}) = (-\infty; \infty)$.

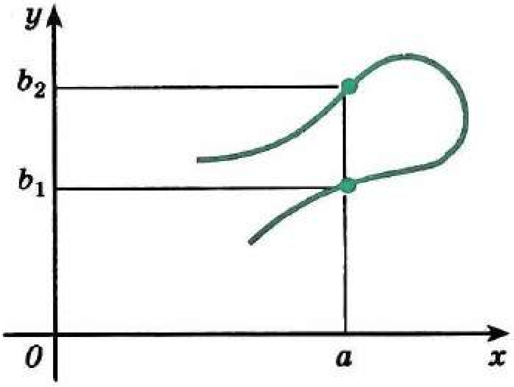
$f(x) = p(x)$ (монда $p(x)$ — күпбуын) рәвешендәге функцияләрне *бөтен рациональ функцияләр* дип, ә $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (монда $p(x)$ һәм $q(x)$— күпбуыннар) күренешендәге функцияләрне *вакланма рациональ функцияләр* дип атыйлар. $\frac{p(x)}{q(x)}$ өлешенең $q(x)$ нульгә әйләнмәгәндә мәгънәсе бар. Шуңа күрә $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ вакланма-рациональ функциясенең билгеләнү өлкәсен $q(x)$ күпбуынының тамырларыннан башка барлык реаль саннар күплеге тәшкил итә.

1 нче мисал. $f(x) = \frac{7x^6 - 5x^4 + 3x^2 - 4x}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ вакланма-рациональ функциясенең билгеләнү өлкәсен табыйк.

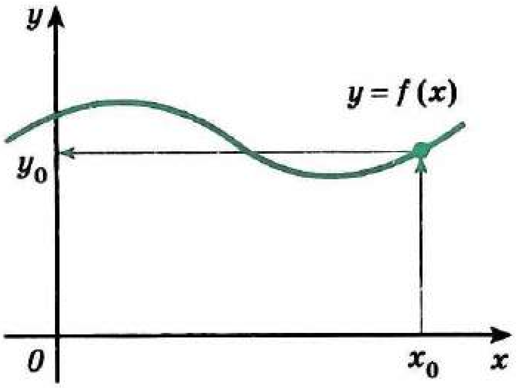
$x^3 - 3x^2 + 2x$ күпбуынының тамырлары — 0, 1 һәм 2 саннары. Шуңа күрә $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$.

2. Функциянең графигы. $y = f(x)$ булганда, координаталар яссылыгының барлык $(x; y)$ нокталары күплеген *f функциясенең графигы* дип атыйлар, ә x исә f функциясенең барлык билгеләнү өлкәсен «йөгереп үтә».

Координаталар яссылыгы асткүплегенең Oy күчәренә параллель теләсә нинди туры белән бердән дә артык уртак ноктасы булмаса, бу күплек нинди дә булса функциянең графигы була. Мәсәлән, 15 нче рәсемдә сурәтләнгән күплек функция графигы булмый, чөнки аның ординаталары төрле: b_1 һәм b_2 булган, ә абсциссасы бер үк, ягъни a га тигез булган ике ноктасы бар. Әгәр без әлеге күплекне функция графигы дип уйласак, бу функциянең $x = a$ булганда b_1 һәм b_2 гә тигез ике кыйммәте бар дип исәпләргә туры килер иде, ә бу функция билгеләмәсенә каршы килә.



15 нче рәсем



16 нчы рәсем

Функцияне еш кына график юл белән бирәләр. Ул вакытта билгеләнү өлкәсендәге теләсә нинди x_0 өчен функциянең аңа тиңдәшле $y = f(x_0)$ кыйммәтен табу кыен түгел (16 нчы рәсем).

3. Графикларны үзгәртеп төзиләр. Хәзергә сез графикларын төзи ала торган функцияләр артык күп түгел. Болар — $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функцияләре. Геометрия курсыннан фигураларны үзгәртеп төзүләр турындагы таныш мәгълүматларны кулланып, бу исемлекне шактый арттыра алабыз.

1) Башта *ординаталар күчәре буйлап* (0; *b*) *векторына параллель күчерүне* карыйк. Монда һәм алга таба да әлеге үзгәртүдә яссылыкның ирекле рәвештә алынган (*x*; *y*) ноктасы күчкән нокталарның координаталарын (*x′*; *y′*) аша тамгалап, сезгә таныш булган формулаларны табабыз:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + b. \end{cases} \qquad (1)$$

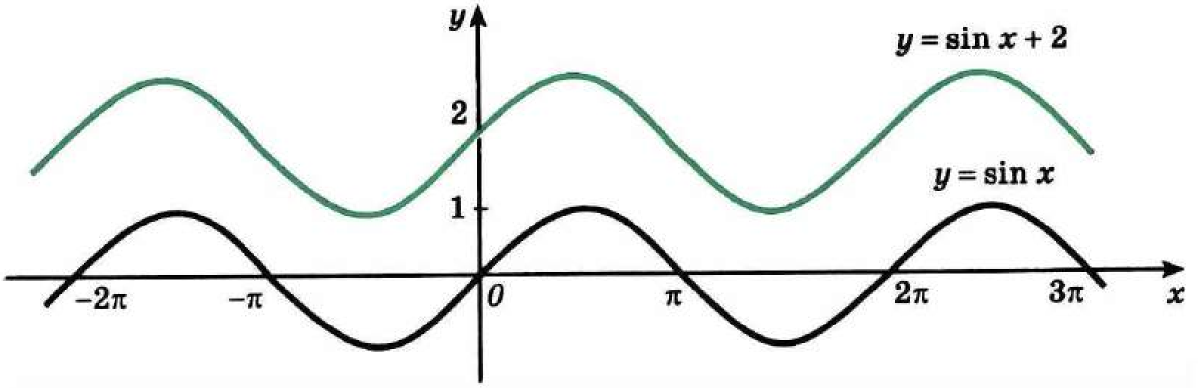
f — билгеләнү өлкәсе *D*(*f*) булган ирекле рәвештә алынган функция булсын. Әлеге күчерүдә бу функциянең графигы нинди фигурага күчкәнен ачыклыйк. (1) формулалардан турыдан-туры графикның теләсә нинди (*x*; *f*(*x*)) ноктасы (*x*; *f*(*x*) + *b*) ноктасына күчкәнлеген табабыз. Бу исә *f* графигы барлык (*x*; *f*(*x*) + *b*) (монда $x \in D(f)$) нокталарыннан торган фигурага күчкәнлекне белдерә.

Функция графигының билгеләмәсе буенча бу фигура $y = f(x) + b$ функциясенең графигы була. Югарыда сөйләгәннәрдән чыгып, шундый кагыйдә әйтә алабыз:

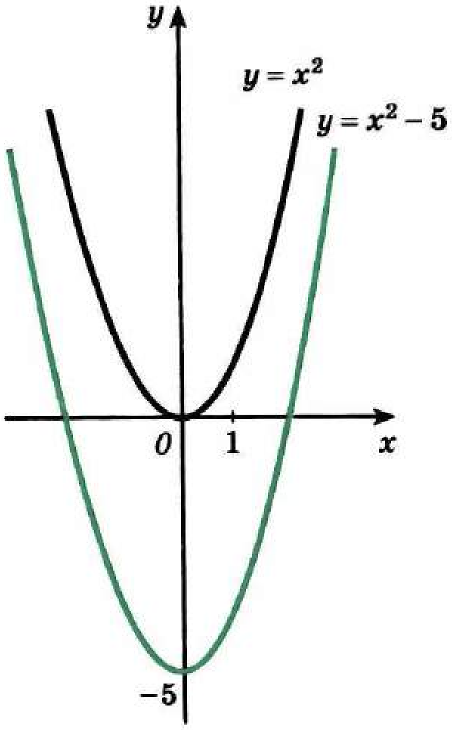
> *f*(*x*) + *b* (монда *b* — даими сан) функциясенең графигын төзү өчен, *f* графигын ординаталар күчәре буйлап (0; *b*) векторына күчерергә кирәк.

2 нче мисал. а) $y = \sin x + 2$, б) $y = x^2 - 5$ функцияләренең графикларын төзик.

а) Кагыйдәгә туры китереп, $y = \sin x$ функциясенең графигын (0; 2) векторга, ягъни *Oy* күчәре буйлап 2 берәмлеккә югарыга таба күчерәбез (17 нче рәсем).



17 нче рәсем



18 нче рәсем

б) Төзү $y = x^2$ параболасын $(0; -5)$ векторга, ягъни Oy күчәре буйлап түбәнгә таба күчерү юлы белән башкарыла (18 нче рәсем).

2) *Oy күчәре буйлап k коэффициенты белән сузу* сезнең өчен яңа үзгәртеп төзү булып тора. Бу үзгәртү

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases} \qquad (2)$$

формулалары белән бирелә.

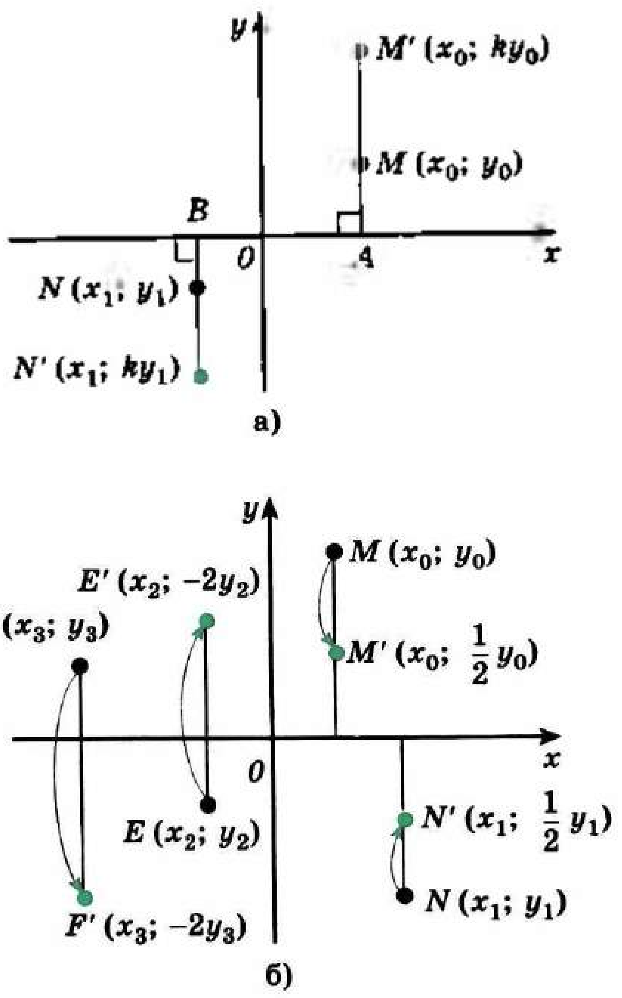
Сузганда бирелгән M' ноктасы күчә торган M ноктасын төзү өчен AM турысында (монда A—M ның, Ox күчәренә проекциясе, 19 нчы а рәсем) A үзәгенә карата M га гомотетик нокта төзергә кирәк (гомотетия коэффициенты сузу коэффициенты k га тигез). 19 нчы б рәсемдә $\frac{1}{2}$ һәм -2 коэффициенты белән сузганда бирелгән нокталар күчә торган нокталарны төзү күрсәтелгән.

Сузганда f функциясенең графигы нинди фигурага күчкәнен ачыклыйк. (2) формулаларыннан турыдан-туры f графигының ирекле рәвештә алынган $(x; f(x))$ ноктасы $(x; kf(x))$ ноктасына күчкәнлеген табабыз. Моннан f графигының барлык $(x; kf(x))$ нокталарыннан торган фигурага күчкәнлеге килеп чыга (монда $x \in D(f)$). Бу фигура $(y = kf(x))$ функциясенең графигы була.

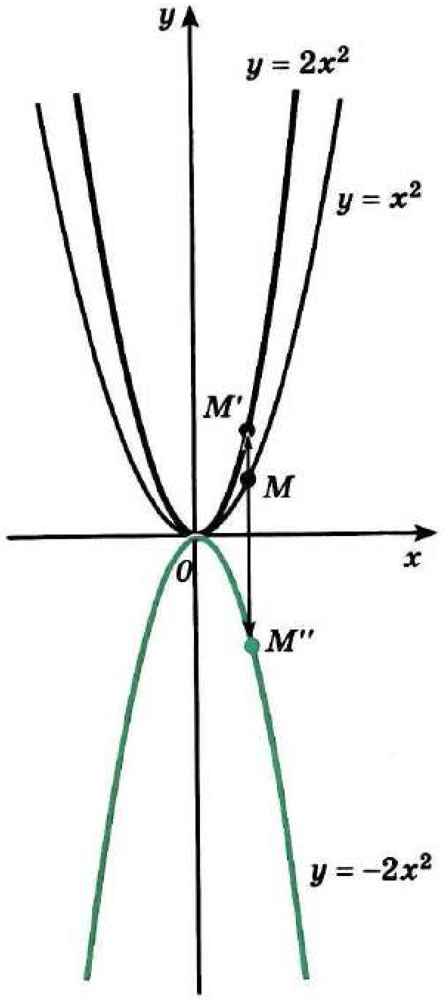
Түбәндәге кагыйдә исбатланды:

> **$y = kf(x)$ функциясенең графигын төзү өчен, $y = f(x)$ функциясенең графигын ординаталар күчәре буйлап k тапкырга сузарга кирәк.**

3 нче мисал. $y = -2x^2$ **һәм** $y = \frac{1}{3}\cos x$ **функцияләренең графикларын төзик.**



19 нчы рәсем

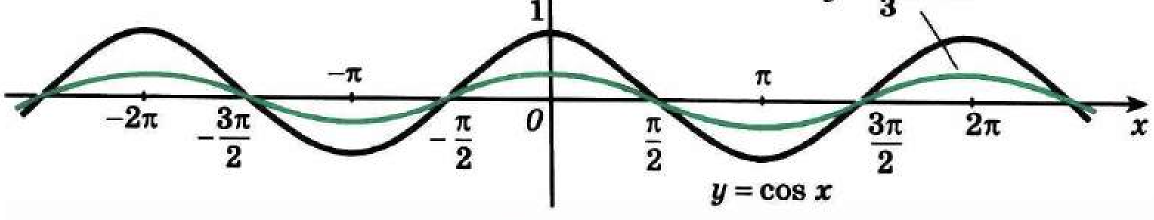


20 нче рәсем

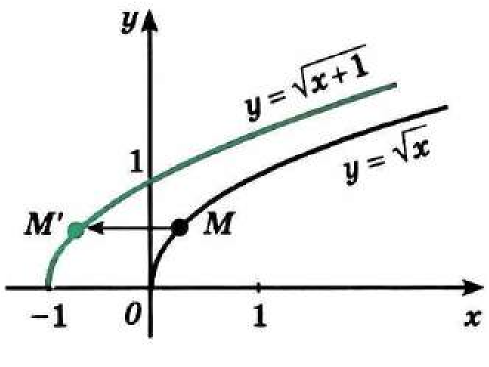
Беренче очракта төзү $y = x^2$ функциясенең графигын файдаланып башкарыла (20 нче рәсем), ә икенче очракта башта $y = \cos x$ функциясенең графигын төзибез, аннары ординаталар күчәре буйлап $\frac{1}{3}$ коэффициенты белән сузудан файдаланабыз (21 нче рәсем).

Искәрмә. Әгәр $0 < |k| < 1$ булса, k коэффициенты белән сузуны еш кына *кысу* дип атыйлар.

Мәсәлән, $\frac{1}{2}$ коэффициенты белән сузу 2 тапкырга кысу дип атала. Әгәр $k < 0$ булса, $y = kf(x)$ функциясенең графигын төзү өчен, башта f функциясенең графигын k тапкырга сузарга, ә аннары аны абсциссалар күчәренә симметрияле итеп чагылдырырга кирәк була (20 нче рәсемне карагыз).



21 нче рәсем



22 нче рәсем

3) *Абсциссалар күчәре буйлап $(a;\ 0)$ векторга параллель күчерү*

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y \end{cases} \qquad (3)$$

формулалары беләп бирелә.

(3) формулалары буенча f функциясе графигының һәр ноктасы $(x+a;\ f(x))$ ноктасына күчә. Шуңа күрә f графигы $(x'\ f(x'-a))$ нокталарыннан торган Ф фигурасына күчүен x', y' үзгәрешлеләре ярдәмендә язарга мөмкин, монда x' үзгәрешлесе $x+a$ күренешендәге барлык кыйммәтләрне ала, x исә $D(f)$ ны «йөгереп үтә».

x' ның нәкъ шул кыйммәтләре өчен $x'-a$ саны $D(f)$ ныкы була һәм $f(x'-a)$ дип билгеләнә. Димәк, Ф фигурасы $y=f(x-a)$ функциясенең графигы була. Шулай итеп, нәтиҗә ясарга мөмкин:

> $y=f(x-a)$ функциясенең графигы f графигыннан аны абсциссалар күчәре буйлап $(a;\ 0)$ векторга күчереп табыла.

Игътибар итегез: әгәр $a>0$ булса, $(a;\ 0)$ векторы абсциссалар күчәренең уңай юнәлеше белән бердәй юнәлгән, ә $a<0$ булса, каршы юнәлгән.

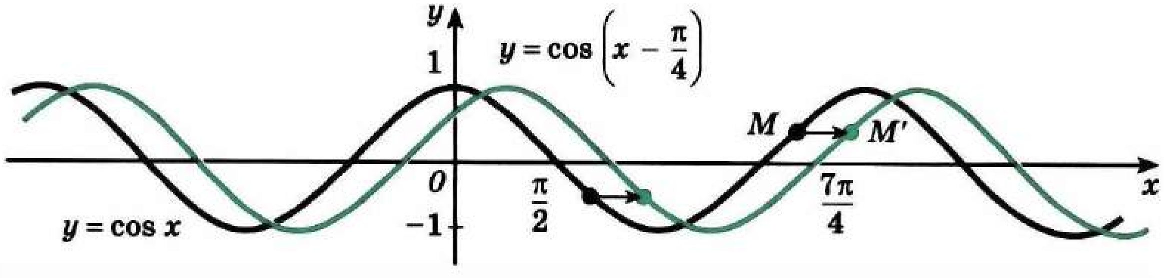
4 нче мисал. $y=\sqrt{x+1}$ һәм $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ функцияләренең графикларын төзү 22 нче һәм 23 нче рәсемнәрдә күрсәтелгән.

4) *Ox күчәре буйлап k коэффициенты белән сузу*

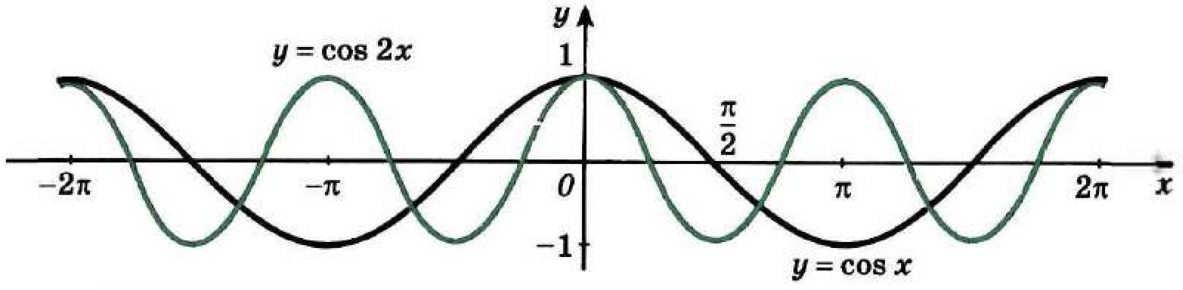
$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = y \end{cases} \qquad (4)$$

формулалары белән бирелә.

Мондый сузу вакытында f функциясе графигының теләсә кайсы ноктасы $(kx;\ f(x))$ ноктасына күчә. Ә x', y' үзгәрешлеләренә килсәк, $y=f(x)$ графигы $\left(x';\ f\left(\frac{x'}{k}\right)\right)$ ноктадарыннан торган фигурага күчә дип әйтергә мөмкин, монда x' үзгәрешлесе $x'=kx$ күренешендәге барлык кыйммәтләрне ала, ә $x\in D(f)$.



23 нче рәсем



24 нче рәсем

Бу фигура $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ функциясенең графигы була. Шулай булгач:

> $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ функциясенең графигын төзү өчен, f функциясенең графигын абсциссалар күчәре буйлап k коэффициенты белән сузарга кирәк.

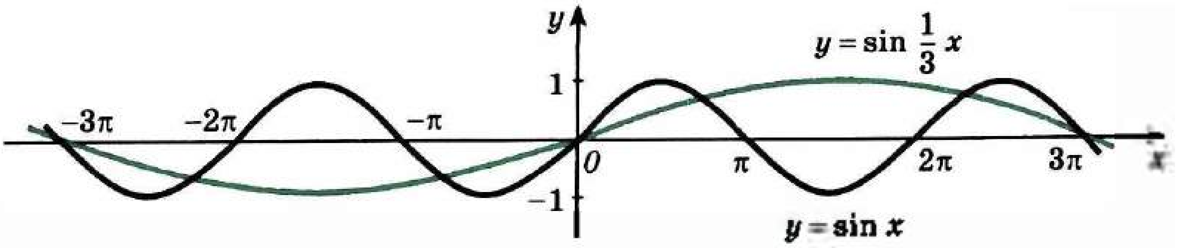
5 нче мисал. $y = \cos 2x$ һәм $y = \sin\frac{1}{3}x$ функцияләренең графикларын төзү 24 нче һәм 25 нче рәсемнәрдә күрсәтелгән.

4. Чагылдыру. Билгеләнү өлкәсе D һәм кыйммәтләре өлкәсе E булган функцияне шулай ук *D күплегенең E күплегенә чагылдыруы* дип тә атыйлар. Мәсәлән, $y = \sin x$ формуласын реаль саннар күплеге R ның $[-1; 1]$ кисемтәсенә чагылдыруы дип әйтергә мөмкин. «Функция» һәм «чагылдыру» сүзләре — синонимнар.

Еш кына билгеләнү өлкәсе яки кыйммәтләре өлкәсе (бәлки, бу ике күплек тә) санлы күплекләр булмаган функцияләр (чагылдырулар) тикшерелә. Андый мисаллар белән сез, асылда, геометрия курсында очраштыгыз инде. Мәсәлән, мәйданнарны үлчәүнең билгеләнгән берәмлекләрендә «Күппочмак мәйданы» функциясенең билгеләнү өлкәсе — яссылыкта күппочмаклар күплеге. Ә бу функциянең кыйммәтләре күплеге — тискәре булмаган саннар күплеге, («мәйданы юкка чыккан» күппочмаклар, мәсәлән кисемтә, 0 мәйданга ия).

F фигурасын F' фигурасына күчерә торган хәрәкәт (охшаш үзгәртү кебек үк) чагылдыру була, аның билгеләнү өлкәсе F һәм кыйммәтләре өлкәсе F' нокталардан торалар.

Чагылдыру төшенчәсен еш кына гомуми математиканың төп төшенчәләре исәбенә кертәләр. Аның ярдәмендә функциягә мондый билгеләмә бирергә мөмкин: D күплегенең һәр элементына



25 нче рәсем

E күплегенең тулысынча билгеләнгән бер элементы туры килгәндә һәм *E* күплегенең һәр элементы *D* күплегенең бер генә булса да ниндидер элементына тиңдәш ителгәндә, *D* күплегенең *E* күплегенә чагылдыруы билгеләнү өлкәсе *D* һәм кыйммәтләре өлкәсе *E* булган функция дип атала.

Күнегүләр

40. а) -1, $\frac{1}{2}$, 10 нокталарында $f(x) = x + \frac{1}{x}$,

б) $-\frac{\pi}{4}$, 0, π нокталарында $f(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

в) 0, 1, 2 нокталарында $f(x) = \sqrt{5x - x^2}$;

г) $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{5\pi}{12}$ нокталарында $f(x) = 2 - \sin 2x$

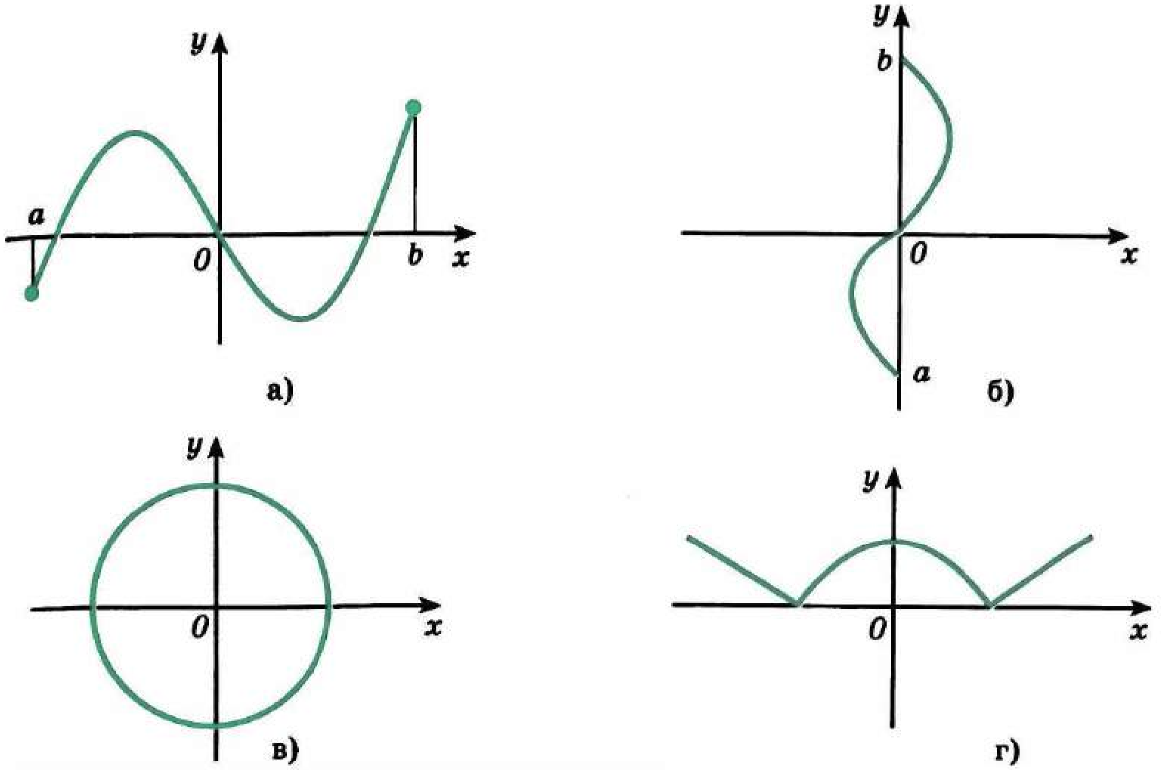
функцияләренең кыйммәтләрен табыгыз.

41. а) x_0, $t + 1$ нокталарында $f(x) = x^2 + 2x$;
б) a, $b - 1$ нокталарында $f(x) = \operatorname{tg} 2x$;

в) x_0, $a + 2$ нокталарында $f(x) = \frac{1}{x} + 1$;

г) z, $h + \pi$ нокталарында $f(x) = 2\cos\frac{x}{3}$ функцияләренең кыйммәтләрен языгыз.

42. 26 нчы *а—г* рәсемнәрдә сурәтләнгән фигура функциянең графигы буламы?



26 нчы рәсем

Һәр функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз (43—44).

43. а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$;

в) $f(x)=\dfrac{5-x^2}{x^2+2x-8}$; г) $f(x)=\sqrt{36-x^2}$.

44. а) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$; б) $f(x)=2\,\mathrm{tg}\,x$;

в) $f(x)=1+\mathrm{ctg}\,x$; г) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$.

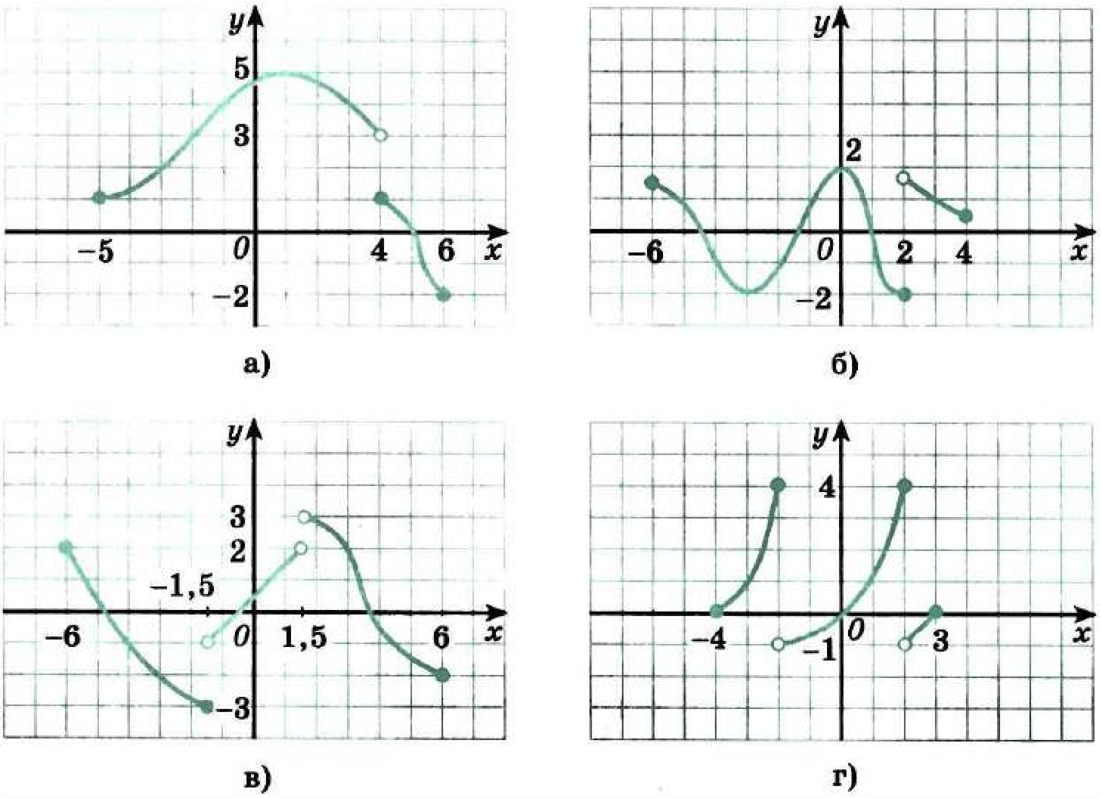
45. **Һәр функциянең билгеләнү өлкәсен һәм кыйммәтләре өлкәсен табыгыз:**

а) $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=2+\dfrac{4}{x-3}$;

в) $y=\dfrac{3}{x+1}-1$; г) $y=3+0{,}5\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

46. **Графиклары 27 нче *а—г* рәсемнәрдә сурәтләнгән функцияләрнең билгеләнү өлкәсен һәм кыйммәтләре өлкәсен табыгыз.**

47. а) $D(f)=[-2;\ 4]$, $E(f)=[-3;\ 3]$;
б) $D(f)=(-5;\ 3)$, $E(f)=[2;\ 6]$ **булган нинди дә булса f функциясенең графигын сызыгыз.**



27 нче рәсем

48.— Функцияләрнең графикларын бер үк координаталар системасында төзегез:

а) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} + 2$, $y = \frac{1}{x-2}$;

б) $y = \cos x$, $y = \cos x - 3$, $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y = -x^2$, $y = 4 - x^2$, $y = -(x-2)^2$;

г) $y = \sin x$, $y = \sin x + 2$, $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Функцияләрнең графикларын төзегез (49—50).

49.— а) $y = \frac{1}{x-3}$; б) $y = (x-2)^2 - 4$;

в) $y = 1 - (x+2)^2$; г) $y = 2 + \frac{1}{x}$.

50.— а) $y = 1 + 2\sin x$; б) $y = \sqrt{x+1} - 1$;

в) $y = 0{,}5\cos x - 1$; г) $y = 2 + \sqrt{x-1}$.

51.— а) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \text{ булса}, \\ -x, & x < 0 \text{ булса}; \end{cases}$ $-2; -\frac{1}{3}; 0; 5$ нокталарында;

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geqslant -1 \text{ булса}, \\ 1 - x, & x < -1 \text{ булса}; \end{cases}$ $-2; -1; 0; 4$ нокталарында;

в) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0 \text{ булса}, \\ \cos x - 1, & x \leqslant 0 \text{ булса}; \end{cases}$ $-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{6}$

нокталарында функциянең кыйммәтләрен табыгыз.

52.— а) ABC өчпочмагының AC нигезе b га, BD биеклеге h ка тигез. BD биеклегенең K ноктасы аша AC га параллель туры үткәрелгән. Бирелгән өчпочмакны бу туры белән бүлүдән килеп чыккан фигураларның мәйданнарын $BK = x$ ераклыгының функциясе буларак күрсәтегез.

б) Үзәк почмакның радианлы үлчәме x ка, түгәрәкнең радиусы R га тигез. Тиндәшле сегментның мәйданын x ның функциясе буларак күрсәтегез.

в) Секторның үзәк почмагының радианлы үлчәме α га, радиусы r га тигез. Секторның периметрын α почмагының функциясе буларак күрсәтегез.

г) Квадратның диагоналенә параллель туры аны ике фигурага бүлә. Квадратның ягы a га тигез булса, һәр фигураның мәйданы һәм диагональдән әлеге туры белән кисеп алынган кечерәк кисемтәнең озынлыгы x арасындагы бәйлелекне формула белән бирегез.

53.— Функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз:

а) $y = \dfrac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{16-x^2}$;

в) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{3-2x}$; г) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-2x}$.

54.— Функцияләрнең билгеләнү өлкәсен һәм кыйммәтләре өлкәсен табыгыз:

а) $y = 1 + \sin^2 x$; б) $y = \dfrac{x-1}{x}$;

в) $y = \sqrt{x^2+4}$; г) $y = 1{,}5 - 0{,}5\cos^2 x$.

Функцияләрнең графикларын төзегез (55—56).

55.— а) $y = |x-1|$; б) $y = \begin{cases} x^2-4, & x \geqslant 2 \text{ булса,} \\ 2-x, & x < 2 \text{ булса;} \end{cases}$

в) $y = \sqrt{2x-2}$; г) $y = \begin{cases} 3-x^2, & x > 1 \text{ булса,} \\ x-2, & x \leqslant 1 \text{ булса.} \end{cases}$

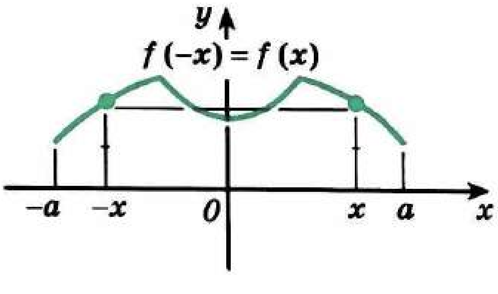
56.— а) $y = \sin 3x - 1$; б) $y = \frac{1}{2}x^3 + 2$;

в) $y = 1 + \cos 2x$; г) $y = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

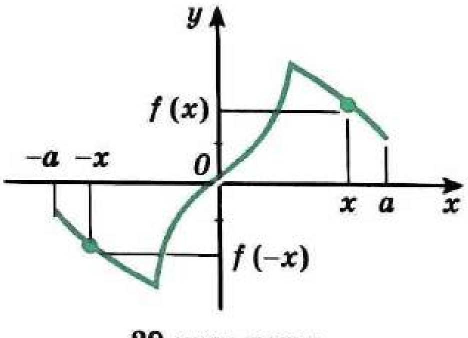
4. Җөп һәм так функцияләр. Тригонометрик функцияләрнең периодиклыгы

1. Җөп һәм так функцияләр. Билгеләнү өлкәсе координаталар башлангычына карата симметрияле булган, ягъни билгеләнү өлкәсендәге теләсә нинди x өчен $(-x)$ саны шулай ук билгеләнү өлкәсенә кергән функцияләрне тикшерик. Андый функцияләр арасында җөп һәм так функцияләрне билгелиләр.

> Билгеләмә. **Әгәр билгеләнү өлкәсендәге теләсә нинди x өчен $f(-x) = f(x)$ тигезлеге үтәлсә, f функциясе *җөп функция* дип атала** (28 нче рәсем).



28 нче рәсем



29 нчы рәсем

Билгеләмә. **Әгәр билгеләнү өлкәсендәге теләсә нинди x өчен $f(-x) = -f(x)$ тигезлеге үтәлсә, f функциясе *так* функция дип атала (29 нчы рәсем).**

1 нче мисал. $f(x) = x^4$ — җөп функция, ә $g(x) = x^3$ — так функция. Чыннан да, бу функцияләрнең һәркайсының билгеләнү өлкәсе (ул барлык санлы туры) 0 ноктасына карата симметрияле һәм теләсә нинди x өчен $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ тигезлекләре үтәлгән. Бу функцияләрнең графиклары 30 һәм 31 нче рәсемнәрдә сурәтләнгән.

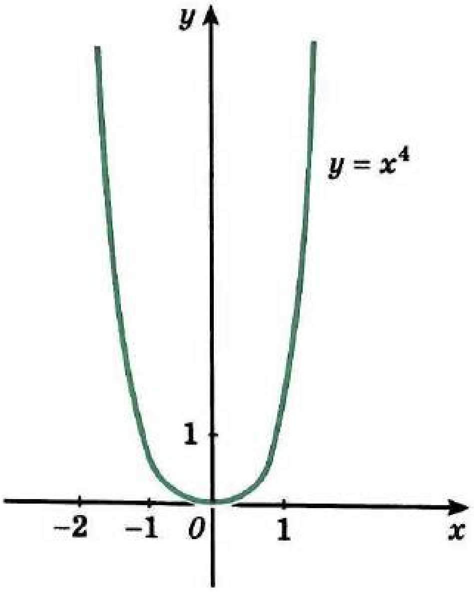
Җөп һәм так функцияләрнең графикларын төзегәндә, сезгә алгебра курсыннан таныш булган түбәндәге үзлекләрдән файдаланырбыз:

> 1°. Җөп функциянең графигы ординаталар күчәренә карата симметрияле.
> 2°. Так функциянең графигы координаталар башлангычына карата симметрияле.

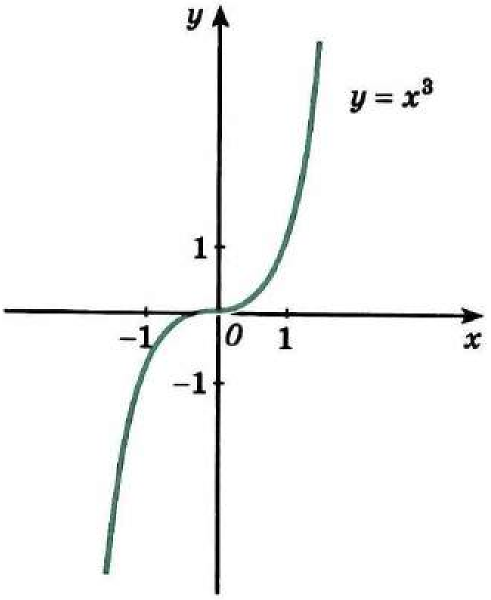
Әлеге ике кагыйдәдән шундый нәтиҗә килеп чыга: җөп яки так функциянең графигын төзегәндә, аның бер кисәген тискәре булмаган x лар өчен төзеп, аннары килеп чыккан графикны ординаталар күчәренә карата (функция җөп булган очракта) яки координаталар башлангычына карата (так булган очракта) чагылдыру җитә.

2 нче мисал. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ — так функция (моны мөстәкыйль рәвештә исбатлагыз). Аның графигы координаталар башлангычына карата симметрияле (32 нче рәсем).

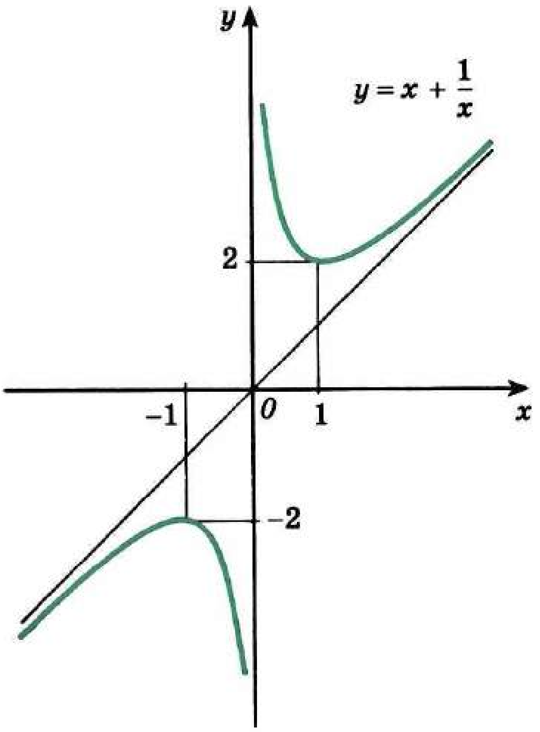
Төп тригонометрик функцияләрдән синус, тангенс һәм котангенс — так, ә косинус — җөп функция. Шуңа күрә синус, тангенс



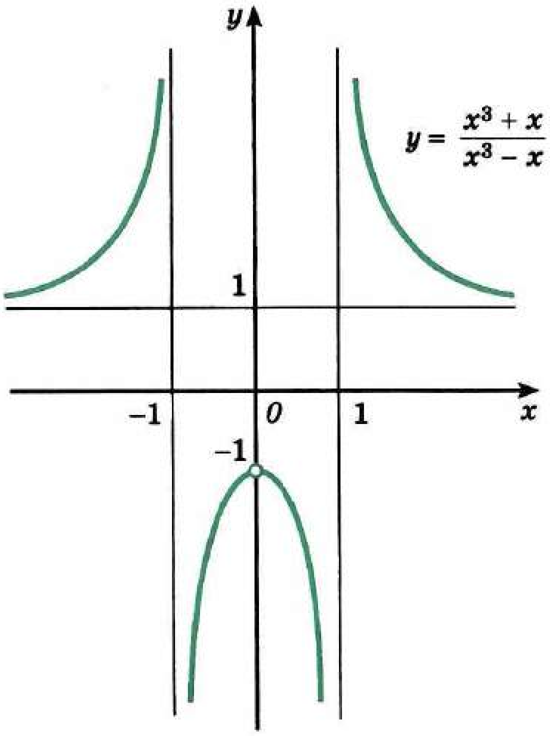
30 нчы рәсем



31 нче рәсем



32 нче рәсем



33 нче рәсем

һәм котангенсның графиклары координаталар башлангычына карата симметрияле (8, 13, 14 нче рәсемнәрне карагыз), ә косинусның графигы (9 нчы рәсемне карагыз) ординаталар күчәренә карата симметрияле.

3 нче мисал. $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$ — җөп функция, чөнки аның билгеләнү өлкәсе $x = 0$ ноктасына карата симметрияле (ул -1, 0 һәм 1 дән башка барлык саннардан тора) һәм барлык $x \in D(f)$ өчен

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{-x^3 - x}{x - x^3} = \frac{x^3 + x}{x^3 - x} = f(x)$$

тигезлеге үтәлгән.

Бу функциянең графигы Oy күчәренә карата симметрияле (33 нче рәсем).

4 нче мисал. $f(x) = x^2 + x$ җөп функция дә, так функция дә түгел. Аның билгеләнү өлкәсе 0 ноктасына карата симметрияле, ләкин, мәсәлән, $x = 1$ булганда $f(1) = f(-1)$ тигезлеге дә, $f(1) = -f(-1)$ тигезлеге дә үтәлми, чөнки $f(1) = 2$, ә $f(-1) = 0$.

2. Периодик функцияләр. Тормышта безгә очрый торган процесс һәм күренешләрнең күбесе кабатлану үзенчәлегенә ия. Мәсәлән, Кояш белән Җирнең үзара бертөрле торышы ел саен кабатлана. Маятникның торышлары аның тирбәнү периодына тигез период белән бер-берсеннән аерылып торган вакыт моментларында бертөрле була.

Мондый төрдәге процессларны периодик процесслар дип, ә аларны тасвирлап биргән функцияләрне периодик функцияләр дип атыйлар.

Сезгә таныш булган төп тригонометрик функцияләр — периодик функцияләр. Әйтик, теләсә нинди x һәм теләсә нинди бөтен

k саны өчен $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$ тигезлеге үтәлә. Моннан $2\pi k$ синус функциясенең периоды ($k \neq 0$ — теләсә нинди бөтен сан) икәнлеге килеп чыга.

Гомумән, f функциясенең периодиклыгы турында сөйләгәндә билгеләнү өлкәсе $D(f)$, һәр x ноктасы белән бергә, x ны Ox күчәре буйлап (уңга һәм сулга) T ераклыкка параллель күчергәндә килеп чыккан нокталарны да үз эченә алырлык $T \neq 0$ саны бар дип уйланыла. Әгәр билгеләнү өлкәсендәге теләсә нинди x өчен функциянең x, $x - T$ һәм $x + T$ нокталарындагы кыйммәтләре тигез, ягъни $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$ булса, f функциясен периоды $T \neq 0$ булган *периодик функция* дип атыйлар.

Барлык санлы турыда билгеләнгән һәм теләсә нинди x өчен $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ булганга күрә, синус һәм косинус — периодлары 2π гә тигез булган периодик функцияләр.

Тангенс һәм котангенс — периодлары π гә тигез булган периодик функцияләр. Чыннан да, бу функцияләрнең билгеләнү өлкәләре, һәр x белән бергә, $x + \pi$ һәм $x - \pi$ саннарын да үз эчләренә алалар һәм $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$ тигезлекләре дөрес.

Үзеннән-үзе аңлашыла, әгәр f функциясенең периоды T булса, ул вакытта теләсә нинди бөтен $n \neq 0$ өчен nT саны шулай ук бу функциянең периоды була. Мәсәлән, $n = 3$ булганда, берничә тапкыр периодик функция билгеләмәсен кулланып табабыз:

$$f(x + 3T) = f((x + 2T) + T) = f(x + 2T) = f((x + T) + T) =$$
$$= f(x + T) = f(x).$$

а) $y = \sin x$ һәм $y = \cos x$ функцияләренең иң кечкенә уңай периодлары 2π гә тигез икәнен;
б) $y = \operatorname{tg} x$ һәм $y = \operatorname{ctg} x$ функцияләре өчен иң кечкенә уңай период π саны икәнен исбатлыйк.

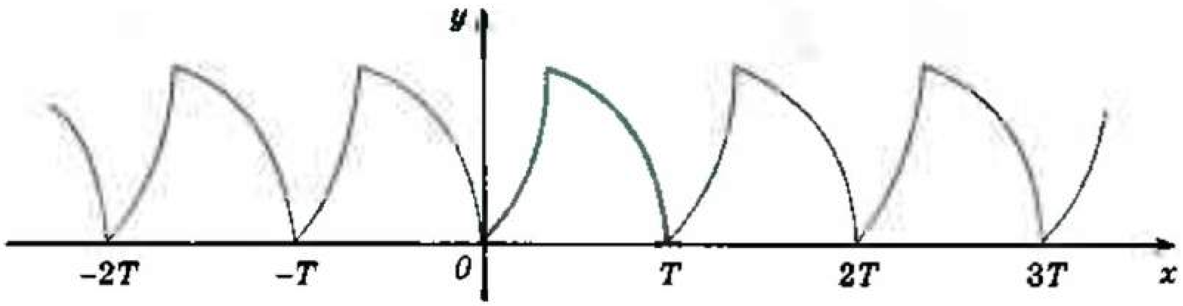
а) Билгеләп үтелгәнчә, 2π саны sin һәм cos функцияләренең периоды була. Шуңа күрә 2π дән кечкенәрәк уңай сан аларның периоды була алмавын исбатлыйсы кала. Моны исбат итик.

Әгәр T — косинусның, ирекле рәвештә алынган периоды булса, ул вакытта теләсә нинди α өчен $\cos(\alpha + T) = \cos\alpha$. $\alpha = 0$ дип алып, $\cos T = \cos 0 = 1$ икәнен табабыз. $\cos x = 1$ булган иң кечкенә уңай T саны 2π.

T — синусның ирекле рәвештә алынган уңай периоды булсын. Ул вакытта теләсә нинди α өчен $\sin(\alpha + T) = \sin\alpha$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ дип алып,

$\sin\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ икәнен табабыз. Ләкин $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in Z)$ булганда гына $\sin x = 1$. Шуңа күрә $2\pi n$ рәвешендәге иң кечкенә уңай сан 2π.

б) Әгәр T — тангенсның уңай периоды булса, ул вакытта $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg}(0 + T) = \operatorname{tg} 0 = 0$. $(0; \pi)$ интервалында тангенсның нульләре булмаганга күрә, $T \geq \pi$. Алдарак tg функциясенең периоды π икән-



34 нче рәсем

леге исбатланган иде, димәк, π тангенсның иң кечкенә уңай периоды була. ctg өчен исбатлау аналогик рәвештә башкарыла.

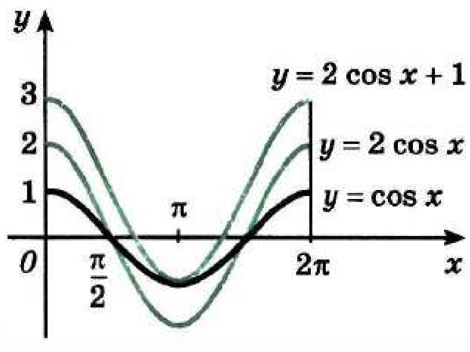
Кагыйдә буларак, «иң кечкенә уңай период» сүзе төшереп калдырыла. Мәсәлән, тангенсның периоды π гә тигез, синусның периоды 2π гә тигез дип сөйләү кабул ителгән.

Төп тригонометрик функцияләрнең периодиклыгыннан без алдарак аларның графикларын төзегәндә файдаланган идек инде. Түбәндәге раслау дөрес булыр.

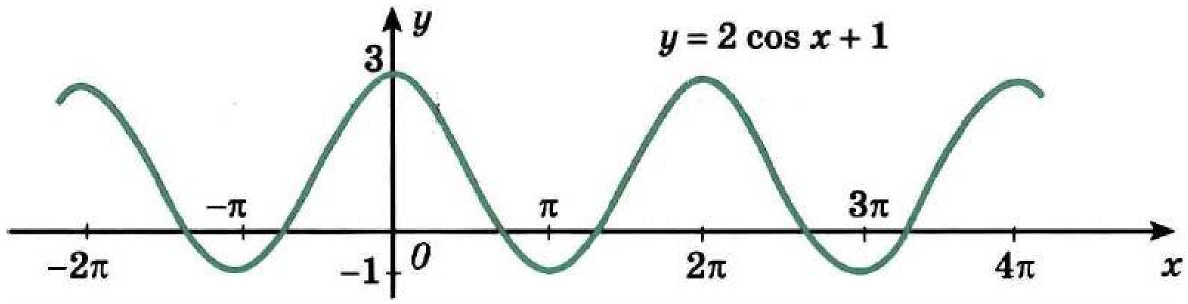
> **Периоды T булган периодик функциянең графигын төзү өчен, аны T озынлыгындагы кисемтәдә төзеп, аннары килеп чыккан графикны Ox күчәре буйлап уңга һәм сулга nT ераклыкка күчерү җитә (34 нче рәсем, монда n — теләсә нинди натураль сан).**

Чыннан да, $(x_0; y_0)$ — периодик f функциясе графигы ноктасы булсын. Ул вакытта теләсә нинди бөтен n өчен $x_0 + nT$ ноктасы f ның билгеләнү өлкәсенә керә (пункт башындагы искәрмәне карагыз) һәм f ның периодик булуы сәбәпле, $f(x_0 + nT) = f(x_0) = y_0$ тигезлеге дөрес. Димәк, $(x_0; y_0)$ ноктасын Ox күчәре буйлап $(nT; 0)$ векторына параллель күчергәндә табылган $(x_0 + nT; y_0)$ ноктасы да f графигыныкы була.

5 нче мисал. $f(x) = 2\cos x + 1$ функциясенең графигын төзик. Төзү өчен аның периоды 2π гә тигез периодик функция булуыннан файдаланабыз. Чыннан да, f функциясе барлык турыда билгеләнгән һәм, димәк, аның билгеләнү өлкәсе, теләсә нинди x_0 ноктасы белән бергә, x_0 не Ox күчәре буйлап уңга һәм сулга 2π ераклыкка параллель күчерүдән килеп чыккан нокталарны да эченә ала. Моннан тыш, косинус периодик функция булганлыктан, $f(x + 2\pi) = 2\cos(x + 2\pi) + 1 = 2\cos x + 1 = f(x)$. Периодик функцияләрнең графиклары үзлегеннән файдаланып, f ның графигын башта



35 нче рәсем



36 нчы рәсем

$[0;\ 2\pi]$ кисемтәсендә төзибез. Графикларны үзгәртеп төзүнең таныш кагыйдәләренә туры китереп косинусның графигын Oy күчәре буйлап 2 тапкырга сузабыз һәм аны 1 гә югарыга таба күчерәбез (35 нче рәсем), ә аннары параллель күчерүләр ярдәмендә аны барлык санлы турыда дәвам итәбез (36 нчы рәсем).

6 нчы мисал. $f(x) = \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ функциясенең периодик һәм иң кечкенә уңай периоды $\frac{\pi}{2}$ икәнен исбатлыйк. Тангенс аргументның $\frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in Z)$ гә тигез булмаган барлык кыйммәтләре өчен билгеләнгән. Шуңа күрә бирелгән функциянең билгеләнү өлкәсе $2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, ягъни $x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ шарты үтәлгән x лардан тора. Моннан $D(f)$, ирекле рәвештә алынган x лар белән рәттән, $x_0 + \frac{\pi n}{2}$, $x_0 - \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ рәвешендәге барлык нокталарны да эченә алганлыгы килеп чыга.

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{tg}\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\left(\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \pi\right) = \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

булгач, $\frac{\pi}{2}$ саны f функциясенең периоды икәнлеге күренеп тора. $\frac{\pi}{2}$ саны f функциясенең иң кечкенә уңай периоды икәнлеген исбатлыйсы кала. $\frac{\pi}{2}$ дән кечерәк булган T_0 саны f ның периоды, дип уйлыйк. Ул вакытта теләсә нинди $x \in D(f)$ өчен $f(x + T_0) = \mathrm{tg}\left(2(x + T_0) - \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\left(\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2T_0\right) = f(x) = \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, чөнки T_0 саны — f ның периоды. Ләкин бу $2T_0$ саны f функциясенең периоды икәнлеген белдерә. Безнең фараз итү буенча $T_0 < \frac{\pi}{2}$ һәм, димәк, $2T_0 < \pi$. Бу элек исбатлаганга каршы килә: тангенсның иң кечкенә уңай периоды π гә тигез.

Гомуми раслау аналогик рәвештә исбатлана:

> Әгәр f функциясе периодик һәм T аның периоды булса, ул вакытта $Af(kx + b)$ функциясе, монда A, k һәм b — даими зурлыклар, ә $k \neq 0$, шулай ук периодик була, шуның белән бергә, аның периоды $\frac{T}{|k|}$ га тигез.

Бу раслаудан чыгып турыдан-туры, мәсәлән, $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ функциясенең периоды — $\frac{2\pi}{3}$ санына, ә $\cos\left(-\frac{x}{2} + \pi\right)$ функциясенең периоды 4π гә тигез икәнлеген табабыз.

Күнегүләр

Җөп функцияләр икәнлеген исбатлагыз (57—58).

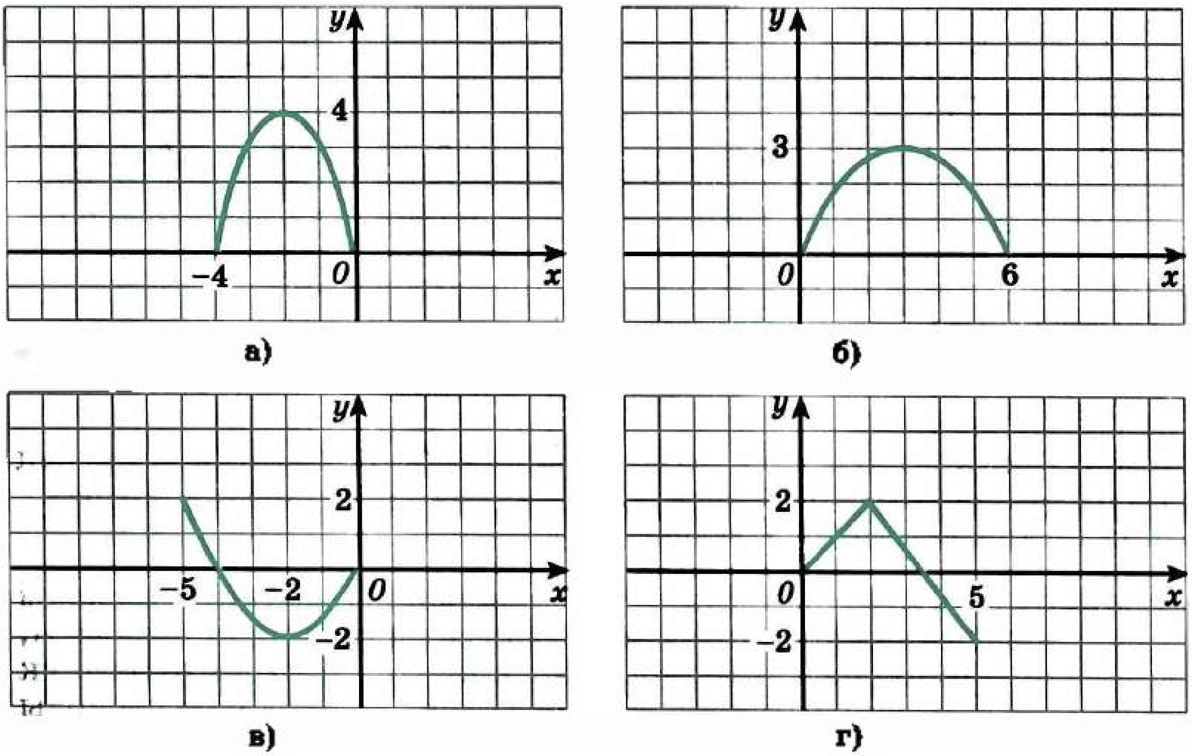
57. а) $f(x) = 3x^2 + x^4$; б) $f(x) = x^5 \sin\frac{x}{2}$;
в) $f(x) = x^2 \cos x$; г) $f(x) = 4x^6 - x^2$;

58. а) $f(x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$; б) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$;
в) $f(x) = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{x^3}$; г) $f(x) = \frac{\cos x^3}{4 - x^2}$.

Так функцияләр икәнлеген исбатлагыз (59—60).

59. а) $f(x) = x^3 \sin x^2$; б) $f(x) = x^2(2x - x^3)$;
в) $f(x) = x^5 \cos 3x$; г) $f(x) = x(5 - x^2)$.

60. а) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{2x^3}$; б) $f(x) = \frac{\cos x^2}{x(25 - x^2)}$;
в) $f(x) = \frac{3x}{x^4 + 2}$; г) $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{x^2 - 9}$.



37 нче рәсем

61. — 37 нче *а*—*г* рәсемдә $x \geq 0$ ($x \leq 0$) шартын канәгатьләндергән барлык x лар өчен f функциясенең графигы төзелгән. 1) f — җөп функция; 2) f — так функция икәнлеге билгеле булса, f функциясенең графигын төзегез.

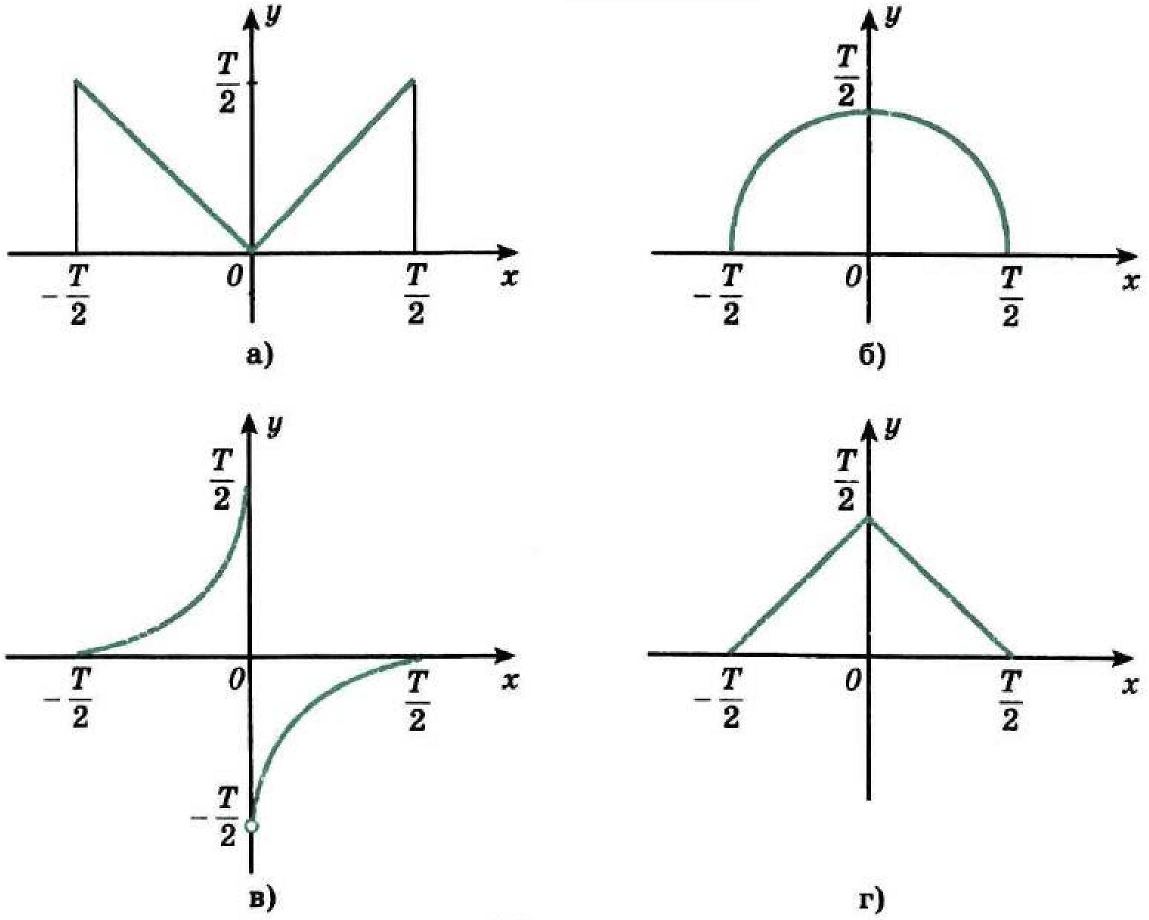
62. а) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $T = 4\pi$; б) $f(x) = 2 \operatorname{tg} 3x$, $T = \frac{\pi}{3}$;
в) $f(x) = 3 \cos 4x$, $T = \frac{\pi}{2}$; г) $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$, $T = 3\pi$
булса, T саны f функциясенең периоды икәнен исбатлагыз.

63. f функциясенең периодик икәнен исбатлагыз:
а) $f(x) = 2 - \cos x$; б) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$;
в) $f(x) = \sin x + \cos x$; г) $f(x) = 3 + \sin^2 x$.

Һәр функциянең иң кечкенә уңай периодын табыгыз (64—65).

64. а) $y = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{4}$; б) $y = 3 \operatorname{tg} 1,5x$;
в) $y = 4 \cos 2x$; г) $y = 5 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$.

65. а) $y = \sin x \cos x$; б) $y = \sin x \sin 4x - \cos x \cos 4x$;
в) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$; г) $y = \sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x$.



38 нче рәсем

66. — 38 нче *а—г* рәсемнәрендә периоды T булган функция графигының бер өлеше сурәтләнгән. Бу функциянең $[-1,5T;\ 2,5T]$ аралыгындагы графигын төзегез.

67. — Функциянең иң кечкенә уңай периодын табыгыз һәм графигын төзегез:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos \frac{x}{3}$;

в) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; г) $y = \sin 1,5x$.

68. — Укучы, f функциясе өчен ике тигезлекнең дөреслеген тикшереп, T саны fның периоды була дигән нәтиҗә ясады.

а) $f(x) = \sin x,\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\ T = \frac{2\pi}{3}$;

б) $f(x) = \cos x,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = 0,\ T = \pi$;

в) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leqslant 1 \text{ булса,} \\ 3 - x, & x > 1 \text{ булса,} \end{cases}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,5,\ f\left(-\frac{1}{2} + 3\right) = 0,5,\ T = 3$;

г) $f(x) = x + |x|,\ f(-4) = 0,\ f(-4 + 3) = 0,\ T = 3$ шартлары өчен укучының бу раславы дөресме?

Түбәндә күрсәтелгән функцияләрнең кайсылары — җөп, кайсылары — так, кайсылары җөп тә, так та түгел (69—70)?

69. — а) $y = \sin x + \operatorname{ctg} x - x$; б) $y = \frac{|x|}{\sin x \cos x}$;

в) $y = x^4 + \operatorname{tg}^2 x + x \sin x$; г) $y = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{|x|}$.

70. — а) $y = \frac{\sin x}{x^2 - 1}$; б) $y = \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$;

в) $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x}$; г) $y = \frac{x + \operatorname{tg} x}{x \cos x}$.

71. — Бирелгән функциянең җөп яки так икәнен исбатлагыз һәм аның графигын төзегез:

а) $y = \frac{1}{x^3}$; б) $y = \frac{1}{x^2}$.

72. — f һәм g функцияләре барлык реаль саннар күплегендә билгеләнгән.

а) $h(x) = f(x)g^2(x)$, f — җөп функция, g — так функция;

б) $h(x) = f(x) - g(x)$, f һәм g — җөп функцияләр;

в) $h(x) = f(x) + g(x)$, f һәм g — так функцияләр;

г) $h(x) = f(x)g(x)$, f һәм g — так функцияләр булса, h җөп функция буламы?

73.— Функциянең иң кечкенә уңай периодын табыгыз:

а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$;

в) $y = \sin^4 x - \cos^4 x$; г) $y = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2$.

74.— Функциянең графигын төзегез:

а) $y = 1 - \cos 1,5x$; б) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y = 2 + \sin\frac{x}{2}$; г) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

75.— Әгәр $y = f(x)$ функциясе периодик булса, $y = kf(x) + b$ функциясенең дә периодик икәнен исбатлагыз.

76.— 2 саны функциянең периоды түгеллеген исбатлагыз:

а) $y = x^2 - 3$; б) $y = \cos x$; в) $y = 3x - 5$; г) $y = |x|$.

5. Функцияләрнең үсүе һәм кимүе. Экстремумнар

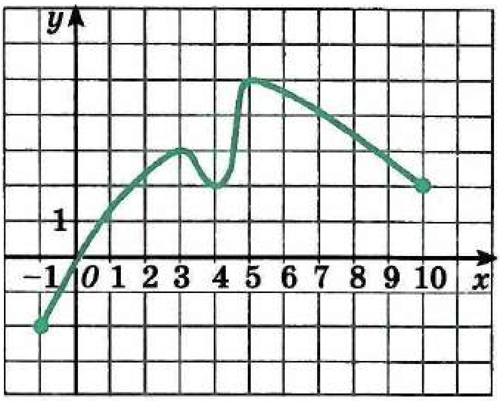
1. Функцияләрнең үсүе һәм кимүе. Үсүче һәм кимүче функцияләрнең төшенчәләре белән сез инде таныш. Мәсәлән, 39 нчы рәсемдә $[-1; 10]$ кисемтәсендә билгеләнгән функциянең графигы сурәтләнгән. Бу функция $[-1; 3]$ һәм $[4; 5]$ кисемтәләрендә үсә, $[3; 4]$ һәм $[5; 10]$ кисемтәләрендә кими. $y = x^2$ функциясенең $(-\infty; 0]$ гә кадәр аралыкта кимегәнлеге, $[0; \infty)$ кә кадәр аралыкта үскәнлеге билгеле, x үзгәрешлесе $-\infty$ тән ∞ кә кадәр үзгәргәндә, бу функциянең графигы башта нульгә кадәр «төшә» (0 ноктасында функциянең кыйммәте нульгә тигез), ә аннары чиксезлеккә кадәр «күтәрелә» (20 нче рәсемне карагыз).

> Билгеләмә. **Әгәр P күплегендәге теләсә нинди x_1 һәм x_2 өчен $x_2 > x_1$ булганда $f(x_2) > f(x_1)$ тигезсезлеге үтәлсә, P күплегендә f функциясе *үсә*.**

> Билгеләмә. **Әгәр P күплегендәге теләсә нинди x_1 һәм x_2 өчен $x_2 > x_1$ булганда $f(x_2) < f(x_1)$ тигезсезлеге үтәлсә, P күплегендә f функциясе *кими*.**

Башка сүзләр белән әйткәндә, әгәр P күплегендәге аргументның зуррак кыйммәтенә функциянең зуррак кыйммәте туры килсә, f функциясе бу күплектә үсүче функция дип атала. Әгәр P күплегендәге аргументның зуррак кыйммәтенә функциянең кечерәк кыйммәте туры килсә, f функциясе бу күплектә кимүче функция дип атала.

1 нче мисал. $f(x) = x^n (n \in N)$ функциясе n так булганда барлык санлы турыда үскәнен, ә n җөп булганда $f(x) = x^n$ функциясе $[0; \infty)$ кә кадәр аралыкта үскәнен, ә $(-\infty; 0]$ гә кадәр аралыкта кимегәнен исбатлыйк.



39 нчы рәсем

Башта $f(x) = x^n$ функциясенең теләсә нинди натураль n өчен $[0;\infty)$ кә кадәр аралыкта үскәнен исбатларбыз. $x_2 > x_1 \geq 0$ булсын. Ул вакытта дәрәҗәнең үзлеге буенча $x_2^n > x_1^n$. Хәзер n җөп булган очракны карыйк. $x_1 < x_2 \leq 0$ булсын. Ул вакытта $-x_1 > -x_2 \geq 0$ һәм $(-x_1)^n > (-x_2)^n \geq 0$, ягъни $x_1^n > x_2^n$. Нәкъ шушының белән n җөп булганда, $f(x) = x^n$ функциясе $(-\infty; 0]$ кадәр аралыкта кимегәнлеге исбатлана. n так булган очракны карыйсы калды. Әгәр $x_1 < 0 < x_2$ булса, ул вакытта $x_1^n < 0 < x_2^n$. Әгәр $x_1 < x_2 \leq 0$ булса, ул вакытта $-x_1 > -x_2 \geq 0$ һәм шуңа күрә $(-x_1)^n > (-x_2)^n > 0$, ягъни $-x_1^n > -x_2^n$, моннан $x_2^n > x_1^n$. Шулай итеп, так n өчен $x_2 > x_1$ тигезсезлегеннән $x_2^n > x_1^n$ тигезсезлеге килеп чыкканлыгы исбатланды. Билгеләмә буенча $f(x) = x^n$ функциясе n так булганда барлык санлы турыда үсә.

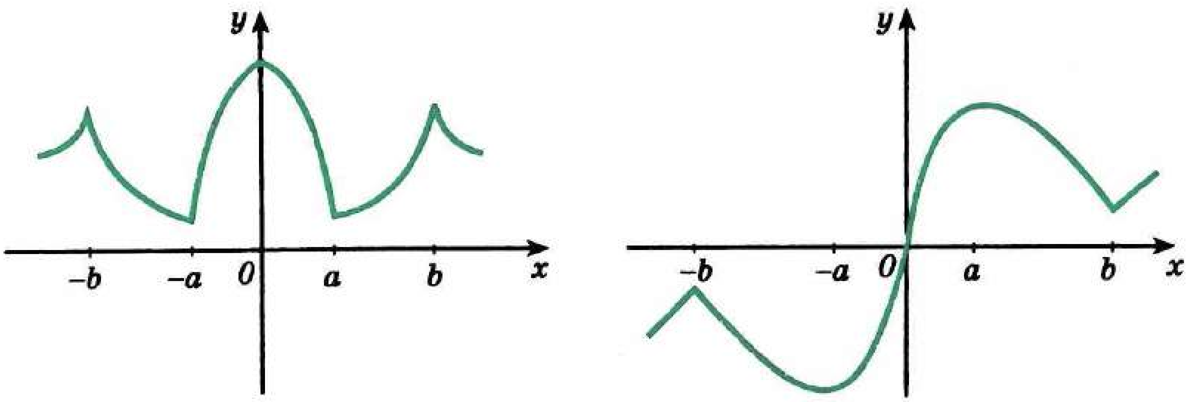
2 нче мисал. Әгәр $y = f(x)$ функциясе P күплегендә үссә, $y = -f(x)$ функциясе P күплегендә кимегәнлеген исбатлыйк. x_1 һәм x_2 P күплегендәге теләсә нинди ике сан һәм $x_2 > x_1$ булсын. $-f(x_2) < -f(x_1)$, ягъни $f(x_1) < f(x_2)$ икәнен исбатларга кирәк. Әмма бу — f функциясенең P күплегендә үсү шартының ачыктан-ачык нәтиҗәсе.

3 нче мисал. $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясе $(-\infty; 0)$ һәм $(0; \infty)$ аралыкларының һәркайсында кими (мөстәкыйль рәвештә исбатлагыз). Ләкин бу функция әлеге аралыкларның берләшмәсендә кимүче функция булмый. Мәсәлән, $1 > -1$, ләкин $f(1) > f(-1)$.

Функцияләрне үсүгә һәм кимүгә тикшергәндә, үсү һәм кимү аралыкларының максималь озынлыгын, чик нокталарны да кертеп (әгәр чик нокталар бу аралыкларга керсәләр, билгеле), күрсәтү кабул ителгән. Мәсәлән, $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясе $[2; 100]$ кисемтәсендә кими дип әйтергә мөмкин. Бу дөрес, ләкин мондый җавап тулы түгел.

Искәрмә. Җөп һәм так функцияләр өчен үсү һәм кимү аралыкларын табу мәсьәләсе берникадәр гадиләшә: бу аралыкларны $x \geq 0$ булганда табу җитә (40 нчы рәсем).

Мәсәлән, f функциясе җөп һәм $[a; b]$ аралыгында, монда $b > a \geq 0$ үссен, ди. Бу функциянең $[-b; -a]$ аралыгында кимегәнен исбатларбыз.



а) б)

40 нчы рәсем

Чыннан да, $-a \geqslant x_2 > x_1 \geqslant -b$ булсын. Ул вакытта $f(-x_2) = f(x_2)$, $f(-x_1) = f(x_2)$, шул ук вакытта $a \leqslant -x_2 < -x_1 \leqslant b$, һәм f функциясе $[a;\ b]$ да үсәнлектән, $f(-x_1) > f(-x_2)$, ягъни $f(x_1) > f(x_2)$.

2. Тригонометрик функцияләрнең үсүе һәм кимүе. Иң элек синусның $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$ аралыкларында үсүен исбатларбыз. Синус периодик булу сәбәпле, синусның $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ кисемтәсендә үсәнлеген исбатлау җитә. $x_2 > x_1$ булсын. Синусларның аермасы формуласын кулланып табабыз:

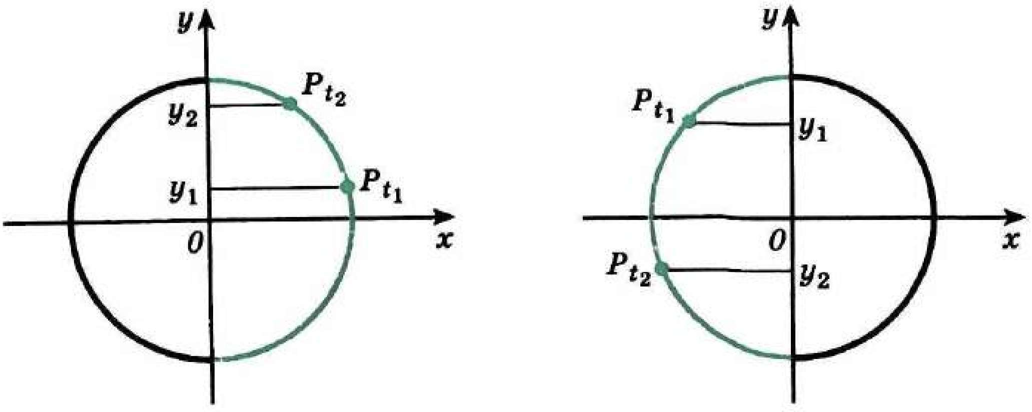
$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\sin\frac{x_2 - x_1}{2}. \qquad (1)$$

$-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ тигезсезлегеннән $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ һәм

$-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$ икәнлеге килеп чыга.

Шуңа күрә $\cos\frac{x_1 + x_2}{2} > 0$, $\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. (1) дән $\sin x_2 - \sin x_1$ аермасының уңай, ягъни $\sin x_2 > \sin x_1$ икәнлеге килеп чыга. Шуның белән синусның күрсәтелгән аралыкларда үсәнлеге исбатлана. Аналогия буенча $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$ аралыклары синусның кимү аралыклары булуы исбатлана.

Табылган нәтиҗәне берәмлек әйләнә ярдәмендә җиңел аңлатырга мөмкин икәнлеген әйтеп китәбез: әгәр $-\frac{\pi}{2} \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ булса, билгеле P_{t_2} ноктасының ординатасы P_{t_1} ноктасының ординатасыннан зуррак булыр (41 нче *а* рәсем). Әгәр $\frac{\pi}{2} \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \frac{3\pi}{2}$ булса, ул вакытта P_{t_2} ноктасынның ординатасы P_{t_1} ноктасы ординатасыннан кечерәк (41 нче *б* рәсем).



а) б)

41 нче рәсем

Косинусның үсү аралыклары — $[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$ (монда $n\in Z$) кисемтәләре, ә кимү аралыклары $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$ (монда $n\in Z$) кисемтәләре була. Синус өчен исбатлаган кебек үк диярлек исбатларга мөмкин. Китерү формуласы $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ дән файдалану гадирәк. Аннан турыдан-туры, мәсәлән, синусның үсү аралыкларын $\frac{\pi}{2}$ гә сулгарак күчерүдән табылган аралыклар косинусының үсү аралыклары булганлыгы килеп чыга.

Тангенс функциясенең $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, монда $n\in Z$ аралыкларында үскәнен исбатлыйк. Тангенс периодик булу сәбәпле, $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалы өчен исбатлау җитә.

x_1 һәм x_2 — шушы интервалдагы теләсә нинди саннар һәм $x_2>x_1$ булсын. $\operatorname{tg}x_2>\operatorname{tg}x_1$ икәнен исбатларга кирәк. Табабыз:

$$\operatorname{tg}x_2-\operatorname{tg}x_1=\frac{\sin x_2}{\cos x_2}-\frac{\sin x_1}{\cos x_1}=\frac{\sin x_2\cos x_1-\sin x_1\cos x_2}{\cos x_2\cos x_1}=\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1\cos x_2}.$$

Фараз итү буенча $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$. Шуңа күрә $\cos x_1>0$, $\cos x_2>0$. Ә $0<x_2-x_1<\pi$ булганлыктан, $\sin(x_2-x_1)>0$ була. Димәк, $\operatorname{tg}x_2-\operatorname{tg}x_1>0$, ягъни $\operatorname{tg}x_2>\operatorname{tg}x_1$, шуны исбатларга кирәк иде дә.

ctg функциясе $(\pi n;\ \pi+\pi n)$, монда $n\in Z$ аралыкларында кимегәнлеге аналогия буенча исбат ителә.

3. Экстремумнар. Функциянең кайбер нокта тирәсендә үз-үзен тотышын тикшергәндә тирәлек төшенчәсеннән файдалану уңай. a ноктасын эченә алган теләсә нинди интервал шул *a ноктасының тирәлеге* дип атала. Мәсәлән, (2; 6) интервалы — 3 ноктасы тирәлекләренең берсе, (−3,3; −2,7) интервалы — −3 ноктасының тирәлеге.

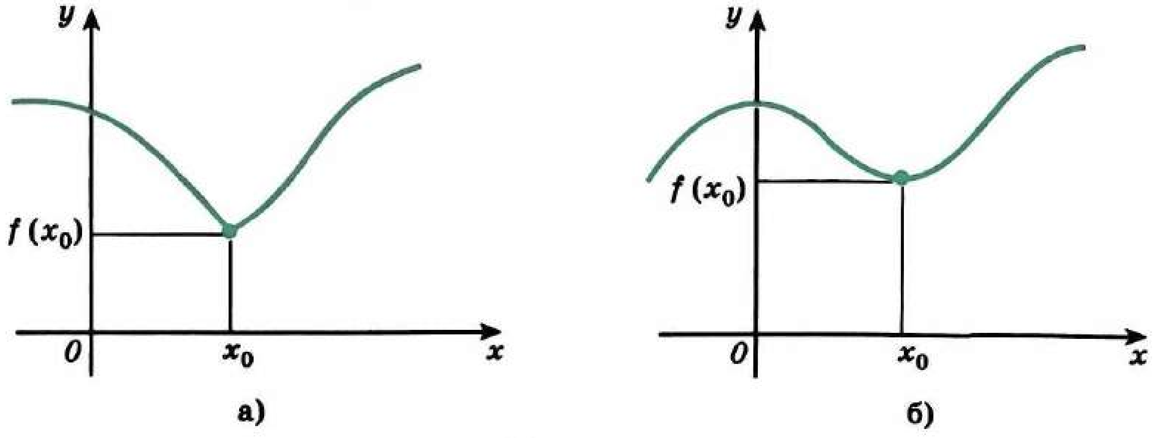
39 нчы рәсемдәге графикны өйрәнеп, шундый нәтиҗәгә килергә мөмкин: функциянең үсүе кимүгә алмашына торган x нокталары

(3 һәм 5 нокталары) яки, киресенчә, кимүе үсүгә алмашына торган нокталары (4 ноктасы) билгеләнү өлкәсенең иң «күренеп тора торган» нокталары була. Бу нокталарны тиңдәшле рәвештә *максимум нокталары* ($x_{max} = 3$ һәм $x_{max} = 5$) һәм *минимум нокталары* ($x_{min} = 4$) дип атыйлар.

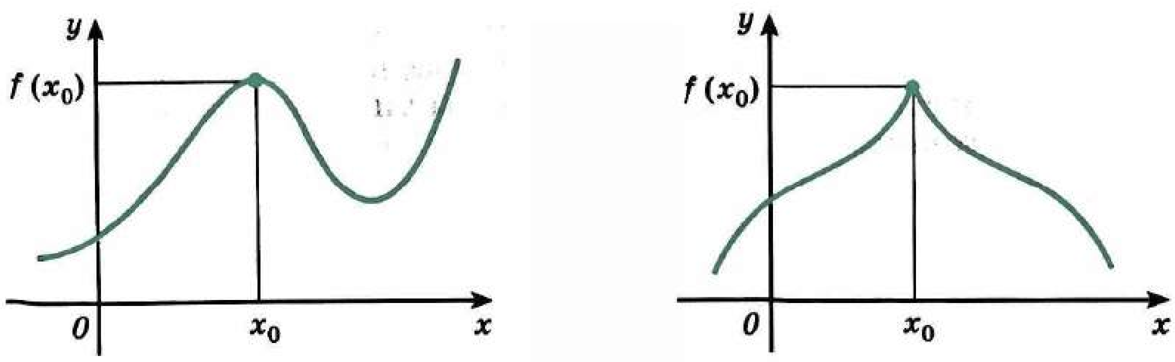
Нинди дә булса конкрет функциянең графигын төзегәндә башта аның шундый нокталарын табу файдалы. Мәсәлән, sin функциясе өчен бу — $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ рәвешендәге нокталар. Аныклык өчен $x_0 = \frac{\pi}{2}$ дип алыйк. Бу нокта синусның үсү аралыгының уң чиге була, һәм шуңа күрә, әгәр $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ булса, $1 = \sin x_0 > \sin x$. Моннан тыш, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ — кимү аралыгының сул чиге һәм, шулай булгач, $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ булганда $\sin x < \sin x_0$. Шулай итеп, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ноктасының $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ тирәлегендә яткан теләсә нинди x өчен $\sin\frac{\pi}{2} > \sin x$ һәм шуңа күрә $x_0 = \frac{\pi}{2}$ синус функциясенең максимум ноктасы була.

$-\frac{\pi}{2}$ ноктасында, киресенчә, функциянең кимүе үсүгә алмашына ($-\frac{\pi}{2}$ дән сулда функция кими, ә уңда үсә). Аналогик рәвештә фикер йөртеп, $-\frac{\pi}{2}$ ноктасының берникадәр тирәлегендә, $\sin x > \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ икәнен табабыз, һәм шуңа күрә $-\frac{\pi}{2}$ — синус функциясенең минимум ноктасы. Экстремум нокталарының төгәл билгеләмәләрен бирик.

> Билгеләмә **Әгәр x_0 ноктасының ниндидер тирәлегендәге барлык x өчен $f(x) > f(x_0)$ тигезсезлеге үтәлсә, x_0 ноктасы f функциясенең *минимум ноктасы* дип атала** (42 нче рәсем).



42 нче рәсем

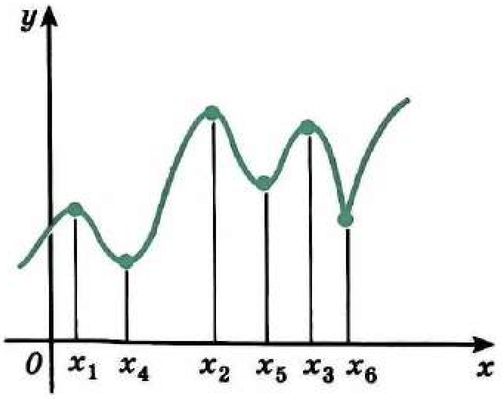


а) б)

43 нче рәсем

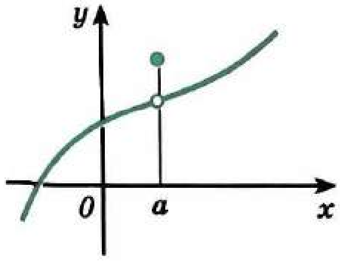
> Билгеләмә **Әгәр x_0 ноктасының ниндидер тирәлегендәге барлык x өчен $f(x) \leqslant f(x_0)$ тигезсезлеге үтәлсә, x_0 ноктасы f функциясенең *максимум ноктасы* дип атала (43 нче рәсем).**

Билгеләмә буенча f функциясенең максимум ноктасы x_0 дәге кыйммәте әлеге функция өчен шул нoктаның ниндидер тирәлегендәге кыйммәтләреннән иң зурысы була. Шуңа күрә функциянең x_0 тирәлегендәге графигы, кагыйдә буларак, шома «калкулык» (43 нче *а* рәсем һәм 44 нче рәсем — x_1, x_2, x_3 нокталары) яки очлы «тау түбәсе» (43 нче *б* рәсем) рәвешен ала. Минимум ноктасы тирәлегендә графиклар, кагыйдә буларак, шулай ук салмак (42 нче *б* рәсем — x_0 ноктасы, 44 нче рәсем — x_4, x_5 нокталары) яки текә төшкән «чокыр» (42 нче *а* рәсем — x_0 ноктасы һәм 44 нче рәсем — x_6 ноктасы) рәвешендә сурәтләнә.

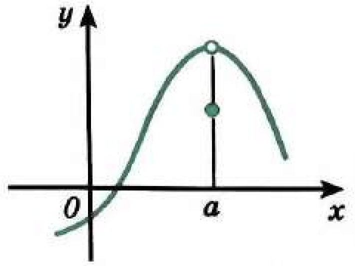


44 нче рәсем

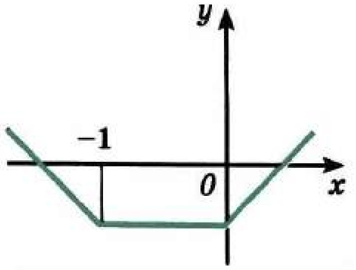
Функция графикларының максимум яки минимум нокталарында үз-үзләрен тотышларына башка мисаллар 45 нче (*а* — максимум ноктасы), 46 нчы (*а* — минимум ноктасы) һәм 47 нче (монда $(-1; 0)$ аралыгында һәр нокта минимум ноктасы да, максимум ноктасы да була) рәсемнәрдә китерелгән.



45 нче рәсем



46 нчы рәсем



47 нче рәсем

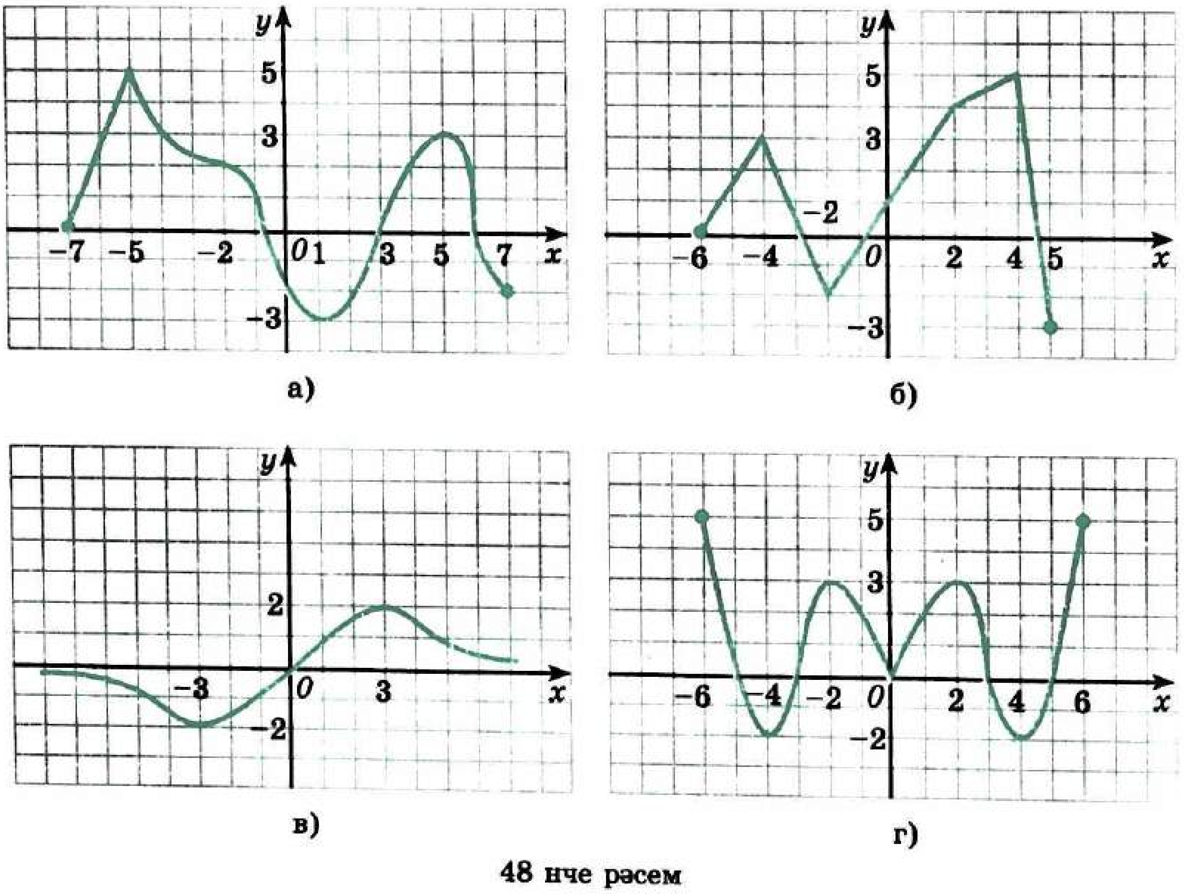
Функциянең максимум һәм минимум нокталары өчен гомуми атама кабул ителгән — аларны *экстремум нокталары* дип атыйлар. Функциянең бу нокталардагы кыйммәтләрен тиңдәшле рәвештә функциянең *максимумнары* һәм *минимумнары* дип атыйлар (гомуми атамасы — *функциянең экстремумы*). Максимум ноктасы x_{max} дип, ә минимум ноктасы x_{min} дип тамгалана. Функциянең бу нокталардагы кыйммәтләрен тиңдәшле рәвештә y_{max} һәм y_{min} дип тамгалыйлар.

Күнегүләр

77. — Графиклары 48 нче *а*—*г* рәсемнәрдә сурәтләнгән функцияләр өчен табыгыз:
а) функциянең үсү һәм кимү аралыкларын;
б) функциянең максимум һәм минимум нокталарын;
в) функциянең экстремумнарын.

Функция графигының эскизын сызыгыз (78—80).

78. а) f функциясе $(-\infty; 2]$ аралыгында үсә һәм $[2; \infty)$ аралыгында кими;
б) f функциясе $(-\infty; -2]$ һәм $[0; 3]$ аралыкларында үсә, $[-2; 0]$ һәм $[3; \infty)$ аралыкларында кими;
в) f функциясе $(-\infty; 1]$ һәм $[4; \infty)$ аралыкларында кими, $[1; 4]$ аралыгында үсә.



48 нче рәсем

79. а) $x_{max} = -3$, $x_{min} = 4$, $f(-3) = 5$, $f(4) = -5$;
б) $x_{min} = -2$, $x_{min} = 2$, $x_{max} = 0$,
$f(-2) = f(2) = -3$, $f(0) = 2$;
в) $x_{min} = -5$, $x_{max} = 2$, $f(-5) = 1$, $f(2) = 6$;
г) $x_{max} = -4$, $x_{max} = 3$, $x_{min} = -1$,
$f(-4) = 5$, $f(3) = 2$, $f(-1) = -2$.

80. а) f — җөп функция, $x_{max} = -3$, $x_{min} = 0$,
$f(-3) = 4$, $f(0) = 0$;
б) f — так функция, $x_{max} = 2$, $x_{min} = 5$,
$f(2) = 3$, $f(5) = -4$;
в) f — җөп функция, $x_{min} = 4$, $x_{max} = 0$,
$f(4) = -2$, $f(0) = 2$;
г) f — так функция, $x_{min} = -4$, $x_{max} = -1$,
$f(-4) = -3$, $f(-1) = 1$.

81. $y = kx + b$ функциясе а) $k > 0$ булганда R күплегендә үскәнен; б) $k < 0$ булганда R күплегендә кимегәнен исбатлагыз.

Функциянең үсү һәм кимү аралыкларын, максимум нокталарын, минимум нокталарын, аның максимумнарын һәм минимумнарын табыгыз (82—85).

82. а) $y = -x^2 + 6x - 8$; б) $y = (x + 2)^4 + 1$;
в) $y = x^2 - 4x$; г) $y = (x - 3)^4$.

83. а) $y = \frac{2}{x-2}$; б) $y = -(x + 3)^5$;
в) $y = -\frac{1}{x+3}$; г) $y = (x - 4)^3$.

84. а) $y = 3\sin x - 1$; б) $y = -2\cos x + 1$;
в) $y = 2\cos x + 1$; г) $y = 0,5\sin x - 1,5$.

85. а) $y = 1 + 2\operatorname{tg} x$; б) $y = \sin x + 1$;
в) $y = -\operatorname{tg} x$; г) $y = \cos x - 1$.

86. Саннарны чагыштырыгыз:
а) $\cos\frac{3\pi}{7}$ һәм $\cos\frac{2\pi}{9}$; б) $\sin\frac{5\pi}{7}$ һәм $\sin\frac{7\pi}{8}$;
в) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{7}$ һәм $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$; г) $\sin\frac{4\pi}{9}$ һәм $\sin\frac{3\pi}{9}$.

87. Саннарны үсә бару тәртибендә урнаштырыгыз:
а) $\sin 3,2$, $\sin 3,8$, $\sin 1,3$;
б) $\cos 0,9$, $\cos 1,9$, $\cos 1,3$;
в) $\operatorname{tg} 0,5$, $\operatorname{tg} 1,4$, $\operatorname{tg}(-0,3)$;
г) $\sin 1,2$, $\sin(-1,2)$, $\sin 0,8$.

Үсү һәм кимү аралыкларын, экстремум нокталарын һәм функциянең экстремумнарын табыгыз (88—89).

88.— а) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$; б) $y = 4|x| - x^2$;

в) $y = \frac{1}{(x+1)^3} - 2$; г) $y = x^2 - 2|x|$.

89.— а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = 2 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

90.— Саннарны үсә бару тәртибендә урнаштырыгыз:

а) $\cos\frac{25\pi}{9}$, $\sin\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$;

б) $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$, $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}$, $\mathrm{ctg}\frac{15\pi}{8}$, $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right)$;

в) $\mathrm{ctg}\frac{9\pi}{10}$, $\mathrm{ctg}\frac{12\pi}{5}$, $\mathrm{tg}\frac{6\pi}{5}$, $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{15}$;

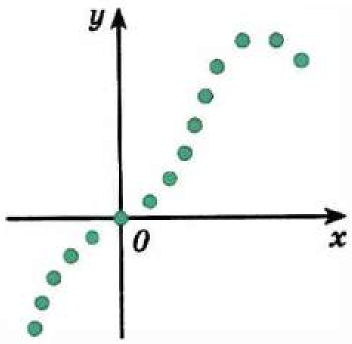
г) $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$, $\cos\frac{13\pi}{24}$, $\sin\frac{5\pi}{24}$, $\sin\frac{17\pi}{6}$.

91.— а) $f(x) = x^4 + 3x$ функциясе $[0; \infty)$ аралыгында үскәнен;
б) $f(x) = -x^3 - 2x$ функциясе R да кимегәнен;
в) $f(x) = x^6 - 0,5$ функциясе $(-\infty; 0]$ аралыгында кимегәнен;
г) $f(x) = x^5 + 1,5x$ функциясе R да үскәнен исбатлагыз.

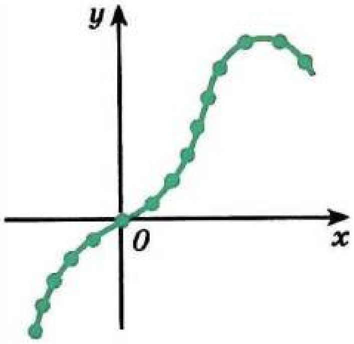
92.— Түбәндәге фаразларның дөреслеген исбатлагыз:
а) f — җөп функция, x_0 максимум ноктасы булса, ул вакытта $-x_0$ максимум ноктасы була;
б) f так функция булса һәм $[a; b]$ аралыгында кимесә, f функциясе $[-b; -a]$ аралыгында да кими;
в) f — так функция, x_0 минимум ноктасы булса, ул вакытта $-x_0$ ноктасы максимум ноктасы була;
г) f җөп функция булса һәм $[a; b]$ аралыгында үссә, ул $[-b; -a]$ аралыгында кими.

6. Функцияләрне тикшерү

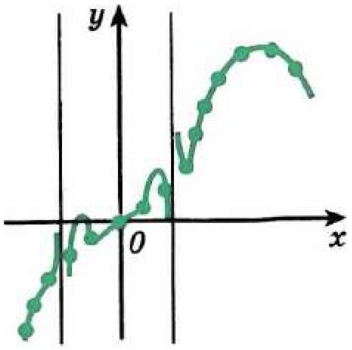
1. Функцияләрнең графикларын төзү. Элек сез функцияләрнең графикларын «нокталар буенча» төзедегез. Нокталар санын җитәрлек күп билгеләгәндә, билгеле, бу метод күп очракта яхшы нәтиҗәләр бирә. Ләкин бу вакытта функция кыйммәтләренең зур таблицаларын төзергә туры килә, ә иң мөһиме, функциянең әһәмиятле үзенчәлекләрен күрми калып, графикны төзүдә ялгыш җибәрергә мөмкин.



49 нчы рәсем



50 нче рәсем



51 нче рәсем

Мәсәлән, функциянең 15 ноктада кыйммәтләрен исәпләп һәм графикның тиңдәшле нокталарын координаталар яссылыгында билгеләп, без 49 нчы рәсемне таптык, ди. Графикның эскизы барлык бу нокталар аша үтүче өзлексез кәкрегә якын дип уйлау табигый (50 нче рәсем). Шулай да «чын» график (билгеле, шушы ук нокталар аша үтүче) бу эскизга бөтенләй охшамавы да мөмкин (51—53 нче рәсемнәр).

Ялгышулардан котылу өчен, функциянең үзенә генә хас үзенчәлекләрен ачыкларга, ягъни функцияне башта тикшерергә, өйрәнергә кирәк. Мәсәлән, f функциясе турында түбәндәгеләр билгеле булсын, ди:

— функция $(-\infty; -10)$, $(-10; 10)$, $(10; \infty)$ аралыкларының берләшмәсендә билгеләнгән;

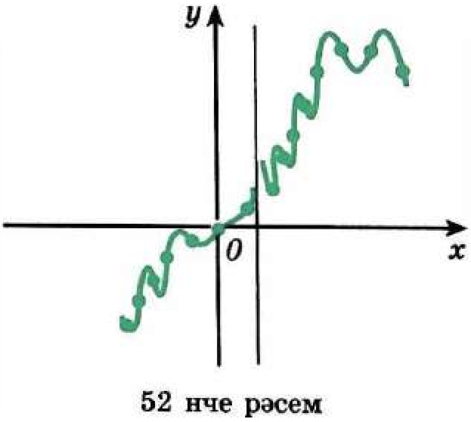
— функциянең кыйммәте -11 һәм 0 нокталарында нульгә әйләнә, $(-\infty; -11)$, $(-10; 0)$ интервалларында тискәре һәм $(-11; -10)$, $(0; 10)$ һәм $(10; \infty)$ интервалларында уңай;

— функция $(-\infty; -10)$ һәм $(-10; 10)$, $[12; 15]$ аралыкларында үсә һәм $(10; 12]$, $[15; \infty)$ аралыкларында кими;

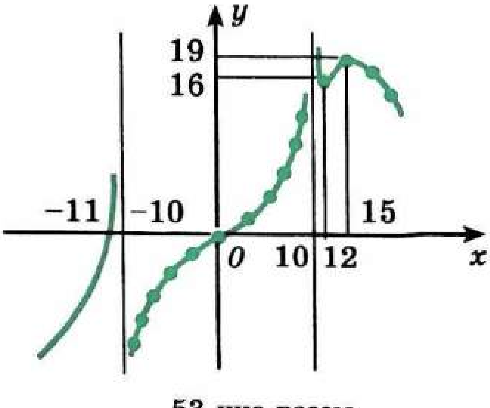
— функция 12 ноктасында минимумга ия, шул ук вакытта $f(12) = 16$ һәм 15 ноктасында максимумга ия, шул ук вакытта $f(15) = 19$;

— ниһаять, аргументның кыйммәтләре -10 га һәм 10 га якынлашканда, f ның кыйммәте абсолют зурлыгы буенча чиксез үсә.

Бу мәгълүматлар функция графигының эскизы 53 нче рәсемдә сурәтләнгәнчә диярлек булуын аңларга мөмкинлек бирә.



52 нче рәсем



53 нче рәсем

Тагын бер мисал карыйк: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ функциясен тикшерик.

1) Функциянең билгеләнү өлкәсен табабыз. Әлеге очракта $D(f)$ — барлык санлы туры, чөнки ваклаучы $x^2 + 1$ нульгә әйләнми.

2) f функциясенең җөп икәнен искәрәбез: теләсә нинди x өчен

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x).$$

Шуңа күрә функцияне тикшереп, аның $x \geqslant 0$ өчен графигын төзү җитә, аннары төзелгән графикны ординаталар күчәренә карата чагылдырасы гына кала.

3) f графигының координата күчәрләре белән кисешү нокталарын табабыз. f графигы ординаталар күчәрен $(0; f(0))$ ноктасында кисеп үтә. $f(0)$ нең кыйммәте 1 гә тигез. Шуңа күрә f графигы $(0; 1)$ ноктасы аша үтә.

f функциясе графигының, абсциссалар күчәре белән кисешү нокталарын табу өчен, $f(x) = 0$ тигезләмәсен чишәргә кирәк. (Аның тамырларын *функциянең нульләре* дип атыйлар). $\frac{1}{x^2+1} = 0$ тигезләмәсенең тамырлары юк. Димәк, f графигы абсциссалар күчәрен кисеп үтми.

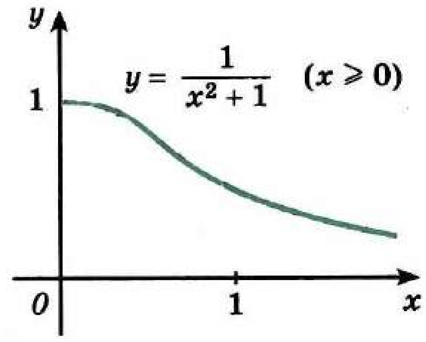
4) f функциясе нинди аралыкларда — уңай кыйммәтләр, нинди аралыкларда тискәре кыйммәтләр алганын ачыклыйк; аларны функциянең *даими тамга аралыклары* дип атыйлар. Бу аралыкларда функциянең графигы абсциссалар күчәреннән югарырак (тиңдәшле рәвештә түбәнрәк) ята. Әлеге очракта теләсә нинди x өчен $x^2 + 1$ нең кыйммәте уңай булганлыктан, барлык санлы турыда $f(x) > 0$.

5) Функциянең нинди аралыкларда үсүе яки кимүе турындагы мәгълүматлар графикны төзүне шактый җиңеләйтә (бу аралыкларны функциянең *үсү яки кимү аралыклары* дип атыйлар). Тикшерелә торган функция өчен $(-\infty; 0]$ — үсү аралыгы, ә $[0; \infty)$ кимү аралыгы икәнлеген исбатлыйк.

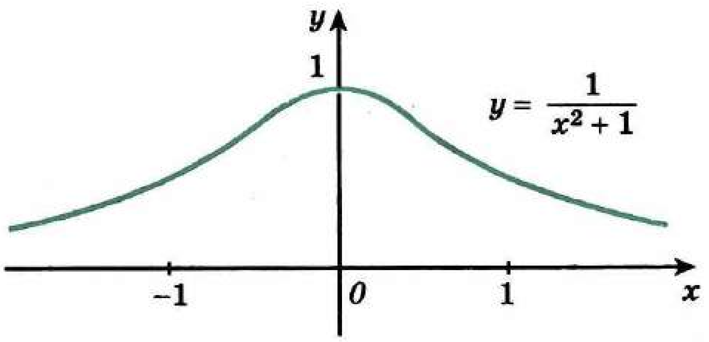
x_1 һәм x_2 саннары $[0; \infty)$ аралыгындагы ике кыйммәт, шул ук вакытта $x_2 > x_1$ булсын. x_1 һәм x_2 уңай саннар булганлыктан, $x_2 > x_1$ шартыннан $x_2^2 > x_1^2$; $x_2^2 + 1 > x_1^2 + 1$ һәм, ниһаять, $\frac{1}{x_2^2+1} < \frac{1}{x_1^2+1}$ икәнлеге килеп чыга. Шулай итеп, $f(x_2) < f(x_1)$, ягъни f функциясе $[0; \infty)$ аралыгында кими.

f функциясе $(-\infty; 0]$ аралыгында үсә. Исбатлау аналогик рәвештә башкарыла (шулай ук f ның җөплегеннән дә файдаланырга мөмкин).

6) Үсү кимүгә яки, киресенчә, кимү үсүгә алмашынган нокталарда функциянең кыйммәтләрен табабыз. Безнең очракта үсү арасына да, кимү арасына да керүче бары тик бер генә нокта



54 нче рәсем



55 нче рәсем

бар — ул 0 ноктасы. 0 ноктасы $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ функциясенең максимум ноктасы; $f(0) = 1$.

7) Ниһаять, x чикләнмәгән рәвештә үскәндә $x^2 + 1$ нең кыйммәте чикләнмәгән рәвештә үсүен һәм шуңа күрә $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ нең кыйммәтләре (уңай кала барып) нульгә якынлашканын искәрәбез.

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ функциясенең тикшерү барышында алынган үзлекләре аның графигын төзү өчен җитә.

Графикның (0; 1) ноктасын төзибез. Без $[0; \infty)$ — f функциясенең кимү аралыгы икәнен ачыкладык. Шуңа күрә 0 абсциссалы ноктадан уңдарак графикны «түбән таба юнәлгән» кәкре сызык рәвешендә сурәтлибез (54 нче рәсем). Теләсә нинди x өчен $f(x) > 0$ булганлыктан, бу кәкре абсциссалар күчәреннән түбән төшә алмый, шул ук вакытта (7 нче пункттагы тикшерүне карагыз) графикны уңга дәвам иткәндә, ул абсциссалар күчәренә чиксез якыная. f функциясенең җөп булуыннан файдаланасы калды: $x \geqslant 0$ өчен төзелгән кәкрене ординаталар күчәренә карата симметрияле чагылдырып, f функциясенең графигын табабыз (55 нче рәсем).

2. Функцияләрне тикшерү схемасы. Функцияләрне тикшергәндә без тасвирланган схема буенча эш итәрбез. Гомуми очракта тикшерү түбәндәге мәсьәләләрне карауны күз алдында тота:

1) Бирелгән f функциясенең билгеләнү һәм кыйммәтләре өлкәләрен табарга.

2) Функция тикшерүне җиңеләйтә торган үзенчәлекләргә ияме икәнен, ягъни f функциясе: а) җөп яки так; б) периодикмы икәнен ачыкларга.

3) Графикның координата күчәрләре белән кисешү нокталарының координатларын исәпләп чыгарырга.

4) f функциясенең тамгасы даими булган аралыкларны табарга.

5) f функциясенең нинди аралыкларда үскәнен, нинди аралыкларда кимегәнен ачыкларга.

6) Экстремум нокталарын табарга, экстремумның төрен (максимум яки минимум) билгеләргә һәм бу нокталарда f ның кыйммәтен исәпләп чыгарырга.
7) Билгеләнү өлкәсенә кермәгән үзенчәлекле нокталар тирәлегендә (мәсәлән, $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясе өчен $x=0$ ноктасы) һәм аргумент модуле буенча зур кыйммәткә ия булганда f функциясенең үз-үзен тотышын тикшерергә.

Бу планның якынча характерда булуын истә тотарга кирәк. Әйтик, абсциссалар күчәре белән кисешү нокталарын табу өчен, $f(x)=0$ тигезләмәсен чишәргә кирәк, ә без аны хәтта, мәсәлән, $f(x)$ бишенче дәрәҗәдәге күпбуын булса да чишә белмибез. (Дөрес, күп очракларда андый тигезләмәнең тамырлары санын һәм тамырларның үзен теләсә нинди төгәллек белән табу методлары бар.) Шуңа күрә еш кына тикшерүнең теге яки бу этабын төшереп калдырырга туры килә. Шулай да функцияне тикшерү барышында мөмкин кадәр әлеге схеманы сакларга киңәш ителә.

Функциянең үсү (кимү) аралыкларын һәм экстремум нокталарын эзләү, кагыйдә буларак, функцияне тикшерүнең иң авыр этаплары булып тора. Киләсе бүлектә сез мондый мәсьәләләрне чишүнең математик анализ методларын куллануга нигезләнгән гомуми методлары белән танышырсыз.

▶ f функциясенең графигы чикләнмәгән рәвештә якынлаша торган вертикаль турыларны (мәсәлән, $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясе өчен $x=0$ турысын яки 53 нче рәсемдә сурәтләнгән функциянең графигы өчен $x=\pm 10$ турысын) *вертикаль асимптоталар* дип атыйлар.

Әгәр функция вакланма рәвешендә булып, ваклаучысы a ноктасында нульгә әйләнсә, ә санаучысы нуль булмаса, мондый очракта график еш кына $x=a$ вертикаль асимптотасына ия була. Мәсәлән, $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясенең графигы $x=0$ вертикаль асимптотасына ия. $f(x)=\operatorname{tg} x$ функциясенең графигы өчен $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, монда $n\in Z$ турылары вертикаль асимптоталар булалар.

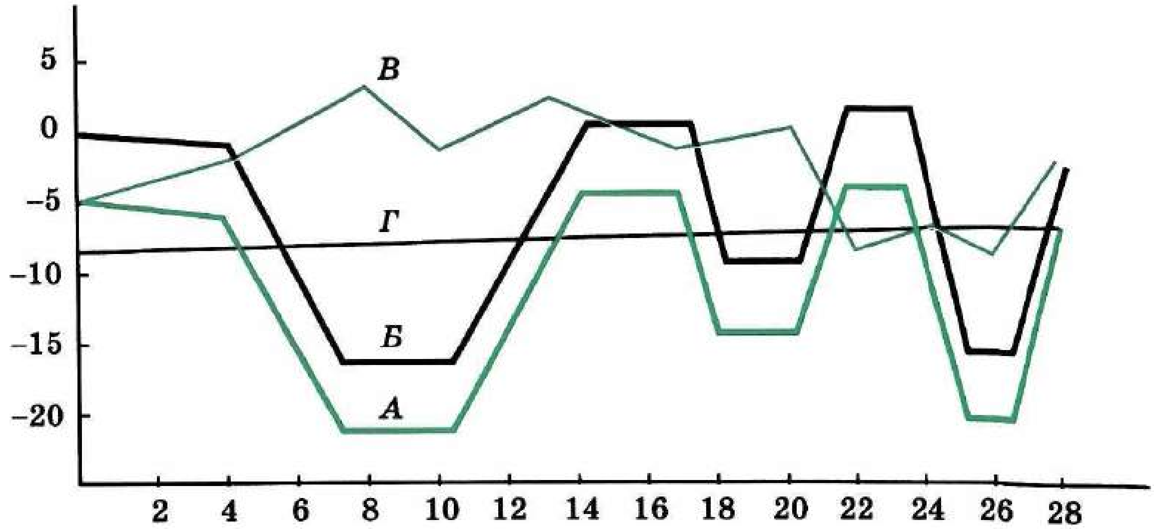
Әгәр x модуле буенча чикләнмәгән рәвештә үскәндә функциянең графигы чикләнмәгән рәвештә ниндидер горизонталь ($f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ функциясе очрагында бу $y=0$ турысы, 55 нче рәсемне карагыз) яки авыш ($f(x)=x+\frac{1}{x}$ функциясе графигы өчен $y=x$ турысы, 32 нче рәсемне карагыз) турыга якынлашса, андый турыны *горизонталь* (тиңдәшле рәвештә *авыш*) *асимптота* дип атыйлар.

3. Графикларны «уку». Функцияләрнең графикларын төзүгә югарыда тикшерелгән мисал һәм мәсьәләләрнең күбесендә сез мондыйрак хәлләр белән очраштыгыз: функция формула белән бирелгән, аның үзлекләрен тикшереп, f ның графигын төзергә.

Икенче мәсьәлә дә практик яктан шактый кызыклы: бирелгән графигы ярдәмендә f функциясенең төп үзлекләрен санап чыгу таләп ителә.

Моңа охшаш мәсьәләләр эксперименталь тикшерүләр барышында еш чишелә. Бу вакытта графикларны төзү төрле методлар белән тормышка ашырыла. Мәсәлән, эксперименталь юл белән табылган нокталар буенча. Шулай ук күп санлы үзьязгыч приборлар да бар. Мәсәлән, осциллографлар аларның экраннарында электр тирбәнешләре күрсәтмәле график сурәткә әверелә. Күрсәтмәле график язылышны алырга мөмкинлек бирә торган икенче бер прибор — кардиограф; аның ярдәмендә алынган кардиограмманы укып, врачлар йөрәк эшчәнлегенең торышы турында нәтиҗә ясыйлар.

Язу өчен төгәл теориясе булдырылмаган реаль процессларны тикшергәндә килеп чыга торган авырлыкларның шактый типик мисалы белән сез 56 нчы рәсемне карап таныша аласыз. Монда 1974 елның февралендә Мәскәү өлкәсе өчен тәүлек дәвамында уртача температура үзгәрешләренең графигы китерелгән. Калын сызык белән һава торышының озак срокка исәпләнгән прогноз нәтиҗәләрен күрсәтүче *А* һәм *Б* «теоретик кәкреләре» сурәтләнгән (прогноз 5° ка кадәр төгәллек белән бирелгәнгә күрә, кәкреләр ике). Бу графикны «укып», без, мәсәлән, өч «салкынаю дулкыны» күтелүен күрәбез (4 еннән 10 ына кадәр, 17 сеннән 19 ына кадәр һәм 23 еннән 26 сына кадәр). Шулай ук җепшек көннәр көтелми, тулаем һава торышы салкынча (−17°...−22°) булачак дип уйланылган. Чынлыкта исә (фактик температура үзгәрешенең графигы *В* нәзек сызыгы белән сурәтләнгән) температура нормадан 5—10° ка югарырак була (күпьеллык күзәтүләр нәтиҗәсендә барлыкка



56 нчы рәсем

килгән климатик норма Γ сызыгы белән бирелгән), 4 еннән 8 нче февральгә кадәр салкынаю түгел, ә җылыну күзәтелә һ. б. Прогноз турында бу һәм башка мәгълүматларны һәм реаль картинаны сез 56 нчы рәсемдә китерелгән графикларны «укып» белә аласыз.

Күнегүләр

93.— График белән бирелгән функцияне (57 нче рәсем) гомуми схема буенча тикшерегез.

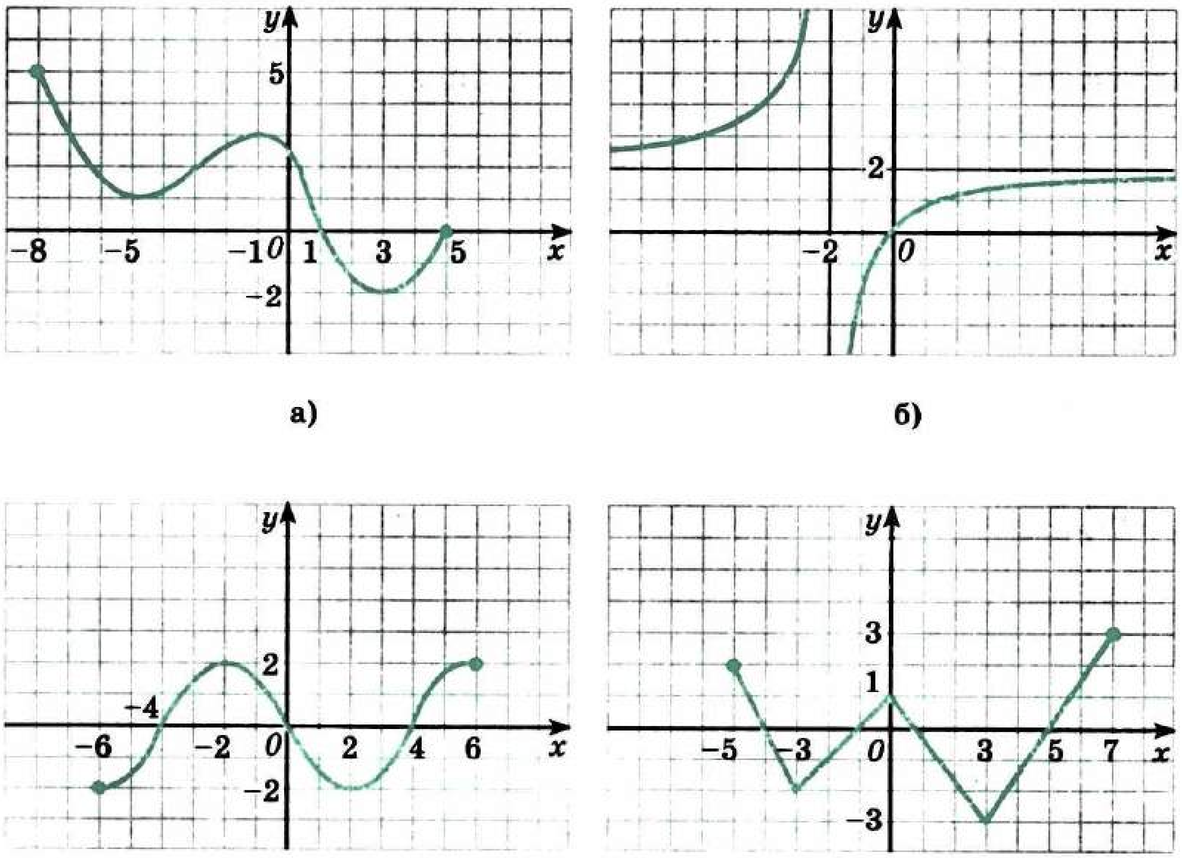
94.— f функциясенең үзлекләре билгеле булганда (55 нче биттәге таблицаны карагыз), функциянең графигын төзегез:

Һәр функцияне гомуми схема буенча тикшерегез һәм аның графигын төзегез (95—99).

95.— а) $f(x) = 5 - 2x$; б) $f(x) = 3 - 2x - x^2$;
в) $f(x) = 3x - 2$; г) $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

96.— а) $f(x) = \frac{1}{x} - 2$; б) $f(x) = -(x-3)^4$;
в) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; г) $f(x) = x^3 - 1$.

97.— а) $f(x) = \sqrt{x-3}$; б) $f(x) = 4x - x^2$;
в) $f(x) = \sqrt{x+1}$; г) $f(x) = 4 - x^2$.



а) б) в) г)

57 нче рәсем

	Функциянең үзлекләре	а)	б)	в)	г)
1	Билгеләнү өлкәсе Кыйммәтләре өлкәсе	[−6; 6] [−2; 5]	[−5; 4] [0; 6]	[−4; 4] [−3; 6]	[−5; 3] [0; 5]
2	Графикның кисешү нокталары: а) Ox күчәре белән б) Oy күчәре белән	$A(-4; 0)$, $B(-2; 0)$ $C(0; 2{,}5)$	$O(0; 0)$	$A(-4; 0)$, $B(-1; 0)$, $C(2{,}5; 0)$ $D(0; -2)$	$A(3; 0)$ $B(0; 4{,}5)$
3	Даими тамга аралыклары: а) $f(x) > 0$ б) $f(x) < 0$	[−6; −4), (−2; 6] (−4; −2)	[−5; 0), (0; 4] —	(−4; −1), (2,5; 4] (−1; 2,5)	[−5; 3) —
4	Аралыклар: а) үсү б) кимү	[−3; 1], [4; −6] [−6; −3], [1; 4]	[−5; −2], [0; 4] [−2; 0]	[−4; −2], [1; 4] [−2; 1]	[−3; 1] [−5; −3], [1; 3]
5	Максимум нокталары, функциянең максимумы. Минимум нокталары, функциянең минимумы	1, $f(1) = 3$ −3, $f(-3) = -2$ 4, $f(4) = 1$	−2, $f(-2) = 2$ 0, $f(0) = 0$	−2, $f(-2) = 2$ 1, $f(1) = -3$	1, $f(1) = 5$ −3, $f(-3) = 2$
6	Графикның астама нокталары	$f(-6) = 3$ $f(6) = 5$	$f(-5) = 0{,}5$ $f(4) = 6$	$f(4) = 6$	$f(-5) = 3$

Һәр функцияне гомуми схема буенча тикшерегез һәм аның графигын төзегез (98—99).

98. а) $f(x) = x^4 + 4x^2$; б) $f(x) = 1 - \sqrt{x + 4}$;
в) $f(x) = x^3 + x$; г) $f(x) = \sqrt{x - 2} - 2$.

99. а) $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$; б) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$;
в) $f(x) = |x| - x^2$; г) $f(x) = \frac{2x+1}{x}$.

7. Тригонометрик функцияләрнең үзлекләре. Гармоник тирбәнешләр

1. Тригонометрик функцияләрне тикшерү. Тикшерелә торган функцияләрнең үзлекләрен үткән пунктта китерелгән схема буенча язу уңай. Синус, косинус, тангенс, котангенс функцияләренең сезгә инде таныш булган үзлекләрен таблицада туплап бирик. (Һәркайда $n \in Z$ дип уйланыла.)

	Функция			
	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f(x) = \operatorname{ctg} x$
1.1	R	R	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$(\pi n; \pi + \pi n)$
1.2	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	R	R
2.1	Так	Җөп	Так	Так
2.2	2π	2π	π	π
3.1	$(\pi n; 0)$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$	$(\pi n; 0)$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$
3.2	$(0; 0)$	$(0; 1)$	$(0; 0)$	Юк
4.1	$(2\pi n; \pi + 2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
4.2	$(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$
5.1	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	Юк
5.2	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$	Юк	$(\pi n; \pi + \pi n)$
6.1	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\pi + 2\pi n$	Юк	Юк
6.2	-1	-1	Юк	Юк
6.3	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$2\pi n$	Юк	Юк
6.4	1	1	Юк	Юк

Таблицада f функциясенең үзлекләрен түбәндәгечә номерлап бирү кабул ителгән:

1.1 — билгеләнү өлкәсе;

1.2 — кыйммәтләре өлкәсе;

2.1 — җөплек (таклык);
2.2 — иң кечкенә уңай период;
3.1 — f графигының Ox күчәре белән кисешү нокталарының координаталары;
3.2 — f графигының Oy күчәре белән кисешү нокталарының координаталары;
4.1 — f уңай кыйммәтләр алган аралыклар;
4.2 — f тискәре кыйммәтләр алган аралыклар;
5.1 — үсү аралыклары;
5.2 — кимү аралыклары;
6.1 — минимум нокталары;
6.2 — функциянең минимумнары;
6.3 — максимум нокталары;
6.4 — функциянең максимумнары.

Тригонометрик функцияләрнең үзлекләре мәсьәләләр чишкәндә еш кулланыла.

1 нче мисал. $\sin(-1)$, $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\sin 4$ саннарын үсә бару тәртибендә урнаштырыйк.

Китерү формулаларын файдаланып, бу саннарның аргумент кыйммәтләре синусның бер үсү аралыгыныкы — $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кисемтәсенеке булырлык күренештә язабыз:

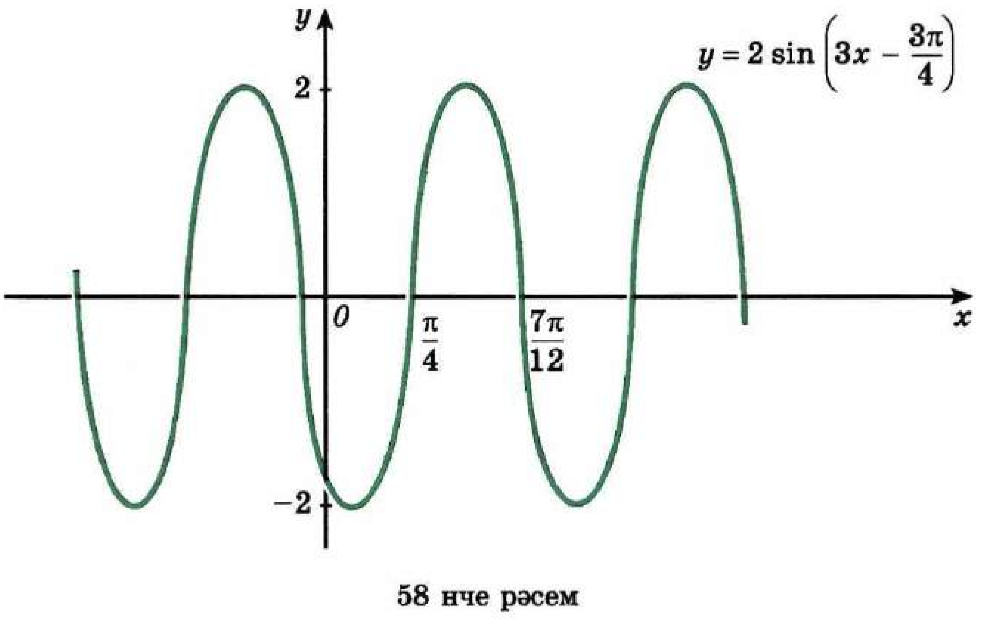
$$\sin 2 = \sin(\pi - 2),\ \sin 3 = (\pi - 3),\ \sin 4 = (\pi - 4).$$

$$-\frac{\pi}{2} < -1 < \pi - 4 < \pi - 3 < 1 < \pi - 2 < \frac{\pi}{2}$$

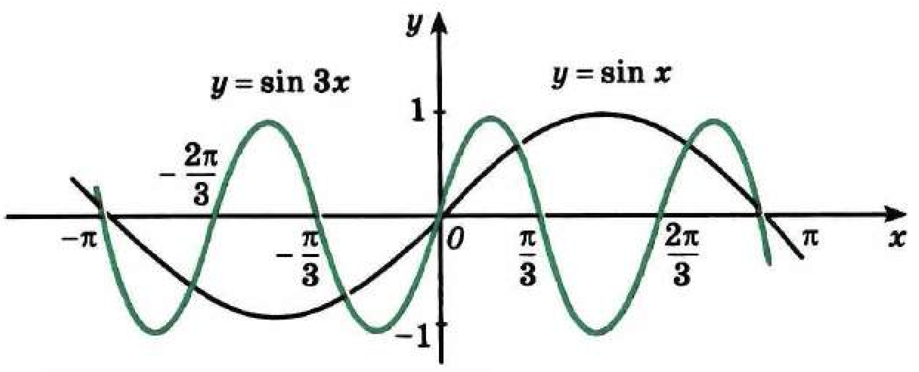
икәнлеге ачык, шуңа күрә

$$\sin(-1) < \sin(\pi - 4) < \sin(\pi - 3) < \sin 1 < \sin(\pi - 2).$$

Димәк, $\sin(-1) < \sin 4 < \sin 3 < \sin 1 < \sin 2$.



58 нче рәсем



59 нчы рәсем

$f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$ функциясенең графигын карыйк (58 нче рәсем). Ул түбәндәге эзлеклелектә үзгәртүләр ярдәмендә табыла:

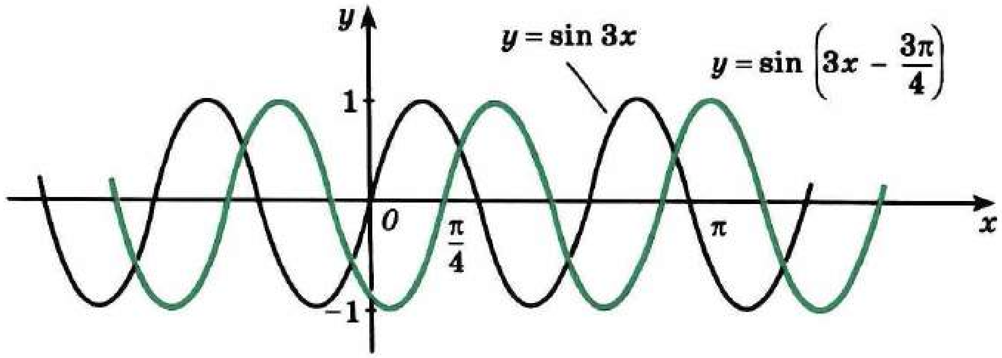
а) $y = \sin x$ функциясенең графигын абсциссалар күчәре буйлап 3 тапкырга кысып, $y = \sin 3x$ функциясенең графигын табабыз (59 нчы рәсем).

б) $y = \sin 3x$ функциясенең графигын $\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ векторга күчереп, $y = \sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, ягъни $y = \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$ функциясенең графигын табабыз (60 нчы рәсем).

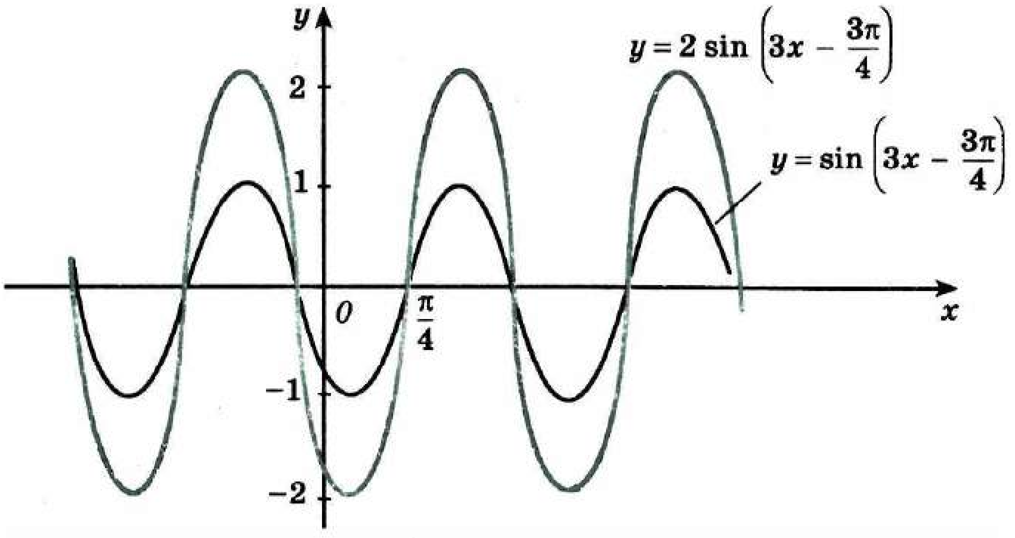
в) $y = \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$ функциясенең графигын ординаталар күчәре буйлап 2 тапкырга сузып, $y = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$ функциясенең графигын табабыз (61 нче рәсем).

3 нче пунктта өйрәнелгән үзгәртүләрдә кәкренең «форма»сы саклана (хәрәкәттәге һәм охшаш үзгәртүләрдәге кебек). Шуңа күрә синусның графигын гына түгел, бәлки аңардан ординаталар күчәре буйлап кысу (сузу), ә аннан соң хәрәкәт яки охшаш үзгәртү ярдәмендә табылган теләсә нинди кәкрене дә синусоида дип атыйлар. Шушы ук искәрмә башка кәкре, мәсәлән, парабола яки гипербола өчен дә дөрес.

$f(x) = A\sin(kx + b)$ һәм $f(x) = A\cos(kx + b)$ рәвешендәге функцияләрнең үзлекләре синусның (яки косинусның) үзлекләренә аналогик булу андый функцияләрне чагыштырмача тиз тикшерергә: иң мөһиме, аларның периодларын һәм кыйммәтләре 0 гә һәм ± A га тигез булган нокталарны табарга мөмкинлек бирә.



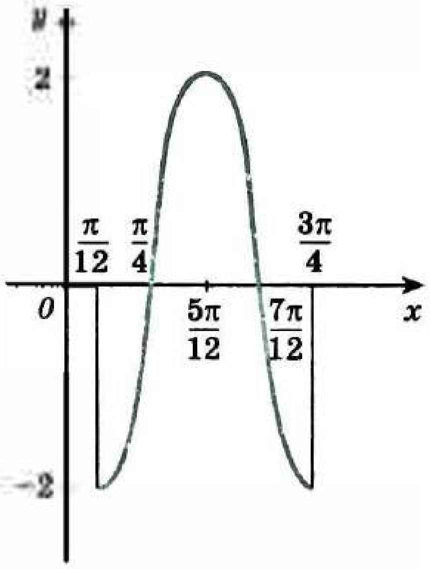
60 нчы рәсем



61 нче рәсем

2 нче мисал. $f(x)=2\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$ функциясен тикшереп, аның графигын төзик.

f функциясенең периоды $\frac{2\pi}{3}$ кә тигез (4 нче пунктны карагыз). Синус πn, $n\in Z$ күренешендәге нокталарда нульгә әйләнә, шуңа күрә $3x-\frac{3\pi}{4}=\pi n$, ягъни $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$ булганда $f(x)=0$. Аннары $f(x)=-2$ һәм $f(x)=2$ тигезләмәләрен чишеп табабыз: $3x-\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ булганда $\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)=-1$, моннан $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$ $3x-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ булганда $\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)=1$, моннан $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}$ $n\in Z$. Табылган нокталарны абсциссалар күчәрендә билгелибез. Озынлыгы периодка тигез булган кисемтәне карау җитә. Әлеге очракта сул очы функциянең минимум ноктасы булган $\left[\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{4}\right]$ кисемтәсен алу уңайлы (62 нче рәсем). Аннары f функциясенең $\left[\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right]$ кисемтәсендә −2 дән 2 гә кадәр үсүче, $\left[\frac{5\pi}{12};\frac{3\pi}{4}\right]$ кисемтәсендә 2 дән −2 гә кадәр кимүче графигын төзибез. Бу вакытта график абсциссалар күчәрен $\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ һәм $\left(\frac{7\pi}{12};0\right)$ нокталарында кисеп үтәргә тиеш. f функциясенең барлык санлы турыдагы графигының эскизы 62 нче рәсемдәге графигын абсциссалар күчәре буйлап $\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$ кисемтәгә күчереп табыла (58 нче рәсем).



62 нче рәсем

2. Гармоник тирбәнешләр.

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1)$$

яки

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

законы буенча үзгәрә торган зурлыклар физикада мөһим роль уйный. Мәсәлән, пружинага эленгән шарчыкның координатасы шундый закон буенча үзгәрә (149 нчы рәсем). Шарчык *гармоник тирбәнешләр* ясый, диләр.

(2) функциясен дә (1) функциясе рәвешендә язарга мөмкин:

$$A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

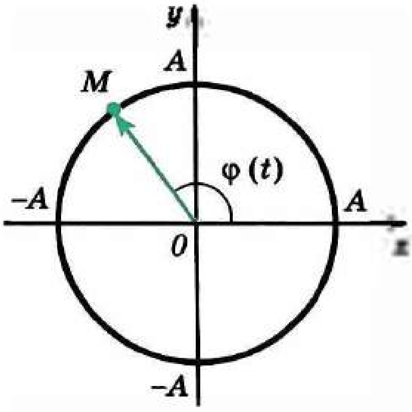
(1) тирбәнешен тулысынча билгели торган A, ω һәм φ параметрлары махсус атамаларга ия: A — *тирбәнүнең амплитудасы*, ω — *тирбәнүнең циклик* (яки әйләнү) *ешлыгы*, φ — *тирбәнүнең башлангыч фазасы* (гадәттә, $\varphi \in [0; 2\pi]$ аралыгында алына).

$A\sin(\omega t + \varphi)$ һәм $A\cos(\omega t + \varphi)$ функцияләренең $\frac{2\pi}{\omega}$ га тигез периодын *гармоник тирбәнү периоды* дип атыйлар.

(1) һәм (2) функцияләренең үзлекләрен — механикадан алынган түбәндәге мисал өстендә аңлатып бирү уңай. M ноктасы $R = A$ радиуслы әйләнә буенча ω почмакча тизлеге белән ($\omega > 0$ булганда сәгать йөрешенә каршы, ә $\omega < 0$ булганда сәгать йөреше уңаена) тигез хәрәкәт итсен, ди. Шул ук вакытта башлангыч вакыт моменты $t = 0$ дә $\overline{OM}$ векторы абсциссалар күчәренең уңай юнәлеше белән φ почмагы төзи (63 нче рәсем). t ның түбәндәге ике функциясен — ноктаның абсциссалар һәм ординаталар күчәрләренә проекцияләренең координаталарын — $x(t)$ һәм $y(t)$ функцияләрен карыйк.

t вакыт моментында $\overline{OM}$ векторы Ox күчәренең уңай юнәлеше белән $\varphi(t)$ почмагын төзи, шул ук вакытта әйләнә буенча тигез хәрәкәт законына таянып язабыз: $\varphi(t) = \varphi + \omega t$. Синус һәм косинус функцияләренең билгеләмәләре буенча

$$x(t) = A\cos(t), \text{ ягъни } x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$
$$y(t) = A\sin(t), \text{ ягъни } y(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$



63 нче рәсем

Бу функцияләрнең үзлекләрен кинематикага нигезләнеп өйрәнербез. Аларның периоды нокта бер әйләнеш ясаган вакыт T га тигез икәнлеге ачык. Әйләнәнең озынлыгы $2\pi A$ га тигез, ә ноктаның сызыкча тизлеге $v = \omega A$, шуңа күрә

$$T = \frac{2\pi A}{v} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

M ноктасы уң чик торышны, алган вакыт моментларының берсе t_0 не карыйк. Ул вакытта $x(t_0) = A$, $y(t_0) = 0$.

Вакытның шушы моментыннан башлап $x(t)$ функциясе бер-бер артлы периодның беренче яртысында A дан $-A$ га кадәр кимер һәм периодның икенче яртысында $-A$ дан A га кадәр үсәр. Бу вакытта $x(t)$ функциясенең максимум нокталары ул ноктаның уң чик торышны алган вакыт моментлары булыр, минимум нокталары — сул чик торышка, ә нульләр югарыгы һәм түбәнге торышларга туры килерләр.

$y(t)$ функциясе дә аналогик үзлекләргә ия: аның максимум һәм минимум нокталары — әйләнәдә нокталарның югарыгы һәм түбәнге торышларына, ә нульләр уң һәм сул торышларына туры килер.

$A = 1$, $\omega = 1$ һәм $\varphi = 0$ булганда, $x(t)$ һәм $y(t)$ функцияләренең тиндәшле рәвештә $\cos t$ һәм $\sin t$ га тигез икәнен билгеләп үтәбез. Ноктаның берәмлек әйләнә буйлап тиңдәшле хәрәкәтен карап, бу функцияләрнең үзегезгә таныш үзлекләрен җиңел чыгарып булуына мөстәкыйль рәвештә тикшереп ышаныгыз.

Күнегүләр

100.— Тригонометрик функцияләрнең үзлекләреннән файдаланып, аңлатманы шул ук тригонометрик функциянең иң кечкенә уңай аргументының аңа тигез кыйммәте белән алмаштырыгыз:

а) $\operatorname{tg}\frac{18\pi}{5}$, $\sin\frac{28\pi}{3}$; б) $\cos\left(-\frac{15\pi}{8}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{5}\right)$;

в) $\sin\left(-\frac{14\pi}{5}\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{15\pi}{8}\right)$; г) $\cos\left(\frac{20\pi}{7}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{35\pi}{9}\right)$.

101.- Функциянең билгеләнү өлкәсен һәм кыйммәтләре өлкәсен табыгыз:

а) $f(x) = 3\cos 2x - 1$; б) $f(x) = 2 - \operatorname{ctg} 3x$;

в) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $f(x) = 1 + 0{,}5\sin\frac{x}{2}$.

102.- Функциянең даими тамга аралыкларын һәм нульләрен табыгыз:

а) $f(x) = -\sin 3x$; б) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{2x}{3}$;

в) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$; г) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$.

103.- Функциянең үсү, киму аралыкларын, максимум һәм минимум нокталарын табыгыз:

а) $f(x) = 4\cos 3x$; б) $f(x) = 0{,}5\operatorname{ctg}\frac{x}{4}$;

в) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; г) $f(x) = 0{,}2\sin 4x$.

Функцияне тикшерегез һәм аның графигын төзегез (104—105).

104. — а) $f(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$; б) $f(x) = -2\sin 2x$;

в) $f(x) = -1,5\cos 3x$; г) $f(x) = 3\sin\frac{x}{2}$.

105. — а) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$; б) $f(x) = -3\cos\frac{3x}{2}$;

в) $f(x) = -2\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$; г) $f(x) = 2,5\sin\frac{4x}{3}$.

106. — **Хәрәкәт итүче җисемнең координатасы (сантиметрларда үлчәнгән) күрсәтелгән закон буенча үзгәрә. Тирбәнүнең амплитудасын, периодын, ешлыгын табыгыз. Түбәндәге бирелмәләр өчен җисемнең t_1 вакыт моментындагы координатасын исәпләп чыгарыгыз:**

а) $x(t) = 3,5\cos 4\pi t$, $t_1 = \frac{1}{12}$ с;

б) $x(t) = 5\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, $t_1 = 4,5$ с;

в) $x(t) = 1,5\cos 6\pi t$, $t_1 = 1\frac{1}{3}$ с;

г) $x(t) = 0,5\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$, $t_1 = 8$ с;

107. — Ток зурлыгы түбәндәге закон буенча үзгәреп торганда (ток зурлыгы — амперларда, вакыт секундларда үлчәнгән), аның амплитудасын, периодын, ешлыгын табыгыз:

а) $I(t) = 0,25\sin 50\pi t$; б) $I(t) = 5\sin 20\pi t$;

в) $I(t) = 0,5\sin 10\pi t$; г) $I(t) = 3\sin 30\pi t$.

108. — **Көчәнеш түбәндәге закон буенча үзгәреп торганда (көчәнеш — вольтларда, вакыт секундларда үлчәнгән), аның амплитудасын, периодын һәм ешлыгын табыгыз:**

а) $U(t) = 220\cos 60\pi t$; б) $U(t) = 110\cos 30\pi t$;

в) $U(t) = 360\cos 20\pi t$; г) $U(t) = 180\cos 45\pi t$.

109. — Саннарны үсә бару тәртибендә урнаштырыгыз:

а) $\cos 4$, $\cos 7$, $\cos 9$, $\cos(-12,5)$;

б) $\operatorname{tg}(-8)$, $\operatorname{tg} 1,3$, $\operatorname{tg} 4$, $\operatorname{tg} 16$;

в) $\sin 6,7$, $\sin 10,5$, $\sin(-7)$, $\sin 20,5$;

г) $\operatorname{ctg} 3,5$, $\operatorname{ctg}(-9)$, $\operatorname{ctg} 5$, $\operatorname{ctg} 15$.

110. — **Функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз:**

а) $y = \frac{1}{1 - \sin x}$; б) $y = \sqrt{\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}}$;

в) $y = \frac{1}{\cos x - 1}$; г) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$.

111.— **Функциянең кыйммәтләре өлкәсен табыгыз:**

а) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$; б) $y = \frac{3}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$;

в) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$; г) $y = \frac{2}{1 + \mathrm{ctg}\, 2x}$.

Функцияне тикшерегез һәм аның графигын төзегез (112—113).

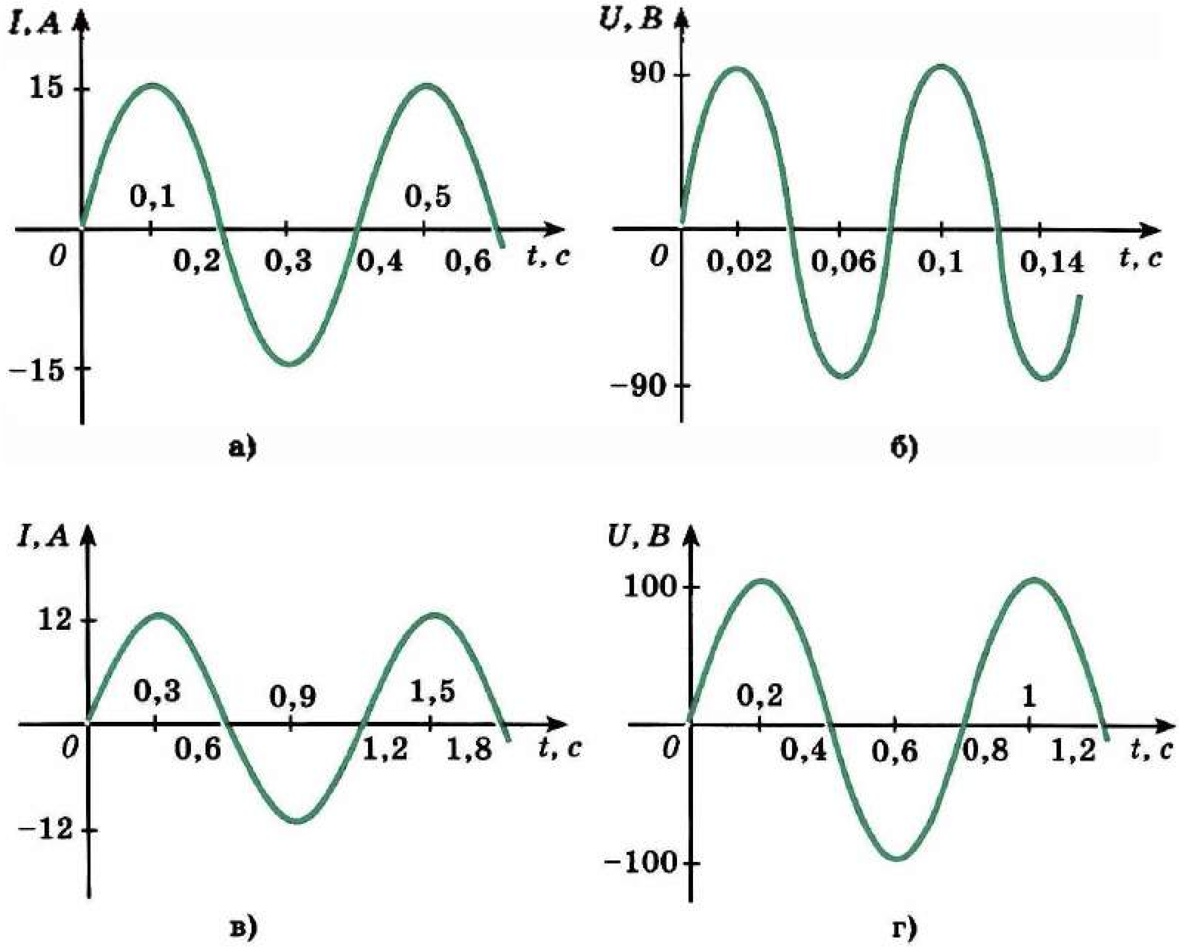
112.— а) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

в) $f(x) = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $f(x) = 1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

113.— а) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$; б) $f(x) = \mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f(x) = 4\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$; г) $f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right)$.

114.— **64 нче рәсемдә сурәтләнгән графигы буенча ток зурлыгының (яки көчәнешнең) амплитудасын, тирбәнү периодын билгеләгез. Ток зурлыгының (яки көчәнешнең) вакытка бәйлелек законын языгыз.**



64 нче рәсем

115.— Хәрәкәт башланганнан алып исәпләгәндә, иң якын нинди вакыт моменты t да $(t > 0)$ $x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ законы буенча гармоник тирбәнә торган ноктаның көчеше:

а) максималь; б) 2,5 кә тигез;

в) 0 гә тигез; г) −5 кә тигез була?

§ 3.

Тригонометрик тигезләмәләрне һәм тигезсезлекләрне чишү

8. Арксинус, арккосинус һәм арктангенс

1. Тамыр турында теорема. Тигезләмәләр чишкәндә куллану өчен уңай булган мөһим раслауны бирик.

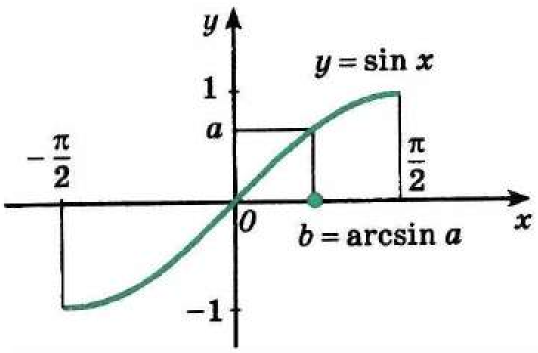
Теорема *(тамыр турында)*. **f функциясе I аралыгында үссен (яки кимесен), a саны f ның шушы аралыкта кабул иткән теләсә кайсы бер кыйммәте булсын. Ул вакытта $f(x) = a$ тигезләмәсенең I аралыгында бердәнбер тамыры була.**

Исбатлау. Үсүче f функциясен карыйк (кимүче функция очрагында аналогик рәвештә фикер йөртәбез). Теореманың шарты буенча I аралыгында $f(b) = a$ булырлык бер b саны бар. b саны $f(x) = a$ тигезләмәсенең бердәнбер тамыры икәнен күрсәтербез. I аралыгында $f(c) = a$ булган тагын $c \neq b$ саны бар, дип уйлыйк. Ул вакытта я $c < b$, я $c > b$. Ләкин f функциясе I аралыгында үсә, шуңа күрә тиңдәшле рәвештә я $f(c) < f(b)$, я $f(c) > f(b)$. Бу исә $f(c) = f(b) = a$ тигезлегенә каршы килә. Димәк, безнең фаразыбыз дөрес түгел һәм $f(x) = a$ тигезләмәсенең I аралыгында b санынннан башка тамырлары юк.

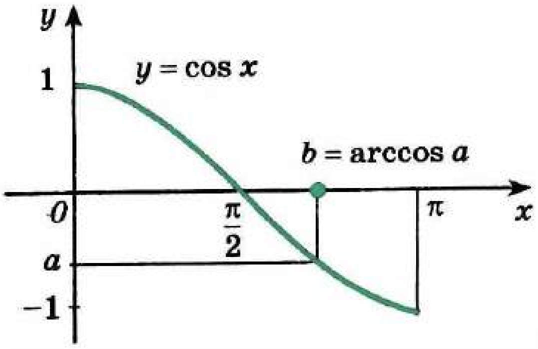
1 нче мисал. $x^3 + x = 2$ тигезләмәсен чишик.

$f(x) = x^3 + x$ функциясе R да үсә (бу — ике үсүче функциянең суммасы). Шуңа күрә $f(x) = 2$ тигезләмәсенең тамырлары бердән артык түгел, $x = 1$ аның тамыры икәнен күрү кыен түгел.

2. Арксинус. Белгәнебезчә, синус функциясе $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кисемтәсендә үсә һәм −1 дән 1 гә кадәрге барлык кыйммәтләрне ала. Димәк, тамыр турындагы теорема буенча $|a| \leq 1$ булган теләсә нинди a саны өчен $\sin x = a$ тигезләмәсенең $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралыгындагы бердәнбер тамыры b бар. Бу b санын a санының арксинусы дип атыйлар һәм $\arcsin a$ аша тамгалыйлар (65 нче рәсем).



65 нче рәсем



66 нчы рәсем

> Билгеләмә. **Синусы a га тигез булган $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кисемтәсендәге сан a санының *арксинусы* дип атала.**

2 нче мисал. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ не табыйк.

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, чөнки $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ һәм $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3 нче мисал. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ не табыйк.

Синусы $\left(-\frac{1}{2}\right)$ гә тигез булган сан $\left(\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right.$ аралыгыннан$\left.\right)$ $-\frac{\pi}{6}$ га тигез. Шуңа күрә $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

3. Арккосинус. Косинус функциясе $[0; \pi]$ кисемтәсендә кими һәм 1 гә кадәрге барлык кыйммәтләрне ала. Шуңа күрә $|a| \leq 1$ булган теләсә нинди a саны өчен $\cos x = a$ тигезләмәсенең $[0; \pi]$ кисемтәсендә бердәнбер тамыры b бар. Бу b санын a санының арккосинусы дип атыйлар һәм $\arccos a$ аша тамгалыйлар (66 нчы рәсем).

> Билгеләмә. **Косинусы a га тигез булган, $[0; \pi]$ кисемтәсендәге сан a санының *арккосинусы* дип атала.**

4 нче мисал. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, чөнки $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ һәм $\frac{\pi}{6} \in [0; \pi]$.

5 нче мисал. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, чөнки $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ һәм $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$.

4. Арктангенс. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында тангенс функциясе үсә һәм R дагы барлык кыйммәтләрне ала. Шуңа күрә $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалындагы теләсә нинди a саны өчен $\operatorname{tg} x = a$ тигезләмәсенең бердәнбер тамыры b бар. Бу b санын a санының арктангенсы дип атыйлар һәм $\operatorname{arctg} a$ аша тамгалыйлар (67 нче рәсем).

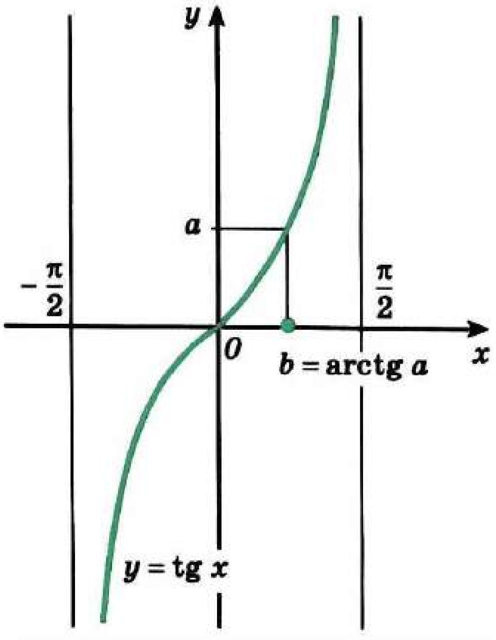
> Билгеләмә. **Тангенсы a га тигез булган $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалындагы сан a санының *арктангенсы* дип атала.**

6 нчы мисал. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, чөнки $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ һәм $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

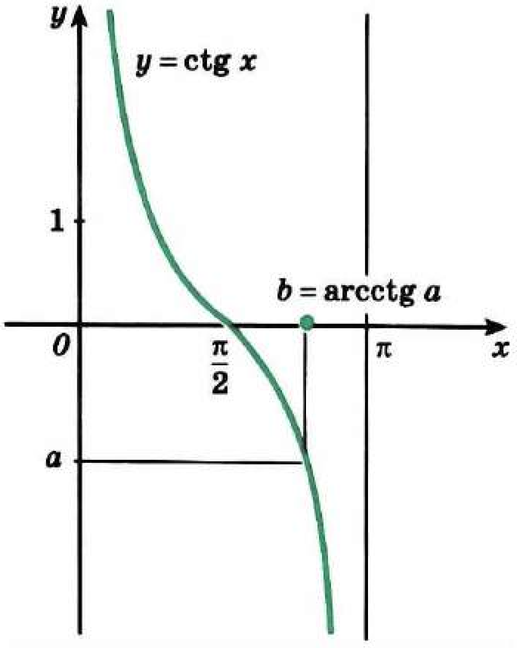
7 нче мисал. $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$, чөнки $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ һәм $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Арккотангенс. Котангенс функциясе $(0, \pi)$ интервалында кими һәм R дагы барлык кыйммәтләрне ала. Шуңа күрә $(0, \pi)$ интервалындагы теләсә нинди a саны өчен $\operatorname{ctg} x = a$ тигезләмәсенең бердәнбер тамыры b бар. Бу b санын a санының котангенсы дип атыйлар һәм $\operatorname{arcctg} a$ рәвешендә тамгалыйлар (68 нче рәсем).

> Билгеләмә. **Котангенсы a га тигез булган $(0; \pi)$ интервалындагы сан a санының *арккотангенсы* дип атала.**



67 нче рәсем



68 нче рәсем

8 нче мисал. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, чөнки $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ һәм $\frac{\pi}{3} \in (0; \pi)$.

9 нчы мисал. $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$, чөнки $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ һәм $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$.

Күнегүләр

Тигезләмәләрнең һәркайсының бирелгән аралыкка кергән ничә тамыры бар (116—117)?

116. а) $x^7 = 3$, $x \in (-\infty; \infty)$; б) $\frac{3}{x-1} = -5$, $x \in (-\infty; 1)$;

в) $x^6 = 4$, $x \in (-\infty; 0]$; г) $\frac{5}{x+2} = 2$, $x \in (-2; \infty)$.

117. а) $(x-3)^3 = -4$, $x \in (-\infty; \infty)$;

б) $2\sin x = 1{,}5$, $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $(x+2)^4 = 5$, $x \in [-2; \infty)$; г) $0{,}5\cos x = -\frac{1}{4}$, $x \in [0; \pi]$.

Берәмлек әйләнәдә t ның тиңдәшле кыйммәтләре бирелгән тигезлекне канәгатьләндерә торган P_t нокталарын билгеләгез. t ның бирелгән аралыктагы кыйммәтен табыгыз (118—120).

118. а) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\sin t = -\frac{1}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) $\sin t = 1$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

119. а) $\cos t = -\frac{1}{2}$, $[0; \pi]$; б) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[0; \pi]$;

в) $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0; \pi]$; г) $\cos t = 0$, $[0; \pi]$.

120. а) $\operatorname{tg} t = -1$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\operatorname{ctg} t = \sqrt{3}$, $(0; \pi)$;

в) $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg} t = -1$, $(0; \pi)$.

Исәпләп чыгарыгыз (121—123).

121. а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\arcsin 1$; г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

122. а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\arccos 1$.

123. а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{arctg}(-1)$;

в) $\operatorname{arctg} 0$; г) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

Аңлатмаларның мәгънәсе бармы (124—125)?

124. а) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$; б) $\arccos\sqrt{5}$;

в) $\arcsin 1,5$; г) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

125. а) $\arccos\pi$; б) $\arcsin\left(3-\sqrt{20}\right)$;

в) $\arccos\left(-\sqrt{3}\right)$; г) $\arcsin\frac{2}{7}$.

Аңлатмаларның кыйммәтләрен табыгыз (126—128).

126. а) $\arcsin 0 + \arccos 0$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2}$;

в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arcsin(-1) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

127. а) $\arccos(-0,5) + \arcsin(-0,5)$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin(-1)$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

128. а) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{3}$; б) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \operatorname{arctg} 0$; г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

129. Саннарны чагыштырыгыз:

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ һәм $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ һәм $\operatorname{arctg}(-1)$;

в) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ һәм $\arcsin 1$;

г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ һәм $\arcsin\frac{1}{2}$.

130.— Калькулятор яки таблицалар ярдәмендә аңлатманың кыйммәтен табыгыз:
а) $\arcsin 0{,}3010$; $\operatorname{arctg} 2{,}3$;
б) $\arccos 0{,}6081$; $\operatorname{arctg} 0{,}3541$;
в) $\arcsin 0{,}7801$; $\arccos 0{,}8771$;
г) $\operatorname{arctg} 10$; $\arcsin 0{,}4303$.

131.— Исәпләп чыгарыгыз:

а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $3\arcsin\frac{1}{2}+4\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$;

г) $\arcsin(-1)-\frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2}+3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

132.— $[-1;\ 1]$ аралыгындагы теләсә нинди x_1 һәм x_2 саннары өчен $x_1 < x_2$ тигезсезлегеннән
а) $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$; б) $\arccos x_1 > \arccos x_2$
тигезсезлеге килеп чыкканын исбатлагыз.

133.— Теләсә нинди x_1 һәм x_2 саннары өчен $x_1 < x_2$ тигезсезлегеннән
а) $\operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2$; б) $\operatorname{arcctg} x_1 > \operatorname{arcctg} x_2$
тигезсезлеге килеп чыкканын исбатлагыз.

Саннарны үсә бару тәртибендә урнаштырыгыз (134—135).

134.— а) $\arcsin\frac{\pi}{6}$, $\arcsin(-0{,}3)$, $\arcsin 0{,}9$;
б) $\arcsin(-0{,}5)$, $\arcsin(-0{,}7)$, $\arcsin\frac{\pi}{8}$;
в) $\arccos 0{,}4$, $\arccos(-0{,}2)$, $\arccos(-0{,}8)$;
г) $\arccos 0{,}9$, $\arccos(-0{,}6)$, $\arccos\frac{\pi}{5}$.

135.— а) $\operatorname{arctg} 100$, $\operatorname{arctg}(-5)$, $\operatorname{arctg} 0{,}7$;
б) $\operatorname{arcctg} 1{,}2$, $\operatorname{arcctg}\pi$, $\operatorname{arcctg}(-5)$.

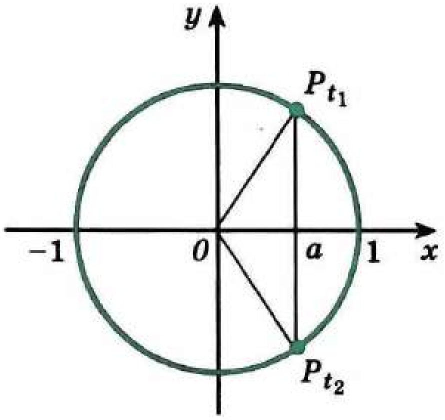
9. Иң гади тригонометрик тигезләмәләрне чишү

1. $\cos t = a$ тигезләмәсе. Әгәр $|a| > 1$ булса,

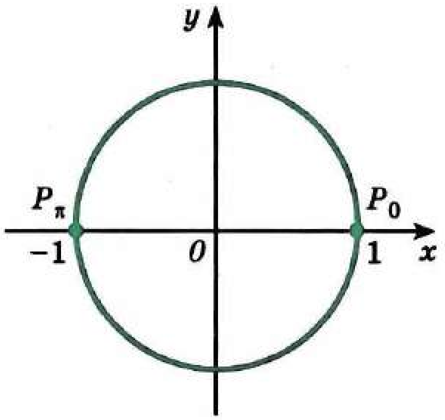
$$\cos t = a \qquad (1)$$

тигезләмәсенең чишелешләре булмавы үзеннән-үзе аңлашыла, чөнки теләсә нинди t өчен $|\cos t| \leqslant 1$.

$|a| \leqslant 1$ булсын. $\cos t = a$ булган барлык t саннарын табарга кирәк. (1) тигезләмәнең $[0;\ \pi]$ кисемтәсендә төгәл бер чишелеше бар — ул $\arccos a$ саны.



а)



б)

69 нчы рәсем

Косинус — җөп функция, димәк, $[-\pi; 0]$ кисемтәсендә (1) тигезләмәнең шулай ук төгәл бер чишелеше бар — ул $-\arccos a$ саны. Шулай итеп, $\cos t = a$ тигезләмәсенең 2π озынлыгындагы $[-\pi; \pi]$ кисемтәсендә ике чишелеше бар: $t = \pm\arccos a$ ($a = 1$ булганда тәңгәл килүче).

cos периодик функция булганга күрә, калган чишелешләр монысыннан $2\pi n$ ($n \in Z$) га аерылалар, ягъни (1) тигезләмәнең тамырлары формуласы түбәндәгечә була:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z. \qquad (2)$$

(Игътибар итегез: бу формуланы бары тик $|a| \leqslant 1$ булганда гына кулланырга ярый.)

(1) тигезләмәнең чишелешен берәмлек әйләнәдә күрсәтергә мөмкин. Билгеләмә буенча $\cos t$ — берәмлек әйләнәнең P_t ноктасы абсциссасы. Әгәр $|a| < 1$ булса, андый нокталар ике (69 нчы *а* рәсем); ә $a = 1$ яки $a = -1$ булганда бер (69 нчы *б* рәсем).

$a = 1$ булганда, $\arccos a$ һәм $-\arccos a$ саннары тәңгәл киләләр (алар нульгә тигез), шуңа күрә $\cos t = 1$ тигезләмәсенең чишелешләрен $t = 2\pi n,\ n \in Z$ рәвешендә язалар.

$a = -1$ һәм $a = 0$ өчен (1) тигезләмәнең чишелешләрен «аерым» формада язу кабул ителгән:

$$t = \pi + 2\pi n,\ n \in Z \text{ булганда, } \cos t = -1;$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \text{ булганда, } \cos t = 0.$$

1 нче мисал. $\cos x = \frac{1}{2}$ тигезләмәсен чишик.

(2) формула буенча

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ булганга күрә,

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

2 нче мисал. $\cos x = -0{,}2756$ тигезләмәсен чишик.

(2) формула буенча

$$x = \pm \arccos(-0{,}2756) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

$\arccos(-0{,}2756)$ ның кыйммәтен калькулятор ярдәмендә табабыз: ул якынча 1,8500 гә тигез. Шулай итеп,

$$x = \pm x_0 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},\ \text{монда}\ x_0 \approx 1{,}8500.$$

3 нче мисал. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ тигезләмәсен чишик.

(2) формула буенча

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

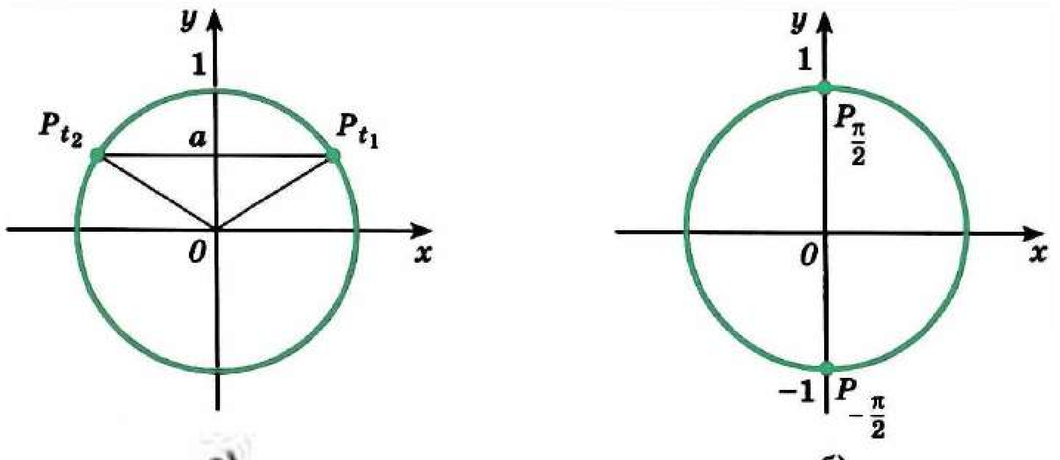
ягъни $2x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, моннан

$$x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

2. $\sin t = a$ тигезләмәсе.

$$\sin t = a \qquad (3)$$

тигезләмәсенең $|a| > 1$ булганда чишелешләре юк, чөнки теләсә нинди t өчен $|\sin t| \leqslant 1$. $|a| \leqslant 1$ булганда (3) тигезләмәнең $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кисемтәсендә төгәл бер чишелеше бар: $t_1 = \arcsin a$. $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ арадыгында sin функциясе кими һәм −1 дән алып 1 гә кадәр барлык кыйммәтләрне ала, шуңа күрә тамырлар турындагы теорема буенча (3) тигезләмәнең бу кисемтәдә дә бер тамыры бар: 70 нче *а* рәсемнән бу тамырның $\pi - \arcsin a$ га тигез булган t_2 саны икәне күренә. Чыннан да, $\sin t_2 = \sin(\pi - t_1) = \sin t_1 = a$. Моннан тыш, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$ булганга күрә яза алабыз: $-\frac{\pi}{2} \leqslant -t_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$ һәм $\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant \pi - t_1 \leqslant \pi + \frac{\pi}{2}$, ягъни t_2 саны $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ кисемтәсенә керә.



а) б)

70 нче рәсем

Шулай итеп, (3) тигезләмәнең $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ кисемтәсендә ике чишелеше бар: $t_1 = \arcsin a$ һәм $t_2 = \pi - \arcsin a$ ($a = 1$ булганда тәңгәл килүче). Синусның периоды 2π икәнен искә алып, тигезләмәнең барлык чишелешләрен язу өчен түбәндәге формулаларны табабыз:

$$t = \arcsin a + 2\pi n, \qquad (4)$$

$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \ n \in Z. \qquad (5)$$

(3) тигезләмәнең чишелешләрен ике формула белән түгел, ә бер формула белән язу уңайлы:

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \ k \in Z. \qquad (6)$$

(6) формуладан $k = 2n$ (җөп) булганда — (4) формула белән язылган барлык чишелешләр, ә $k = 2n + 1$ (так) булганда (5) формула белән язылган барлык чишелешләр табылуына ышану кыен түгел.

(3) тигезләмәнең чишелешен берәмлек әйләнәдә җиңел күрсәтеп була. Билгеләмә буенча $\sin t$ — берәмлек әйләнәдә P_t ноктасының ординатасы. Әгәр $|a| < 1$ булса, ул вакытта андый ноктлар ике (70 нче *а* рәсем); $a = \pm 1$ булганда бер (70 нче *б* рәсем).

Әгәр $a = 1$ булса, $\arcsin a$ һәм $\pi - \arcsin a$ саннары тәңгәл киләләр, шуңа күрә

$$\sin t = 1$$

тигезләмәсенең чишелешен

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$$

рәвешендә язу кабул ителгән.

$a = -1$ һәм $a = 0$ булганда түбәндәгечә язалар:

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z \text{ булса, } \sin t = -1,$$

$$t = \pi n, \ n \in Z \text{ булса, } \sin t = 0.$$

4 нче мисал. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ тигезләмәсен чишик.

(6) формула буенча

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \ k \in Z, \text{ ягъни}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z.$$

5 нче мисал. $\sin x = 0{,}3714$ тигезләмәсен чишик.

(6) формула буенча

$$x = (-1)^n \arcsin 0{,}3714 + \pi n, \ n \in Z.$$

Калькулятор ярдәмендә табабыз: $\arcsin 0{,}3714 \approx 0{,}3805$.

6 нчы мисал. $\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ тигезләмәсен чишик.

Синус — так функция. Шуңа күрә

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(6) формула буенча

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k,\ k\in Z.$$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$ булганга күрә яза алабыз:

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k,$$

$$x=\frac{\pi}{5}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.$$

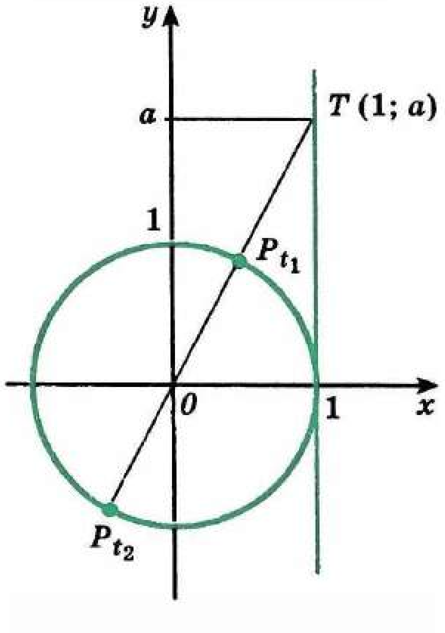
3. $\operatorname{tg} t=a$ тигезләмәсе. Теләсә нинди a өчен $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $\operatorname{tg} t=a$ булырлык төгәл бер t саны бар, бу — $\operatorname{arctg} a$. Шуңа күрә

$$\operatorname{tg} t=a \qquad (7)$$

тигезләмәсенең π озынлыгындагы $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ интервалында бердәнбер тамыры була. Тангенс функциясенең периоды π гә тигез. Шулай булгач, (7) тигезләмәнең калган тамырлары әле табылган тамырдан πn $(n\in Z)$ га аерылалар, ягъни

$$t=\operatorname{arctg} a+\pi n,\ n\in Z. \qquad (8)$$

$\operatorname{tg} t=a$ тигезләмәсенең чишелешен тангенслар сызыгы ярдәмендә күрсәтү уңайлы (71 нче рәсем), $\operatorname{tg} t$ — ул OP_{t_1} турысының тангенслар сызыгы белән кисешү ноктасы T_t ның ординатасы икәнен исегезгә төшерәбез (1 нче пунктны карагыз). Теләсә нинди a саны өчен тангенслар сызыгында ординатасы a га тигез булган бары тик бер генә нокта бар, бу — $T(1;\ a)$ ноктасы. OT турысы берәмлек әйләнә белән ике ноктада кисешә; бу вакытта $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ интервалына уң ярымәйләнәнең $t_1=\operatorname{arctg} a$ булырлык OP_{t_1} ноктасы туры килә.



71 нче рәсем

7 нче мисал. $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ тигезләмәсен чишик. (8) формула буенча

$$x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi n,\ n\in Z$$

чишелешен табабыз. $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, шуңа күрә иң соңгы җавапны болай язабыз:

$$x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

8 нче мисал. $\operatorname{tg} x=5{,}177$ тигезләмәсен чишик. (8) формуладан

$$x=\operatorname{arctg} 5{,}177+\pi n,\ n\in Z$$

икәнлеге килеп чыга. Калькулятор ярдәмендә табабыз:

$$\operatorname{arctg} 5{,}177\approx 1{,}3800.$$

9 нчы мисал. $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ тигезләмәсен чишәбез.

Бу тигезләмә (8) формула ярдәмендә чишелә торган $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ тигезләмәсенә тамырдаш:

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

Күнегүләр

Тигезләмәләрне чишегез (136—143).

136. а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = -\frac{1}{2}$;
в) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x = -1$.

137. а) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; б) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$;
в) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$; г) $2\cos x - 1 = 0$.

138. а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\sin x = -\frac{1}{3}$; г) $\sin x = -1$.

139. а) $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$; б) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$;
в) $2\sin x - 1 = 0$; г) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$.

140. а) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;
в) $\operatorname{tg} x = 1$; г) $\operatorname{tg} x = 0$.

141. а) $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$; б) $\operatorname{ctg} x + 1 = 0$;
в) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0$; г) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x - 1 = 0$.

142. а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$;
в) $\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$; г) $\cos 4x = 0$.

143. а) $\sin x = -0{,}6$; б) $\operatorname{ctg} x = 2{,}5$;
в) $\cos x = 0{,}3$; г) $\operatorname{tg} x = -3{,}5$.

Тигезләмәләрне чишегез (144—147).

144. а) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
в) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$.

145.— а) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$; б) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=3$; г) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$.

146.— а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-1$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3}$;

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-1$; г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$.

147.— а) $\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}=1$;

в) $\sin 2x\cos 2x=-\frac{1}{4}$;

г) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

148.— $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ һәм $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ функцияләре өчен аларның графиклары белән күрсәтелгән турының уртак нокталары координаталарын табыгыз.
а) $x=4{,}5\pi$; б) $y=-1$; в) $y=1$; г) $y=0$.

149.— $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{1}{2}$, $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ тигезләмәләрен чишегез һәм һәркайсының:
а) иң кечкенә уңай тамырын;
б) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ аралыгындагы тамырларын;
в) иң зур тискәре тамырын;
г) $\left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$ аралыгындагы тамырларын табыгыз.

150.— $t=\mathrm{arcctg}\,a+\pi n$, $n\in Z$ формуласы буенча $\mathrm{ctg}\,t=a$ тигезләмәсенең барлык чишелешләре дә табылганын исбатлагыз.

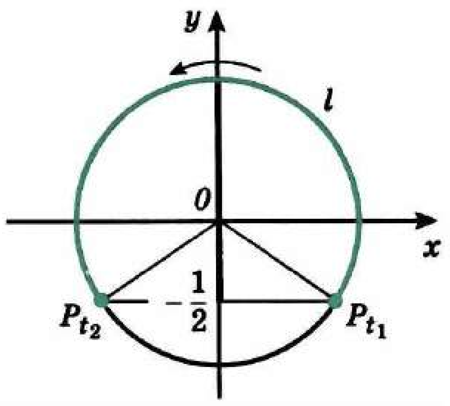
10. Иң гади тригонометрик тигезсезлекләрне чишү

Тригонометрик функцияләрне эченә алган тигезсезлекләрне чишү, кагыйдә буларак, $\sin t\leqslant a$, $\cos t>a$, $\mathrm{tg}\,t\geqslant a$ һ.б. иң гади тигезсезлекләрне чишүгә кайтып кала.

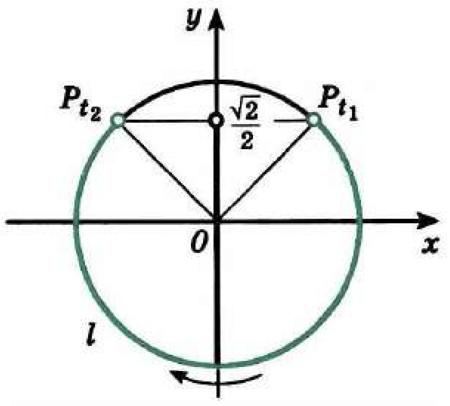
Мисаллар өстендә аларны чишү ысулларын карыйк.

1 нче мисал. $\sin t\geqslant-\frac{1}{2}$ тигезсезлеген чишик.

Бирелгән тигезсезлекне канәгатьләндерүче t кыйммәтләре өчен берәмлек әйләнәнең барлык P_t нокталарының ординаталары



72 нче рәсем



73 нче рәсем

$-\frac{1}{2}$ дән зуррак яки аңа тигез була. 72 нче рәсемдә аерып күрсәтелгән l дугасы — барлык шундый нокталар күплеге. P_t ноктасының шул дуганыкы булу шартын табыйк.

P_{t_1} ноктасы уң ярымәйләнәдә ята, P_{t_1} нең ординатасы $-\frac{1}{2}$ гә тигез, димәк, t_1 сыйфатында $t_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ кыйммәтен алу уңай. Без l дугасын P_{t_1} ноктасыннан P_{t_2} ноктасына кадәр сәгать йөрешенә каршы йөреп чыгабыз дип күз алдына китерик.Ул вакытта $t_2 > t_1$ һәм $t_2 = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi}{6}$ икәнен аңлау җиңел. Шул рәвешле, $-\frac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{6}$ булса, P_t ноктасы l дугасыныкы икәнен табабыз. Димәк, тигезсезлекнең 2π озынлыгындагы $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ аралыгына кергән чишелеше $-\frac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{6}$ рәвешендә була. Синус периодик функция булганга күрә, калган чишелешләре табылганга $2\pi n$, монда $n \in \mathbb{Z}$ рәвешендәге саннарны өстәп табыла. Җавап түбәндәгечә языла:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

2 нче мисал. $\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ тигезсезлеген чишик.

Бу тигезсезлек әлеге тигезсезлекне канәгатьләндерүче кыйммәтләре өчен берәмлек әйләнәнең барлык P_t нокталарының ординаталары $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дән кечерәк булуын белдерә. 73 нче рәсемдә аерып күрсәтелгән l дугасы — шундый барлык нокталар күплеге. Дуганың очлары P_{t_1} һәм P_{t_2} әлеге күплеккә керми, чөнки аларның ординаталары $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дән кечерәк түгел, ә $\frac{\sqrt{2}}{2}$ гә тигез. P_t ноктасының күрсәтелгән күплеккә керү шартын билгеләү өчен, t_1 һәм t_2 не табабыз. $t_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ не алабыз.

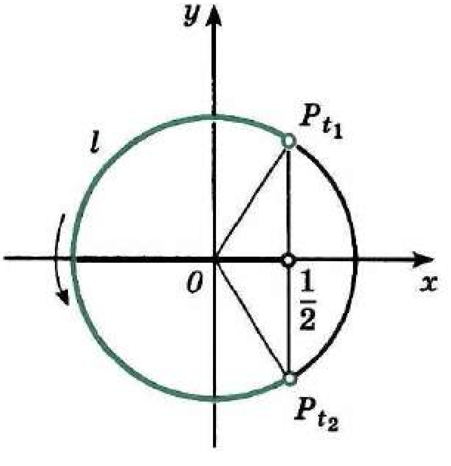
l дугасын P_{t_1} ноктасыннан P_{t_2} гә сәгать йөреше уңаена йөреп чыгуны карыйк; $t_2 < t_1$ һәм $t_2 = -\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{5\pi}{4}$. Тигезсезлекнең 2π озынлыгындагы $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралыгында урнашкан барлык чишелешләре болай языла: $-\frac{5\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$. Синусның периодик булуын исәпкә алып, тигезсезлекнең барлык чишелешләрен табабыз:

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

3 нче мисал. $\cos t < \frac{1}{2}$ тигезсезлеген чишик.

Берәмлек әйләнәнең абсциссалары $\frac{1}{2}$ дән кечерәк булган нокталары күплеге $x = \frac{1}{2}$ турысыннан сулдарак яталар. Шулай булгач, 74 нче рәсемдә аерып күрсәтелгән l дугасы барлык шундый нокталар күплеге булыр (аның очлары P_{t_1} һәм P_{t_2} нокталары бу күплеккә кермиләр). t_1 һәм t_2 не табабыз. P_{t_1} ноктасы югарыдагы ярымәйләнәгә урнашкан, P_{t_1} нең абсциссасы $\frac{1}{2}$ гә тигез, димәк, $t_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. P_{t_1} ноктасыннан P_{t_2} ноктасына күчү l дугасы буйлап сәгать йөрешенә каршы башкарыла, ул вакытта $t_2 > t_1$ һәм $t_2 = 2\pi - \arccos\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{3}$. $\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$ шарты үтәлгәндә, нокта аерып күрсәтелгән l дугасыныкы була (аның очларыннан башка). Тигезсезлекнең 2π озынлыктагы $[0; 2\pi]$ аралыгына кергән чишелешләре болай языла: $\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$. Косинус периодик функция булу сәбәпле, калган чишелешләре әлеге чишелешкә $2\pi n$, монда $n \in Z$ рәвешендәге саннарны өстәп табыла. Тулы җавап түбәндәгечә булыр:

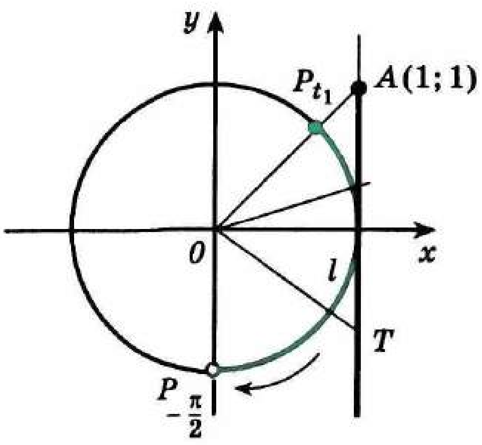
$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$



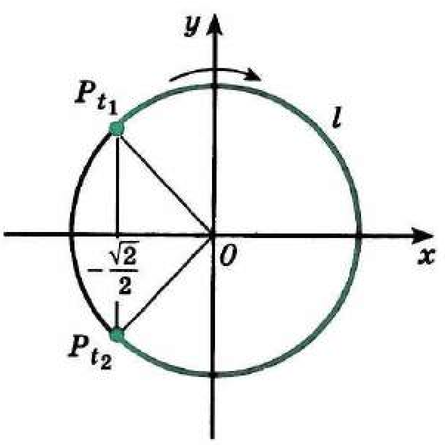
74 нче рәсем

4 нче мисал. $\operatorname{tg} t \leqslant 1$ тигезсезлеген чишик.

Тангенсның периоды π гә тигез. Шуңа күрә башта әлеге тигезсезлекнең $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ аралыгына кергән барлык чишелешләрен табабыз, ә аннары тангенсның периодиклыгыннан файдаланабыз. t ның кыйммәтләре әлеге тигезсезлекне канәгатьләндерә торган барлык P_t нокталарын уң ярымәйләнәдә аерып күрсәтү өчен, тангенслар сызы-



75 нче рәсем



76 нчы рәсем

гына мөрәҗәгать итәбез. Әгәр t тигезсезлекнең чишелеше булса, T ноктасының $\operatorname{tg} t$ га тигез булган ординатасы 1 дән кечерәк яки тигез булырга тиеш. AT нуры — шундый T нокталары күплеге (75 нче рәсем). Рәсемдә аерып күрсәтелгән l дугасы исә шул нур нокталарына тиңдәшле P_t нокталары күплеге була (игътибар итегез: тикшерелә торган күплеккә P_{t_1} ноктасы керә, ә $P_{-\frac{\pi}{2}}$ ноктасы керми). P_t ноктасының l дугасына керү шартын табыйк, $t_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ һәм $\operatorname{tg} t_1 = 1$, шулай булгач, $t_1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Димәк, t аргументы $-\frac{\pi}{2} < t \leqslant \frac{\pi}{4}$ шартын канәгатьләндерергә тиеш. Бирелгән тигезсезлекнең $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ аралыгына кергән барлык чишелешләре мондый була: $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$. Тангенсның периодиклыгын исәпкә алып, җавапны табабыз:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

5 нче мисал. $\cos 2x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ тигезсезлеген чишик. $2x$ ны t аша тамгаласак, $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ килеп чыга. 76 нчы рәсемдә тиңдәшле l дугасы аерып күрсәтелгән. Табабыз: $t_1 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, $t_2 = -\frac{3\pi}{4}$, моннан

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

x үзгәрешлесенә күчәбез:

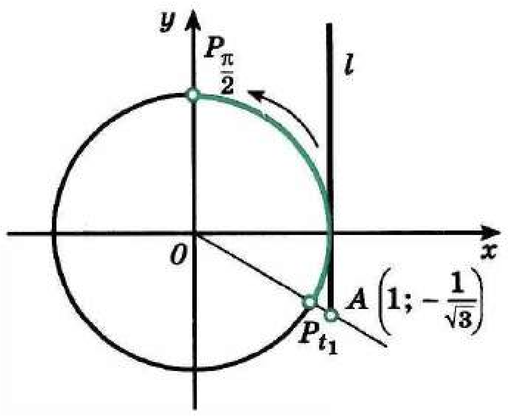
$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant 2x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$-\frac{3\pi}{8} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

6 нчы мисал. $3\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)<\sqrt{3}$ тигезсезлеген чишик.

Бирелгән тигезсезлекнең рәвешен үзгәртәбез:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$-\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)>-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$



77 нче рәсем

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}$ не t аша тамгалыйк, ул вакытта $\mathrm{tg}\,t>-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 77 нче рәсемдә тиңдәшле l дугасы аерып күрсәтелгән. $t_1=\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$ булганга күрә, $-\frac{\pi}{6}+\pi n<t<\frac{\pi}{2}+\pi n$ икәнлеге килеп чыга. x үзгәрешлесенә күчәбез:

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+\pi n,$$
$$\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$ ■

Күнегүләр

Тиңдәшле t кыйммәтләре бирелгән тигезсезлекне канәгатьләндергән P_t нокталарын берәмлек әйләнәдә билгеләгез. t ның тигезсезлекне канәгатьләндергән һәм күрсәтелгән аралыкка кергән кыйммәтләре күплеген табыгыз (151—153).

151. а) $\sin t>\frac{1}{2},\ t\in[0,\pi]$; б) $\sin t\leq-\frac{\sqrt{3}}{2},\ t\in[-\pi;0]$;

в) $\sin t>\frac{\sqrt{2}}{2},\ t\in[0;\pi]$; г) $\sin t<-\frac{1}{2},\ t\in[-\pi;0]$.

152. а) $\cos t>\frac{\sqrt{2}}{2},\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; б) $\cos t<-\frac{1}{2},\ t\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$;

в) $\cos t>\frac{1}{2},\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; г) $\cos t<-\frac{\sqrt{3}}{2},\ t\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

153. а) $\mathrm{tg}\,t>-\sqrt{3},\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\mathrm{tg}\,t<\frac{1}{\sqrt{3}},\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\mathrm{tg}\,t>\frac{\sqrt{3}}{3},\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; г) $\mathrm{tg}\,t<-1,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Тигезсезлекләрне чишегез (154—157).

154. — а) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$; г) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

155. — а) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$; б) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

156. — а) $\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{tg} x < -1$.

157. — а) $2\cos x - 1 \geqslant 0$; б) $2\sin x + \sqrt{2} \geqslant 0$;

в) $2\cos x - \sqrt{3} \leqslant 0$; г) $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geqslant 0$.

Тигезсезлекләрне чишегез (158—163).

158. — а) $\sin 2x < \frac{1}{2}$; б) $\cos \frac{x}{3} > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin \frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{tg} 5x > 1$.

159. — а) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$;

в) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \geqslant 1$; г) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$.

160. — а) $\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{1}{2}$;

б) $\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $4\sin 2x \cos 2x \geqslant \sqrt{2}$;

г) $\cos \frac{\pi}{8} \cos x - \sin x \sin \frac{\pi}{8} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

161. — а) $\operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > 1$;

в) $\operatorname{ctg} 3x \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) > -\sqrt{3}$.

162. — а) $3\sin \frac{x}{4} \geqslant 2$; б) $4\cos \frac{x}{2} < -3$;

в) $5\operatorname{tg} 2x \leqslant 3$; г) $0{,}5\sin 4x < -0{,}2$.

163. — Тигезсезлекнең күрсәтелгән аралыкка кергән чишелешләрен табыгыз:

а) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right)$;

б) $\cos\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2},\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$;

в) $\operatorname{tg} x \geqslant -1,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$;

г) $\sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2},\ x \in [0; \pi]$.

11. Тригонометрик тигезләмәләрне һәм тигезләмәләр системаларын чишүгә мисаллар

9 нчы пунктта иң гади тригонометрик тигезләмәләрне ничек чишәргә икәнлеге күрсәтелгән иде. Катлаулырак тигезләмәләрне чишү тригонометрик формулаларны белүне таләп итә. Берничә мисал карап үтик.

1 нче мисал. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ тигезләмәсен чишик.

Яңа $y = \sin x$ үзгәрешлесен кертәбез. Ул вакытта бирелгән тигезләмәне $2y^2 + y - 1 = 0$ рәвешендә язарга мөмкин. Без квадрат тигезләмә таптык. $y_1 = \frac{1}{2}$ һәм $y_2 = -1$ аның тамырлары булып хезмәт итә. Шулай булгач, $\sin x = \frac{1}{2}$ яки $\sin x = -1$. Беренче очракта

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, \text{ ягъни } x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$$

чишелешен табабыз. Икенче очракта

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$

булыр.

2 нче мисал. $6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0$ тигезләмәсен чишик.

$\sin^2 x$ ны $1 - \cos^2 x$ ка алмаштырып, $\cos x$ ка карата квадрат тигезләмә табабыз: $6(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 2 = 0$, моннан $-6\cos^2 x + 5\cos x + 4 = 0$, ягъни $6\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0$. 1 нче мисалдагы кебек үк, $\cos x = y$ яңа үзгәрешлесен кертәбез. Ул вакытта $6y^2 - 5y - 4 = 0$, моннан $y = -\frac{1}{2}$ яки $y = 1\frac{1}{3}$.

$1\frac{1}{3} > 1$ булганлыктан, $\cos x = 1\frac{1}{3}$ тигезләмәсенең чишелеше юк. $\cos x = -\frac{1}{2}$ тигезләмәсен чишеп табабыз:

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

3 нче мисал. $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$ тигезләмәсен чишик.

$\operatorname{tg} x$ ны y аша тамгалыйбыз. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ булганга күрә,

$y+\frac{2}{y}=3$ тигезләмәсен табабыз. Ул $y^2-3y+2=0$ ($y\neq 0$ шарты үтәлгәндә) квадрат тигезләмәсенә китерелә. Аның тамырлары $y=2$, $y=1$.

1) $\operatorname{tg} x=2$, $x=\operatorname{arctg} 2+\pi k$, ягъни $x=x_0+\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$, монда $x_0=\operatorname{arctg} 2\approx 1{,}1072$.

2) $\operatorname{tg} x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$.

4 нче мисал. $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+\cos^2 x=0$ тигезләмәсен чишик.

x ның $\cos x=0$ булгандагы кыйммәтләре бу тигезләмәнең чишелешләре була алмый, чөнки $\cos x=0$ булса, $3\sin^2 x=0$ тигезлеге дә үтәлергә тиеш, ә косинус һәм синус бер үк вакытта нульгә тигез була алмыйлар. Шуңа күрә тигезләмәнең ике кисәген дә $\cos^2 x$ ка (яки $\sin^2 x$ ка) бүлеп, бирелгән тигезләмә белән тамырдаш $3\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+1=0$ тигезләмәсен табарга мөмкин, моннан $\operatorname{tg} x=1$ яки $\operatorname{tg} x=\frac{1}{3}$. Димәк,

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}\quad \text{яки}\quad x=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

5 нче мисал. $6\sin^2 x+4\sin x\cos x=1$ тигезләмәсен чишик.

Тигезләмәнең уң кисәгендәге 1 не $\sin^2 x+\cos^2 x$ ка алмаштырабыз. Тиешле рәвеш үзгәртүләрне башкарганнан соң $5\sin^2 x+4\sin x\cos x-\cos^2 x=0$ килеп чыга. 4 нче мисалда тасвирланган моңа охшаш тигезләмәне чишү алымыннан файдаланабыз. Нәтиҗәдә табабыз: $\operatorname{tg} x=\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} x=-1$. Димәк,

$$x=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\pi n,\ n\in Z,\quad \text{яки}\quad x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$$

6 нчы мисал. $\sin^2 x-\sin 2x=0$ тигезләмәсе $\sin 2x$ ны $2\sin x\cos x$ ка алмаштырганнан соң $\sin^2 x-2\sin x\cos x=0$ рәвешендәге тигезләмәгә китерелә.

Сул кисәген тапкырлаучыларга таркатабыз: $\sin x(\sin x-2\cos x=0$, моннан $\sin x=0$, ягъни $x=\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$, яки $\sin x-2\cos x=0$, моннан $\operatorname{tg} x=2$ һәм $x=\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$, ягъни $x=x_0+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$, монда $x_0=\operatorname{arctg} 2\approx 1{,}1072$.

4 нче мисалдагы кебек тигезләмәнең ике кисәген дә $\cos^2 x$ ка бүлеп, $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x=0$ тигезләмәсен табарга да була. Әгәр дә $\sin^2 x$ ка бүлсәк, x ның $\sin x=0$ булгандагы кыйммәтләре дә әлеге тигезләмәнең чишелешләре икәнлеген исәпкә алырга кирәк. Шуңа күрә $\sin^2 x$ ка бүлгәннән соң килеп чыккан $\operatorname{ctg} x-\frac{1}{2}=0$ тигезләмәмәсенә $\sin x=0$ тигезләмәсенең тамырларын өстәргә кирәк була. ◻

Башка бик күп тигезләмәләр, мәсәлән, $\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x=0$ яки $\sin^2 x+2\sin x\cos x-5\sin x\cos^2 x+2\cos^3 x=0$ h.б. шулай ук тигезләмәнең сул һәм уң кисәген тигезләмә белән бер үк дәрәҗәдәге косинус (яки синус) дәрәҗәсенә бүлү юлы белән чишеләләр. Алдан $\cos x=0$ ($\sin^n x$ нә бүлгәндә $\sin x=0$) булгандагы

x ның кыйммәтләре бирелгән тигезләмәнең чишелешләреме икәнен тикшерергә кирәк. Әйтик, икенче дәрәҗә тигезләмәне — $\cos^2 x$ ка (яки $\sin^2 x$ ка), ә өченче дәрәҗәне $\cos^3 x$ ка (яки $\sin^3 x$ ка) бүләләр дә $\operatorname{tg} x$ (яки $\operatorname{ctg} x$) ны y ка алмаштырып, алгебраик тигезләмә табалар.

7 нче мисал. $\cos 6x + \cos 2x = 0$ тигезләмәсен чишик. Косинуслар суммасын тапкырчыгышка үзгәртеп, $2\cos 4x \cos 2x = 0$ тигезләмәсен табабыз. $\cos 4x = 0$ яки $\cos 2x = 0$, ягъни

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4},\ k \in \mathbf{Z} \quad \text{яки} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$$

булса, бу тигезләмә дөрес тигезлеккә әйләнә.

8 нче мисал. $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$

тигезләмәләр системасын чишик. Беренче тигезләмәдән табабыз: $y = x - \frac{5\pi}{3}$. Ул вакытта $2\sin y = 2\sin\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cos \frac{5\pi}{3} - \cos x \sin \frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$. Системаның икенче тигезләмәсе $\sin x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ рәвешен ала, моннан $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, биредә $n \in \mathbf{Z}$. Аннары табабыз:

$y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n - \frac{7\pi}{6},\ n \in \mathbf{Z}$.

Җавап: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n - \frac{7\pi}{6}\right),\ n \in \mathbf{Z}$.

Күнегүләр

Тигезләмәләрне чишегез (164—168).

164. а) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; б) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$;
в) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; г) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$.

165. а) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; б) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;
в) $4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$; г) $5\sin^2 x + 6\cos x - 6 = 0$.

166. а) $2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$; б) $\cos^2 x + 3\sin x = 3$;
в) $4\cos x = 4 - \sin^2 x$; г) $8\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$.

167. а) $3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$; б) $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$;
в) $2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$; г) $2\operatorname{ctg} x - 3\operatorname{tg} x + 5 = 0$.

168. а) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$; б) $4\cos^2 x - 3 = 0$;
в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 0$; г) $4\sin^2 x - 1 = 0$.

Тигезләмәләрне чишегез (169—174).

169.— а) $3\sin^2 x+\sin x\cos x=2\cos^2 x$;
б) $2\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sin^2 x=0$;
в) $9\sin x\cos x-7\cos^2 x=2\sin^2 x$;
г) $2\sin^2 x-\sin x\cos x=\cos^2 x$.

170.— а) $4\sin^2 x-\sin 2x=3$; б) $\cos 2x=2\cos x-1$;
в) $\sin 2x-\cos x=0$; г) $\sin 2x+4\cos^2 x=1$.

171.— а) $2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\operatorname{ctg} x=2$;
в) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$; г) $\operatorname{tg} x=3\operatorname{ctg} x$.

172.— а) $\sin 2x+2\cos 2x=1$; б) $\sin^4\frac{x}{4}-\cos^4\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$;
в) $3\sin 2x+\cos 2x=2\cos^2 x$; г) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$.

173.— а) $\sin 4x+\sin^2 2x=0$; б) $\frac{3}{5\operatorname{tg} x+8}=1$;
в) $\frac{5}{3\sin x+4}=2$; г) $1-\sin 2x=\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2$.

174.— а) $\cos 5x-\cos 3x=0$; б) $\sin 7x-\sin x=\cos 4x$;
в) $\sin 5x-\sin x=0$; г) $\cos 3x+\cos x=4\cos 2x$.

Тигезләмәләр системаларын чишегез (175—176).

175.— а) $\begin{cases}x+y=\pi,\\ \cos x-\cos y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2},\\ \cos^2 x+\sin^2 y=2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+y=\pi,\\ \sin x+\sin y=1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{2},\\ \sin^2 x-\sin^2 y=1.\end{cases}$

176.— а) $\begin{cases}\sin x-\cos y=0,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{4},\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\frac{1}{6};\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sin x+\cos y=1,\\ \sin^2 x-\cos^2 y=1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{6},\\ \sin x\cos y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

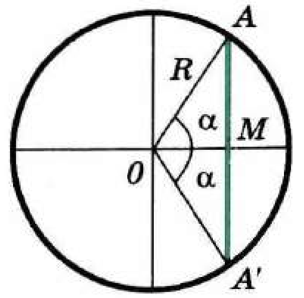
1. Почмакларны үлчәү берәмлекләренең килеп чыгуы турында. Почмакларны градусларда үлчәү безнең эрага кадәр күп еллар элек борынгы Вавилонда барлыкка килгән. Жрецлар Кояш үзенең көндезге юлын 180 «адымда» башкара, һәм, димәк, бер «адым» җәелгән почмакның өлешенә тигез дип исәпләгәннәр. Вавилонда алтмышарлы исәпләү системасы кабул ителгән була, ягъни, асылда, саннар, безнең унарлы системада кабул ителгәнчә, 10 санының түгел, бәлки 60 санының дәрәҗәләре суммасы рәвешендә язылганнар. Шуңа күрә табигый ки, почмакларны үлчәүнең тагын да ваграк берәмлекләрен кертү өчен, бер «адым» эзлекле рәвештә 60 өлешкә бүленгән.

Почмакларны үлчәүнең Вавилон системасы җитәрлек дәрәҗәдә җайлы булып чыга һәм Греция, Рим математикларында сакланып кала. Почмак зурлыкларының атамалары өчен без куллана торган терминнар, нигездә, латинчадан алынган. «Градус» сүзе латинча gradus (адым, дәрәҗә) дигәннән килеп чыккан. Minutus сүзенең латинчадан тәрҗемәсе «кечерәйтелгән» дигәнне белдерә. Нәһаять, secunda «икенче» мәгънәсендә тәрҗемә ителә. Монда түбәндәгеләр күздә тотыла: градусның 60 өлешкә, ягъни минутларга бүленүе — бу беренче бүленеш; минутның 60 секундка бүленүе — градусның икенче тапкыр бүленеше. Сирәк кулланыла торган секундның $\frac{1}{60}$ е атамасы — терцина, латинча tercina сүзе градусның «өченче» тапкыр бүленүен белдерә.

Почмак зурлыкларын хәзер кабул ителгәнчә тамгалау системасы XVI һәм XVII гасырлар тирәсендә киң тарала; алардан Н. Коперник һәм Т. Браге кебек атаклы астрономнар файдаланган. Ләкин әле К. Птолемей ук (безнең эраның II гасырында) градуслар санын — түгәрәк белән, минутлар санын — штрих, секундлар санын ике штрих белән тамгалаган.

Почмакларны үлчәүнең икенче берәмлеге — *радиан* — күптән түгел генә кертелә. Радиан терминын эченә алган беренче басма (бу имтихан билетлары була) 1873 елда Англиядә дөнья күрә. Башта нәкъ менә радианлы үлчәме күздә тотылуы тамга белән күрсәтелгән (мәсәлән, $\frac{\pi^R}{2}$ — бу $\frac{\pi}{2}$ радианлы почмак), ләкин күп тә үтми R (яки r) индексын төшереп калдыра башлыйлар. «Радиан» термины үзе латинча radius (энә, нур) сүзеннән алынган. Бер радианлы почмакның билгеләмәсен искә төшерсәк (дугасының озынлыгы әйләнә радиусына тигез булган үзәк почмак), мондый почмакны атау өчен «рад» тамырын сайлап алу үзеннән-үзе аңлашыла.

2. Тригонометрия тарихы турында. «Тригонометрия» сүзе беренче мәртәбә 1505 елда немец теологы һәм математигы Питискусның китап исемендә очрый. Ул грек сүзеннән килеп чыккан: τρίγωνον — өчпочмак, μετρεω — үлчәү. Икенче сүзләр белән



$$\sin\alpha = \frac{AM}{R} = \frac{AA'}{2R}$$

78 нче рәсем

әйткәндә, тригонометрия — өчпочмакларны үлчәү турындагы фән. Исеме чагыштырмача күптән түгел генә барлыкка килсә дә, хәзер тригонометриягә кертелә торган күп кенә төшенчә һәм мисаллар моннан инде ике мең еллар элек билгеле була.

Синус төшенчәсенең бик озын тарихы бар. Чынында өчпочмак һәм әйләнә кисемтәләренең төрле чагыштырмалары (асылда, тригонометрик функцияләр дә) безнең эрага кадәр III гасырда ук инде Борынгы Грециянең бөек математиклары — Евклид, Архимед, Аполлоний Пергский хезмәтләрендә очрыйлар. Рим периодында бу чагыштырмалар махсус исемнәргә ия булмасалар да, Менелай (безнең эраның I гасырында) тарафыннан җитәрлек дәрәҗәдә системалы рәвештә өйрәнелгән була. Мәсәлән, хәзерге α почмагының синусы α зурлыгындагы үзәк почмак таянган ярымхорда, яки икеләтелгән дуга хордасы буларак өйрәнелгән (78 нче рәсем).

Аннан соңгы периодта математика озак вакытлар буена һинд һәм гарәп галимнәре тарафыннан шактый актив үстерелә. Атап әйткәндә, IV—V гасырларда бөек һинд галиме Ариабхатаның (476—550 еллар тирәсендә) астрономиядән хезмәтләрендә инде махсус терминнар күренә башлый. (Һиндстанның Җир тирәли беренче иярчененә шушы галимнең исеме бирелгән.) *AM* кисемтәсен (78 нче рәсем) ул *ардхаджива* (*ардха* — яртысы, *джива* — җәя тәтесе — хорда шуны хәтерләтә) дип атый. Соңрак аның кыска джива атамасын куллану гадәткә кереп китән. IX гасырда *джива* (яки *джиба*) сүзе гарәп математиклары тарафыннан гарәпчәдән *джайб* (кабарынкылык) сүзенә алмаштырыла. XII гасырда математиклардан гарәпчә текстларны тәрҗемә иткәндә бу сүз латинча *синус* (sinus — бөгелеш, кәкрелек) сүзенә алмаштырыла.

Косинус сүзе исә күпкә яшьрәк. Косинус — ул латинча complementy sinus, ягъни «өстәмә синус» (яки, башкача әйтсәк, «өстәмә дуганың синусы»; $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ икәнен исегезгә төшерәбез) сүзләренең кыскартылып язылышы.

Тригонометрик функцияләр килеп керү белән, «өчпочмакларны үлчәү» мәсьәләсенең чикләве шактый киңәя. Шуңа күрә танылган математик Ф. Клейн (1849—1925) «тригонометрик» функцияләр турындагы белемнәрне башкача — *гониометрия* (латинча gonio сүзе «почмак» дигәнне белдерә) дип атарга тәкъдим итә. Ләкин бу атама кулланылышка кереп китми.

Тангенслар күләгәнең озынлыгын билгеләүгә мәсьәлә чишүгә бәйле рәвештә барлыкка килә. *Тангенс* (шулай ук *котангенс*, *секанс* һәм *косеканс*) X гасырда гарәп математигы Әбү-л-Вафа тарафыннан кертелә. Ул шулай ук тангенс һәм котангенсларны табу өчен беренче таблицаларны да төзи. Ләкин бу ачышлар озак вакытлар Европа галимнәренә билгеле булмый. Һәм тангенслар

XIV гасырда башта инглиз галиме Т. Бравердин, ә соңрак немец математигы, астроном Региомонтан (1467 ел) тарафыннан кабат ачыла. Латинча tanger (орыну) сүзеннән килеп чыгучы «тангенс» атамасы 1583 елда күренә башлый. Tangens — «орынучы» мәгънәсендә тәрҗемә ителә (исегезгә төшерегез: тангенслар сызыгы — берәмлек әйләнәгә орынма ул).

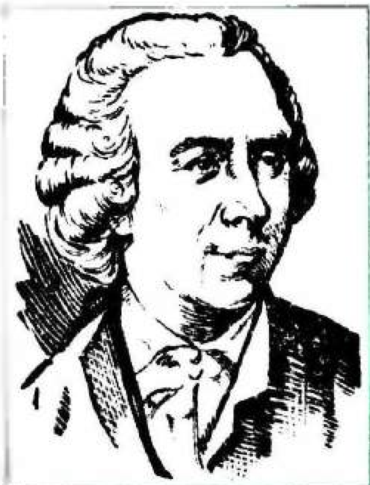
Хәзерге arcsin һәм arctg тамгаланышы 1772 елда Вена математигы Шерфер һәм атаклы француз галиме Ж. Л. Лагранж хезмәтләрендә кулланыла. Дөрес, берникадәр элегрәк аларны Я. Бернулли тикшергән була, ләкин ул башка символика куллана. Бу символлар исә XVIII йөз ахырында гына гомуми кулланылышка керә. «арк» кушымчасы латинча arcus (җәя, дуга) сүзеннән килеп чыккан, бу $\arcsin x$ ның мәгънә төшенчәсе белән тулысынча туры килә; мәсәлән, $\arcsin x$ ул синусы x ка тигез булган почмак (дуга диярге дә була).

Озак еллар буена тригонометрия геометриянең бер кисәге буларак үсә, ягъни без хәзер тригонометрик функциянең терминнары аша әйтеп бирә торган фактлар геометрик төшенчәләр, фаразлар аша әйтеп бирелгән һәм исбатланган. Ихтимал, астрономиядән практик кызыксыну тудырган мәсьәләләрне чишү (мәсәлән, судноның торган урынын билгеләү, Кояш, Ай тотылуларны алдан әйтү һ.б.) тригонометриянең үсешенә иң зур этәргеч биргәндер. Астрономнарны сферада яткан зур түгәрәкләрдән төзелгән сферик өчпочмакларның почмаклары белән яклары арасындагы бәйләнешләр кызыксындырган. Борынгы заман математикларының без IX класста шөгыльләнгән яссы өчпочмакларны чишү мәсьәләләренә караганда шактый авыр мәсьәләләрне дә (сферик геометрия турындагы китапларны укыгыз) чишә алуларын әйтеп китәргә кирәк.

Һәрхәлдә, сезгә тригонометриядән таныш формулаларның күбесе борынгы грек, һинд, гарәп математиклары тарафыннан геометрик формада ачылган һәм кабат ачылганнар. (Дөрес, тригонометрик функцияләрнең аермалары формулалары XVII гасырда гына билгеле була — аларны тригонометрик функцияләр белән исәпләүләрне җиңеләйтү өчен инглиз математигы Непер чыгара. Ә синусоиданың беренче рәсеме 1634 елда барлыкка килә.)

К. Птолемей тарафыннан синусларның беренче таблицасы төзелү (ул озак вакытлар хордалар таблицасы дип аталып йөртелгән) принципиаль әһәмияткә ия: гамәли мәсьәләләрнең күбесен, беренче чиратта астрономия мәсьәләләрен, практик чишү чарасы барлыкка килә.

Әзер таблицалар белән эш иткәндә яки калькулятордан файдаланганда без кайчандыр әле таблицаларның уйлап табылмаган булуы турында уйламыйбыз. Аларны төзү өчен, зур күләмдә исәпләү эшләре башкару таләп ителү белән бергә, таблицаларны төзү ысулын да уйлап табарга кирәк була. Птолемей таблицалары бишенче унарлы тамгага кадәр төгәллек белән төзелгәннәр.



Эйлер Леонард
(1707—1783)

XVIII йөзнең күренекле математигы. Швейцариядә туган. Озак еллар Россиядә яшәгән һәм эшләгән. Петербург Фәннәр академиясе члены. Эйлерның гаять зур фәнни мирасы математик анализ, геометрия, саннар теориясе, вариацион исәпләүләр, механика һәм математиканың башка куллану өлкәләренә караган искиткеч нәтиҗәләрне эченә ала.

XVIII йөзнең бөек математигы Л. Эйлер (1707—1783) чыгышы белән швейцарияле, озак еллар Россиядә эшләгән, Петербург Фәннәр академиясе члены, тригонометриягә хәзерге күренешне биргән. Нәкъ Эйлер беренче булып тригонометрик функцияләрнең безгә таныш билгеләмәләрен кертә, ирекле рәвештә алынган почмак функциясен тикшерә башлый, китерү формулаларын таба. Бу — Эйлер үзенең тормышы дәверендә математикада эшләргә өлгергән эшләренең бик кечкенә бер өлеше генә: ул 800 дән артык хезмәт калдыра, математиканың төрле өлкәләренә кергән һәм соңыннан классик теорема булып киткән күп кенә теоремаларны исбат итә. (1776 елда сукыраюга да карамастан, Эйлер гомеренең соңгы көннәренә кадәр яңадан-яңа хезмәтләрен әйтеп торып яздыруын дәвам итә.) Ләкин әгәр дә сез тригонометрик функцияләр белән геометрик формада, ягъни Эйлерга кадәрге күпбуын математиклар кебек үк, эш итәргә омтылып карасагыз, Эйлерның тригонометрияне системага салудагы хезмәтен бәяли алырсыз. Эйлердан соң тригонометрия исәпләүләр формасын ала: аерым мисаллар тригонометрик формулаларны формаль куллану юлы белән исбатлана башлый, ә исбатлаулар күпкә гадиләшә һәм җыйнаклана.

3. Функция төшенчәсе тарихыннан. Сез VII класста танышкан функция төшенчәсе чагыштырмача әле күптән түгел барлыкка килгән. Функция төшенчәсен кертү кирәклеген аңлау һәм аның җитәрлек дәрәҗәдә төгәл билгеләмәсен булдыру өчен берничә буын беренче классны математикларның тырышлыгы кирәк булган. XVII йөздә математикадагы революцион үзгәрешләр төрле илләр һәм халыкларның вәкиле булган күп санлы галимнәрнең хезмәтләре нәтиҗәсендә килеп чыккан. Шулай да беренче чиратта П. Ферма (1601—1665), Р. Декарт (1596—1650), И. Ньютон (1643—1727), Г. В. Лейбницның (1646—1716) исемнәрен телгә алырга кирәк.

Функция төшенчәсенең килеп чыгуы өчен кирәкле алшартлар XVII гасырның 30 нчы елларында, *аналитик геометрия* барлыкка килгәннән соң туа. Чөнки аналитик геометрия, Борынгы Греция

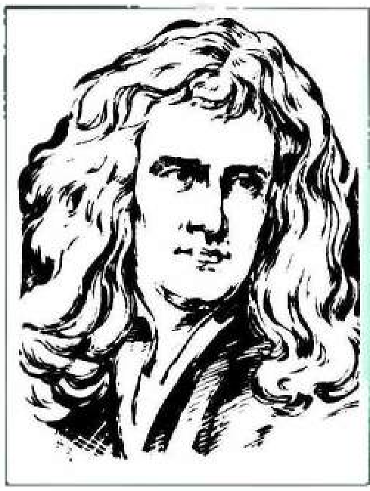
Декарт Рене
(1596—1650)

Бөек француз философы, математик. Аналитик геометрияне иҗат итүчеләрнең берсе. Үзгәрешле зурлык төшенчәсен керткән. Аның идеяләре күп санлы «картезианчылар» (Декартның латинчалаштырылган исеме — Картезий) тарафыннан дәвам иттерелә. Төп хезмәтләре — «Геометрия», «Метод турында фикерләүләр».

геометрларының классик методларыннан аермалы буларак, геометрик мәсьәләләрне чишүдә алгебраны актив кулланзы белән үзенчәлекле. (Геометриядән координаталар методы белән мәсьәләләр чишкәндә сез, асылда, аналитик геометрия методларыннан файдаланасыз.) Француз математигы П. Ферма һәм Р. Декарт, бер-берсенә бәйсез рәвештә, бер үк вакытта диярлек яссылыкта координаталар системасын кертү һәм фигураларны аларның тигезләмәләре аша бирү нәтиҗәсендә геометриянең күп мәсьәләләрен геометрик фигураларның тигезләмәләрен тикшерүгә кайтарып калдыру мөмкинлеген күрсәтәләр. Үзенең «Геометрия» һәм «Метод турында фикерләүләр» дигән китапларында яңа методның җентекле аңлатмасын биргән Декарт хөрмәтенә турыпочмаклы координаталар системасы соңрак *Декарт координаталар системасы* дип атала башлый. Шул ук вакытта алгебра да формалаша, нәкъ менә сез хәзер алгебраик аңлатмаларның рәвешен үзгәрткәндә, тигезләмәләр һәм текстлы мәсьәләләр чишкәндә һ.б. куллана торган *«хәвефле исәпләүләр»* барлыкка килә.

Бөек инглиз галиме, математик һәм физик И. Ньютон хәрәкәт итүче нокта координаталарының вакытка бәйлелеген тикшереп, асылда инде функцияләрне тикшерү белән шөгыльләнгән була. Бу төшенчәне Ньютон үзе кертмәсә дә, аның мәһимлеген яхшы аңлый. Мәсәлән, 1676 елда ул болай дип билгеләп үтә: «Әгәр мин фигураларны тикшерүдән читкә китеп, барысын да ординаталарны гына тикшерүгә (ягъни чынлыкта вакытның функциясенә) кайтарып калдырмаган булсам, билгеле, бу гомуми нәтиҗәләрне таба алмаган булыр идем».

«Функция» термины үзе беренче мәртәбә бөек немец математигы һәм философы Г. Лейбницның кулъязмасында (1673 елда) очрый, ә аннары басылып та чыга (1692 ел). Латин сүзе function «эшләү», «үтәү» мәгънәсендә тәрҗемә ителә (*fungor* фигыле шулай ук «күрсәтү, аңлату» дип тәрҗемә ителә). Лейбниц бу төшенчәне ноктаның яссылыктагы торышына бәйле параметрларны исемләү өчен кертә. Лейбницның үзенең шәкерте — Швейцария математигы И. Бернулли (1667—1748) белән үзара язышу бары-



Ньютон Исаак
(1643—1727)

Бөек инглиз галиме. Г. Лейбниц белән бер үк вакытта математик анализ нигезләрен эшли. Классик механиканы иҗат итүче. Ньютон оптикада, физика һәм математиканың башка бүлекләрендә гүзәл ачышлар ясый. Аның төп хезмәте — «Табигать белеме философиясенең математик башлангычлары» — табигать фәннәре үсешенә гаять зур этәргеч бирә.

шында әкренләп функциянең аналитик аңлатма булуына ышаналар һәм 1718 елда ул мондый билгеләмә бирә: «Үзгәрешле зурлыкның функциясе дип нинди дә булса ысул белән шул үзгәрешледән һәм даимиләрдән төзелгән зурлык атала».

Л. Эйлер үзенең «Анализга кереш» (1748 ел) китабында функциягә мондый билгеләмә бирә: «Үзгәрешле зурлык функциясе — шул үзгәрешле зурлыктан һәм саннардан яки даими зурлыклардан нинди дә булса ысул белән төзелгән аналитик аңлатма ул».

Эйлер шулай функция өчен хәзер кабул ителгән тамгаланышларны да кертә. Санлы функциянең бирелү ысулына бәйле булмаган хәзерге төшенчәсе рус математигы Н. И. Лобачевский (1834 ел) һәм немец математигы Л. Дирихле (1837 ел) тарафыннан бер-берсенә бәйсез рәвештә бирелә. Бу билгеләмәләрдәге төп фикер шуннан гыйбарәт: һәр x ка y ның билгеле бер кыйммәте ничек тиңдәш итеп куелуы әһәмиятле түгел (атап әйткәндә, аналитик аңлатмасын бирү мәҗбүри түгел), бары тик бу тиңдәшлекнең анықланган булуы гына мөһим.

Ирекле рәвештә алынган билгеләнү өлкәсе һәм кыйммәтләре өлкәсе белән бирелгән (санча кыйммәтләр булуы мәҗбүри түгел — 29 нчы битне карагыз) функциянең хәзерге заман төшенчәсе, асылда, бөтенләй күптән түгел, күплек теориясен иҗат итүче Г. Канторның (1845—1918) хезмәтләреннән соң, агымдагы гасырның беренче яртысында гына барлыкка килә.

Функция төшенчәсе катлаулы һәм, күреп үткәнебезчә, бик озын гадәти үсеш юлы үтә. Яңа абстракт төшенчәне кертү кирәклегенә төшенү өчен исә аны күп кенә конкрет мәсьәләләрне чишү барышында аерып күрсәтү, аның мәгънәсен мөмкин кадәр төгәл чагылдыра торган билгеләмә бирү таләп ителә.

Математиканың конкрет, катлаулы мәсьәләләре белән эш иткәндә һәм аны практикада кулланганда, математиклар функция төшенчәсенең кирәклеге белән очрашалар. Бу көчле яңа тикшерү аппаратын — интеграль һәм дифференциаль исәпләүләрне иҗат итү барышында килеп чыга. Аның элементлары белән сез киләсе

бүлектә танышырсыз. Эйлер үзәк төшенчәсе функция дип игълан иткән («Чиксезләр анализы тулысынча үзгәрешле зурлык һәм аларның функцияләре белән эш итә») интеграль һәм дифференциаль исәпләүләрнең ачылуы математиканың мөмкинлекләрен кискен арттыра.

Кабатлау өчен сораулар һәм мәсьәләләр

1. 1) 1 радианлы почмак нинди почмак ул? Почмакның радианлы һәм градуслы үлчәмнәрен бәйли торган формулаларны языгыз.

2) Почмак зурлыгын радианлы үлчәмдә күрсәтегез:
а) $18°$; б) $-250°$; в) $-360°$; г) $225°$.

3) Почмак зурлыгын градуслы үлчәмдә күрсәтегез:
а) π; б) $-2,5$; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) 3.

2. 1) α санының синусы һәм косинусына билгеләмә бирегез.

2) Берәмлек әйләнәдә P_α ноктасын билгеләгез. α тигез а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{5\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{6}$ булса, $\sin\alpha$ һәм $\cos\alpha$ ның кыйммәтләрен табыгыз (калькулятор яки таблица кулланмыйча).

3) α тигез а) $23°24'$; б) $-1,7$; в) $-108°6'$; г) $0,8$ булса, $\sin\alpha$ һәм $\cos\alpha$ ның кыйммәтләрен табыгыз.

3. 1) α санының тангенсы һәм котангенсына билгеләмә бирегез. $\operatorname{tg}\alpha$ һәм $\operatorname{ctg}\alpha$ ның нинди кыйммәтләре өчен билгеләнгән?

2) α тигез а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$; в) $-\frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{3}$ булса, $\operatorname{tg}\alpha$ һәм $\operatorname{ctg}\alpha$ ны табыгыз (калькулятор яки таблица кулланмыйча).

3) α тигез а) $1,7$; б) $-0,4$; в) $2,3$; г) $-0,5$ булса, $\operatorname{tg}\alpha$ һәм $\operatorname{ctg}\alpha$ ның кыйммәтләрен табыгыз.

4. 1) Бер аргументның тригонометрик функцияләре кыйммәтләрен бәйли торган формулаларны языгыз.

2) Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$;

б) $\frac{\cos^3\alpha + \sin^3\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{\cos\alpha}$; в) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$;

г) $\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha)$.

3) Бердәйлекне исбатлагыз:

а) $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$; б) $\frac{1 - (\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$;

в) $\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$; г) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

5. 1) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ ның тамгалары P_α ноктасы координаталарның кайсы чирегендә ятуга ничек бәйле? Бу тамгаларны әйтеп чыгыгыз.

2) Тамгасын билгеләгез:

а) $\sin(-212°)$ һәм $\mathrm{ctg}\,\frac{7\pi}{9}$; б) $\cos 305°$ һәм $\mathrm{tg}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$;

в) $\cos(-105°)$ һәм $\mathrm{ctg}\,\frac{11\pi}{9}$; г) $\sin(-324°)$ һәм $\mathrm{tg}\,\frac{9\pi}{4}$.

3) Бер тригонометрик функциянең кыйммәте һәм α ның кайсы аралыкныкы икәне бирелгәндә, калган өч төп тригонометрик функциянең кыйммәтләрен табыгыз:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; б) $\mathrm{ctg}\,\alpha = -3$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

в) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; г) $\cos\alpha = \frac{1}{7}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

6. 1) Китерү формулаларын истә калдыру өчен, мнемоник кагыйдәне әйтеп бирегез. Берничә китерү формуласын языгыз.

2) Иң кечкенә уңай аргументның тригонометрик функциясе кыйммәтенә китерегез:

а) $\sin\left(-\frac{13\pi}{8}\right)$; б) $\mathrm{ctg}\,\frac{21\pi}{13}$; в) $\mathrm{tg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$; г) $\cos\frac{8\pi}{3}$.

3) Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\sin\frac{7\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{tg}\,\frac{7\pi}{4}$; б) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\,\mathrm{tg}(-\alpha)}{\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$;

в) $\mathrm{ctg}\,\frac{9\pi}{4} + \sin\frac{37\pi}{12} - \cos\frac{7\pi}{12}$; г) $\dfrac{\sin(\alpha-\pi)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{ctg}(\alpha-\pi)}$.

7. 1) Сумманың (аерманың) синусы, косинусы, тангенсы формулаларын языгыз.

2) Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ һәм $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ булса, $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

б) $\cos\frac{\pi}{12}$ һәм $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{12}$;

в) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ һәм $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ булса, $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

3) Бердәйлекне исбатлагыз:

а) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin\alpha$;

б) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 2\,\mathrm{tg}\,2x$;

в) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)} = \sqrt{3}$;

г) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta$.

8. **1) Икеләтелгән аргумент формулаларын языгыз.**
2) Исәпләгез:

а) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ булса, $\sin 2\alpha$;

б) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha < 0$ булса, $\operatorname{tg} 2\alpha$;

в) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$ булса, $\cos 2\alpha$;

г) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ булса, $\operatorname{tg} 2\alpha$ ны исәпләп чыгарыгыз.

3) Бердәйлекне исбатлагыз:

а) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}(2\cos^2\alpha - 1) = \sin 2\alpha$; б) $\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

в) $1 - (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = \sin 2\alpha$; г) $\operatorname{tg}\alpha\,(1+\cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

9. **1) Синусларның (косинусларның) суммасы һәм аермасы формулаларын языгыз.**
2) Калькулятор яки таблицадан файдаланмыйча исәпләп чыгарыгыз:

а) $\cos 117^\circ + \cos 63^\circ$; б) $\frac{\sin 70^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 40^\circ}$;

в) $\cos\frac{19\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$; г) $\sin 112^\circ + \sin 248^\circ$.

3) Бердәйлекне исбатлагыз:

а) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

б) $(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)^2 + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)^2 = 4\cos^2\alpha$;

в) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$;

г) $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4\sin 3\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha$.

10. **1) Ярты аргумент формулаларын языгыз.**
2) Табыгыз:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ булса, $\cos\frac{\alpha}{2}$;

б) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ булса, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

в) $\sin\alpha = -\frac{3}{7}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ булса, $\sin\frac{\alpha}{2}$;

г) $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ булса, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

3) Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sin^2\alpha$; б) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$;

в) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; г) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

11. **1) Санлы функция, аның билгеләнү өлкәсе, кыйммәтләре өлкәсе дип нәрсәгә әйтәләр?**

2) Функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз:

а) $y = \frac{3x+1}{x^2-7x+12}$; б) $y = \frac{1}{\sin x}$; в) $y = \sqrt{4-x^2}$; г) $y = \frac{1}{\cos x}$.

3) Функциянең кыйммәтләре өлкәсен табыгыз:

а) $y = 3\cos x - 1$; б) $y = \frac{1}{x^3} + 1$; в) $y = 2 - \sin x$; г) $y = 3 - x^4$.

12. **1) Функциянең графигы нәрсә ул?**

2) Функциянең графигын төзегез:

а) $y = \frac{2}{x-1}$; б) $y = 2 - \cos x$; в) $y = \sqrt{x+2}$; г) $y = \sin x - 1$.

3) f функциясе графигының координата күчәрләре белән кисешү нокталарын табыгыз:

а) $f(x) = x^3 - 4x$; б) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$;

в) $f(x) = 1 - x^4$; г) $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

13. **1) P күплегендә үсә (кими) торган функциянең билгеләмәсен әйтеп бирегез.**

2) Графигы 79 нчы рәсемдә сурәтләнгән функциянең үсү һәм кимү аралыкларын табыгыз.

3) Функциянең үсү һәм кимү аралыкларын табыгыз:

а) $y = 1 + 0{,}5\cos x$; б) $y = -\frac{3}{x-1}$;

в) $y = 2x^2 + 4x$; г) $y = 1{,}5\sin x - 1$.

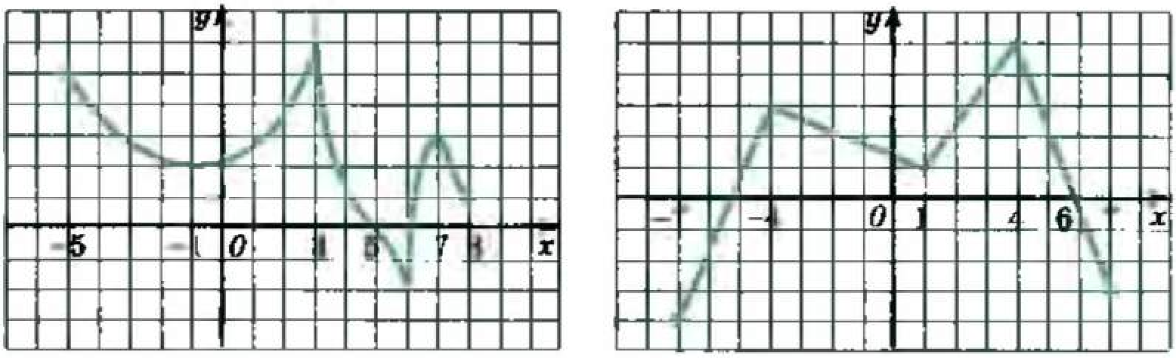
14. **1) Максимум ноктасына, минимум ноктасына билгеләмә бирегез. Функциянең экстремумы дип нәрсәгә әйтәләр?**

2) Графиклары 79 нчы рәсемдә сурәтләнгән функцияләрнең максимум нокталарын, минимум нокталарын күрсәтегез.

3) Функциянең максимум нокталарын һәм минимум нокталарын табыгыз:

а) $y = (x-3)^2 + 2$; б) $y = \cos^2 x$;

в) $y = 1 - (x+2)^2$; г) $y = \sin^2 x$.



79 нчы рәсем

15. 1) Функцияне тикшергәндә нинди мәсьәләләр чишелә?
2) Функцияне тикшерегез:

а) $y = \sin x - 2$; б) $y = -\frac{6}{x-3}$;

в) $y = x^2 - 4x + 3$; г) $y = 2\cos x + 1$.

3) Бу функцияләрнең графикларын төзегез.

16. 1) Җөп һәм так функциягә билгеләмә бирегез. Аларның графиклары нинди үзлеккә ия?
2) Түбәндә күрсәтелгән функцияләрнең кайсылары — җөп, кайсылары так икәнен ачыклагыз:

а) $y = \frac{\sin x}{x}$; б) $y = x + x^5$;

в) $y = x\cos x$; г) $y = 3x^2 + x^6$.

3) Түбәндәге шартлар билгеле булганда f функциясенең графигын төзегез:
а) f — так, $f(x) = \cos x - 1$, $x \in (-\infty; 0]$;
б) f — җөп, $f(x) = (x - 1)^3$, $x \in [0; \infty)$;
в) f — җөп, $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty; 0]$;
г) f — җөп, $f(x) = 4x - x^2$, $x \in [0; \infty)$.

17. 1) Периодик функция, функциянең периоды дип нәрсәгә әйтәләр?
2) Функция нинди иң кечкенә уңай периодка ия?
а) $y = \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x$; в) $y = \sin x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.
3) Функциянең иң кечкенә уңай периодын табыгыз:
а) $y = \sin\frac{x}{2}$; б) $y = \cos(4x + 1)$; в) $y = \operatorname{tg} 2x$; г) $y = \cos\frac{x}{3}$.

18. 1) Синус функциясенең төп үзлекләрен санап чыгыгыз.
2) Синус функциясенең үзлекләреннән файдаланып, саннарны үсә бару тәртибендә урнаштырыгыз:
а) sin 0,3, sin 1,1, sin (−1,2); б) sin 4, sin 3,6, sin 2;
в) sin 0,4, sin (−0,9), sin 1,4; г) sin 4,3, sin 2,9, sin 1,9.
3) Функцияне тикшерегез һәм аның графигын төзегез:

а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \sin\frac{x}{3}$;

в) $y = 1 + 1{,}5\sin x$; г) $y = \sin 2x$.

19. 1) Косинус функциясенең төп үзлекләрен санап чыгыгыз.
2) Косинус функциясенең үзлекләреннән файдаланып, саннарны үсә бару тәртибендә урнаштырыгыз:
а) cos 0,3, cos (−2,9), cos 1,8; б) cos 5,3, cos 4,4, cos 6,2;
в) cos 0,5, cos (−1,3), cos 3; г) cos 6,1, cos 3,5, cos 4,9.
3) Функцияне тикшерегез һәм аның графигын төзегез:

а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = -\cos x$;

в) $y = 2\cos x - 1$; г) $y = \cos\frac{x}{2}$.

20. 1) Тангенс функциясенең төп үзлекләрен санап чыгыгыз.
2) Тангенс функциясенең үзлекләреннән файдаланып, саннарны үсә бару тәртибендә урнаштырыгыз:
а) $\operatorname{tg}(-0{,}4)$, $\operatorname{tg}1{,}2$, $\operatorname{tg}0{,}8$; б) $\operatorname{tg}2{,}8$, $\operatorname{tg}3{,}9$, $\operatorname{tg}1{,}6$;
в) $\operatorname{tg}0{,}6$, $\operatorname{tg}(-1{,}3)$, $\operatorname{tg}(-0{,}7)$; г) $\operatorname{tg}4{,}3$, $\operatorname{tg}1{,}7$, $\operatorname{tg}2{,}5$.
3) Функцияне тикшерегез һәм аның графигын төзегез:
а) $y = -\operatorname{tg}x$; б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; в) $y = 2\operatorname{tg}x$; г) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

21. 1) Тамыр турында теореманы әйтеп бирегез.
2) Санның арксинусы билгеләмәсен әйтеп бирегез. Арксинус нинди саннар өчен билгеләнгән?
3) Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:
а) $\arcsin(-1) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
в) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 1$; г) $\arcsin 0 + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

22. 1) Санның арккосинусы һәм арктангенсы билгеләмәләрен әйтеп бирегез. Санның арккосинусы һәм арктангенсы нинди саннар өчен билгеләнгән?
2) Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:
а) $\arccos(-1) + \operatorname{arctg}\sqrt{3}$; б) $\arccos\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{2}$;
в) $\operatorname{arctg}(-1) - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arccos 0 + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

23. 1) Иң гади тригонометрик тигезләмәләр: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg}x = a$ ны чишү формулаларын языгыз.
2) Тигезләмәне чишегез:
а) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}x + 1 = 0$;
в) $2\sin x - \sqrt{2} = 0$; г) $2\cos x - 1 = 0$.

24. Тигезләмәне чишегез:
1) а) $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$; б) $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg}x + 3 = 0$;
в) $2\cos^2 x - 5\cos x = 3$; г) $2\sin^2 x + \sin x = 0$.
2) а) $6\sin^2 x - 2\sin 2x = 1$; б) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $4\sin x\cos x = \sqrt{3}$; г) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$.

25. Тигезсезлекне чишегез (башта берәмлек әйләнәдә x бирелгән тигезсезлекне канәгатьләндерә торган P_x нокталары күплеген күрсәтегез):
1) а) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $2\cos x + 1 < 0$; в) $\operatorname{tg}x < \sqrt{3}$.
2) а) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} > -\frac{1}{4}$; б) $\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$;
в) $2\sin^2\frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}$; г) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

II бүлек

Чыгарылма һәм аны куллану

§ 4. Чыгарылма

12. Функциянең үсемтәсе

Еш кына безне нинди дә булса зурлыкның кыйммәте түгел, бәлки аның ничек *үзгәрүе* кызыксындыра. Мәсәлән, пружинаның сыгылу көче пружинаның озынаюына пропорциональ; эш ул энергия үзгәрүе була; уртача тизлек — ул күчүнең бу күчү башкарылган вакыт аралыгына чагыштырмасы һ.б.

f функциясенең ниндидер бер билгеләнгән ноктадагы кыйммәтен аның x_0 тирәлегендә ятучы төрле нокталардагы кыйммәтләре белән чагыштыру өчен, $f(x) - f(x_0)$ аермасын, «аргумент үсемтәсе» һәм «функция үсемтәсе» төшенчәләрен кулланып, $x - x_0$ аермасы аша күрсәтү җайлы була. Аларның мәгънәсен аңлатыйк.

x — билгеләнгән ниндидер x_0 ноктасы тирәлегенең ятучы ирекле нокта булсын. $x - x_0$ аермасы *бәйсез үзгәрешленең* (яки *аргументның*) x_0 *ноктасындагы үсемтәсе* дип атала һәм Δx аша тамгалана. Шулай итеп,

$$\Delta x = x - x_0,$$

моннан $x = x_0 + x$ икәнлеге килеп чыга.

x_0 башлангыч кыйммәте x үсемтәсен алды, дип тә әйтәләр. Моның нәтиҗәсендә f функциясенең кыйммәте

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

зурлыгына үзгәрә.

Бу аерма f *функциясенең* x_0 ноктасындагы Δx үсемтәсенә тиңдәш *үсемтәсе* дип атала һәм Δf символы белән тамгалана («дельта эф» дип укыла), ягъни билгеләмә буенча

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \qquad (1)$$

моннан

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f.$$

x_0 билгеләнгәндә Δf үсемтәсенең Δx тан функция булуына игътибар итегез.

Δf ны бәйле үзгәрешленең үсемтәсе дип тә атыйлар һәм $y = f(x)$ функциясе өчен Δy аша тамгалыйлар.

1 нче мисал. Әгәр дә $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ һәм: а) $x = 1{,}9$; б) $x = 2{,}1$ булса, Δx һәм Δf ның x_0 ноктасындагы үсемтәсен табыйк.

а) $x = x - x_0 = 1{,}9 - 2 = -0{,}1$;
$\Delta f = f(1{,}9) - f(2) = 1{,}9^2 - 2^2 = -0{,}39$.

б) $\Delta x = x - x_0 = 2{,}1 - 2 = 0{,}1$;
$\Delta f = f(2{,}1) - f(2) = 2{,}1^2 - 2^2 = 0{,}41$.

2 нче мисал. Аргументның үсемтәсе Δx ка тигез булса, $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясенең x_0 ноктасындагы үсемтәсе Δf ны табыйк.

(1) формула буенча табабыз:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} =$$
$$= \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

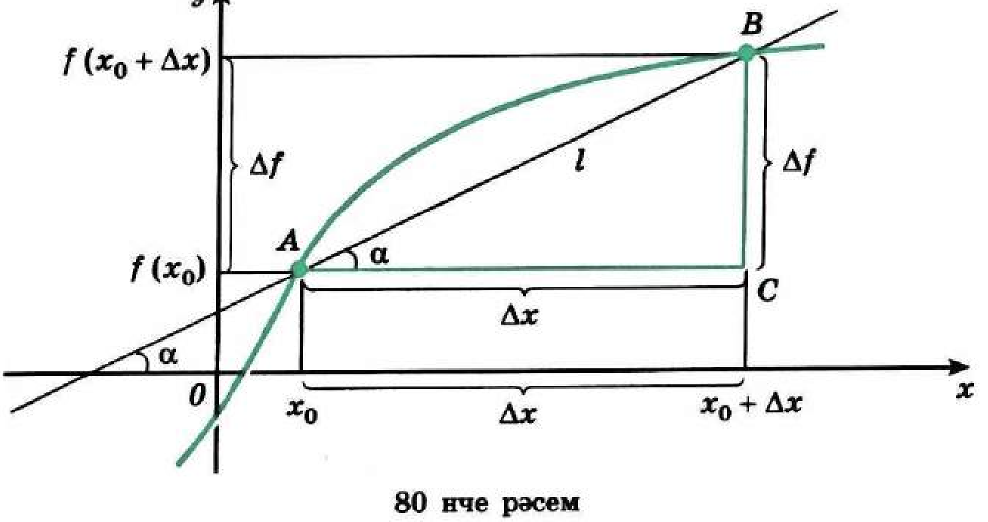
3 нче мисал. Кабыргасы a булган куб бирелгән. Әгәр дә кабырганың озынлыгын үлчәгәндә җибәрелгән хата Δx булса, бу кубның күләмен исәпләүдәге хата ΔV ны табыйк.

Үсемтәнең билгеләмәсе буенча $x = a + \Delta x$, ул вакытта $\Delta V = V(x) - V(a) = (a + \Delta x)^3 - a^3 = 3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

$y = f(x)$ функциясенең графигын тикшерик. 80 нче рәсемгә карап, Δx һәм Δf (Δf үсемтәсен Δy аша да тамгалыйлар) үсемтәләренең геометрик мәгънәләрен аңларга мөмкин.

f функциясе графигының теләсә нинди ике ноктасы аша үтүче l турысын f графигына карата *кисүче* дип атыйлар. $(x_0; y_0)$ һәм $(x; y)$ нокталары аша үтүче кисүченең почмакча коэффициенты $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ гә тигез. Аны Δx һәм Δy үсемтәләре аша күрсәтү уңай (80 нче рәсем):

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



80 нче рәсем

($y = kx + b$ турысының почмакча коэффициенты абсциссалар күчәре белән бу туры арасындагы α почмагының тангенсына тигез икәнлеген искә төшерик.)

Үсемтәләрнең без кулланган тамгалары ярдәмендә $(t_0;\ t_0 + \Delta t)$ вакыт аралыгында хәрәкәтнең уртача тизлеген аңлату да җайлы була. Әгәр дә нокта туры буйлап хәрәкәт итеп, аның координатасы $x(t)$ билгеле булса,

$$V_{ур}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Бу формула $\Delta t < 0$ өчен дә ($[t_0 + \Delta t;\ t_0]$ аралыгы өчен дә) дөрес. Чыннан да, бу очракта ноктаның күчеше $x(t_0) - x(t_0 + \Delta x)$ ка тигез; вакыт аралыгы озынлыгы — Δt, һәм, димәк,

$$V_{ур}(\Delta t) = \frac{x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)}{-\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}\ \text{була.}$$

Моңа охшатып, $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ аңлатмасын очлары x_0 һәм $x_0 + \Delta x$ булган аралыкта *функция үзгәрүенең уртача тизлеге* дип атыйлар.

Күнегүләр

177. — а) Турыпочмаклыкның яклары 15 м һәм 20 м га тигез. Әгәр дә: 1) аның кечерәк ягын 0,11 м га озынайтсак; 2) зуррак ягын 0,2 м га озынайтсак, турыпочмаклык периметрының һәм аның мәйданының үсемтәсен табыгыз.
б) Түгәрәкнең радиусы 2 см. Әгәр дә радиусның озынлыгын үлчәгәндә хата: 1) 0,2 см; 2) ΔR; 3) 0,1 см; 4) h ка тигез булса, түгәрәк мәйданын исәпләгәндә җибәрелгән хатаны табыгыз.

178. — а) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0,1$;

б) $f(x) = 2x^2 - 3$, $x_0 = 3$, $\Delta x = -0,2$;

в) $f(x) = 3x + 1$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 0,01$;

г) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$

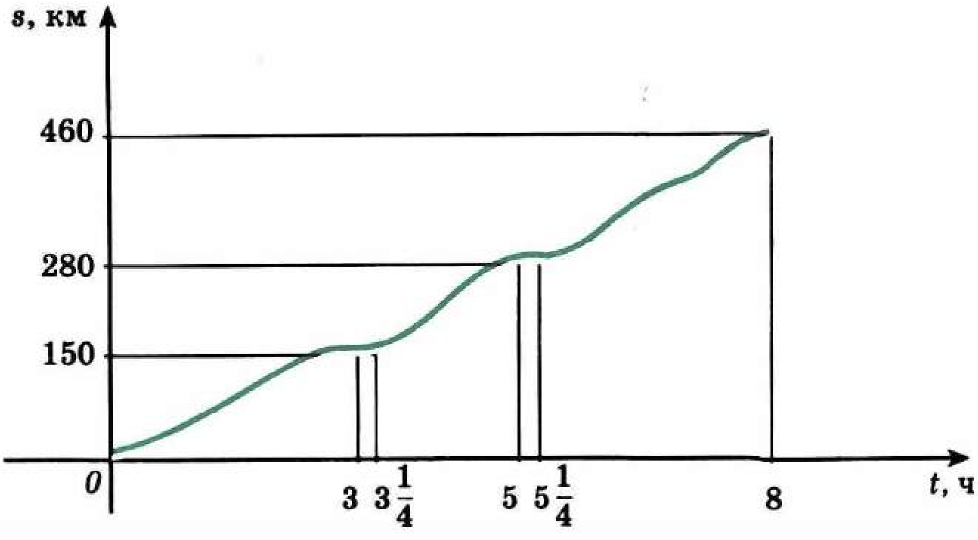
булса, f функциясенең x_0 ноктасындагы үсемтәсен табыгыз.

179. а) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{3\pi}{4}$;

б) $f(x) = 4x - x^2$, $x_0 = 2,5$, $x = 2,6$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$

булса, Δx һәм Δf функцияләренең x_0 ноктасындагы үсемтәләрен табыгыз.



81 нче рәсем

180. — Әгәр: а) $f(x) = 1 - 3x^2$; б) $f(x) = ax + b$; в) $f(x) = 2x^2$; г) $f(x) = -\frac{1}{x}$ булса, f функциясенең x ноктасындагы үсемтәсен x_0 һәм Δx аша күрсәтегез.

181. — 81 нче рәсемдә автобус хәрәкәтенең графигы күрсәтелгән. Вакытның түбәндәге аралыкларында хәрәкәтнең уртача тизлеген табыгыз.
а) [0; 3]; б) [3; 5]; в) [3,25; 5,25]; г) [0; 8].

182. — Нокта кординаталар турысы буенча вакытның теләсә кайсы моментында координатасы $3 + 12t - t^2$ булырлык итеп хәрәкәт итә. Вакытның түбәндәге I аралыгы өчен нокта нинди юнәлештә һәм күпмегә күчәр: а) [2; 2,5]; б) [7; 8]; в) [4; 5]; г) [6; 8]? Аның уртача тизлеге күпме булыр?

183. — (1; 3) ноктасы аша үтүче һәм почмакча коэффициентлары түбәндәгечә булган турылар төзегез:

а) −1 һәм 2; б) $\frac{1}{2}$ һәм −3; в) 3 һәм −2; г) $-\frac{1}{2}$ һәм −2.

Һәр очрак өчен бу турыларның абсциссалар күчәре белән нинди почмак (җаенкеме яки кысынкымы) төзегәнлеген ачыклагыз.

184. — $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ функциясе графигын кисүче һәм абсциссалары x_1 һәм x_2 булган нокталар аша үтүче турының почмакча коэффициентларын табыгыз. Әгәр:
а) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$;
в) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; г) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$
булса, кисүче Ox күчәре белән нинди (кысынкымы яки җаенкеме) почмак төзер?

185. — Кубның x кабыргасы x үсемтәсе алган. Кубның тулы өслеге мәйданының үсемтәсен табыгыз.

186.— Δf һәм $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ны x_0 һәм Δx аша күрсәтегез һәм табылган аңлатмаларны үзгәртегез:

а) $f(x) = -x^3 + 3x$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$;

в) $f(x) = x^3 - 2x$; г) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

187.— Хәрәкәт законы түбәндәгечә булса, туры буйлап хәрәкәт итүче ноктаның $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$ аралыгында уртача тизлеген табыгыз:

а) $x(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$; б) $x(t) = -at + b$;

в) $x(t) = \frac{gt^2}{2}$; г) $x(t) = at - b$.

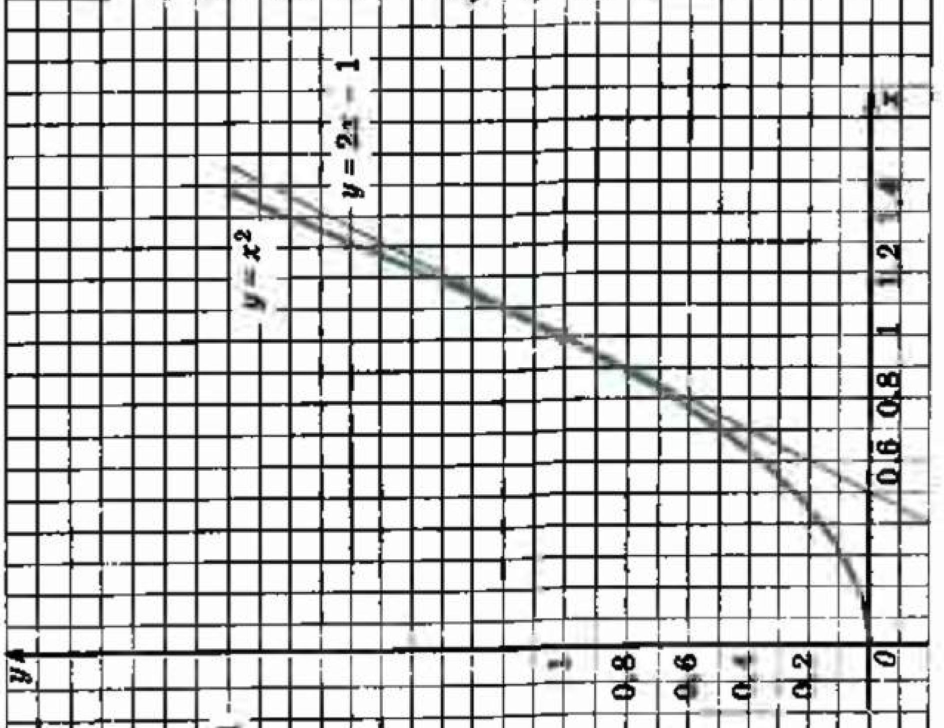
13. Чыгарылма төшенчәсе

1. Функция графигына орынма турында төшенчә. Сезгә практикадан билгеле булган барлык функцияләрнең графиклары шома кәкре сызык рәвешендә сурәтләнде. Андый кәкреләрнең геометрик яктан нинди булуын без $y = x^2$ функциясенең 1 гә якын булган аргументның кыйммәтләре өчен төзелгән графигына конкрет мисал ярдәмендә карарбыз. Моның өчен масштаб берәмлеген (82 нче рәсем масштабы белән чагыштырганда) 10 тапкыр зурайтыйк; $y = x^2$ графигын бу масштаб белән [0,5; 1,5] кисемтәсендә төзик (83 нче рәсем). Шуннан соң, масштабны тагын 10 тапкырга зурайтып, функциянең графигын [0,95; 1,05] кисемтәсендә төзик (84 нче рәсем). Бу рәсемнән күренгәнчә, 1 гә якын кыйммәтләр алганда $y = x^2$ функциясенең графигы $y = 2x - 1$ турысының кечкенә кисемтәсеннән артык аерылып тормаганлыгын, ягъни бирелгән функция графигының нокталары бу туры буйлап төзелгән кебек булуын күрербез.

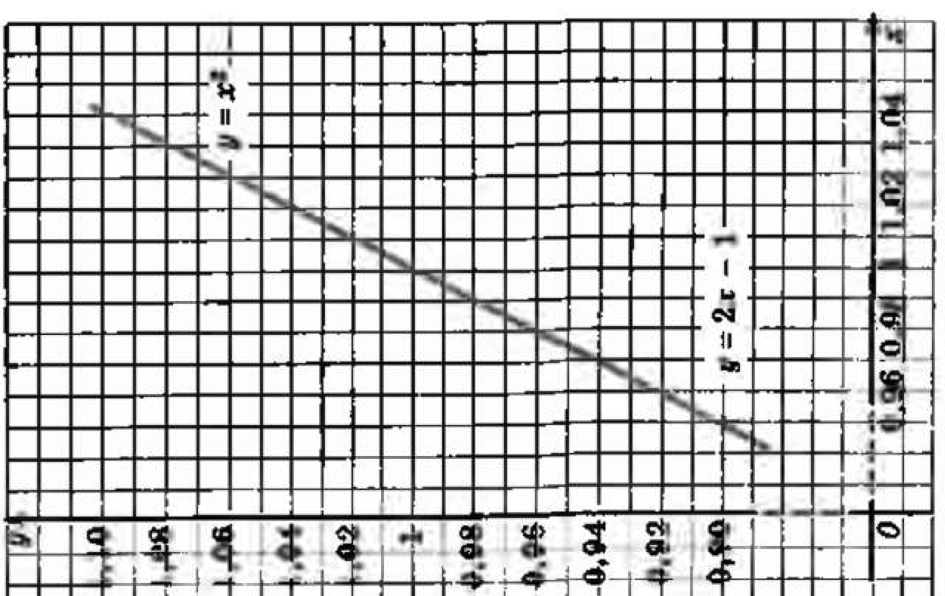
Теләсә нинди шома кәкре мондый үзлеккә ия була: аның теләсә нинди ирекле кечкенә кисәге нинди дер l турысының кисемтәсеннән артык аерылып тормый. (ЭХМ нарда кулланыла торган график төзүчеләрнең шома функция графикларын һәр ноктада кечкенә кисемтәләр төзеп ясаулары кызыклы.) Шома кәкренең һәр ноктасы өчен бу ноктага тиңдәш турының (ягъни кәкренең кечкенә кисәген аның кисемтәсе ярдәмендә без күз алдына китерә торган турының) билгеләнгән булуын әйтеп китик. Моны аңлау өчен, түбәндәге күргәзмә иллюстрациягә игътибар итик.

Безгә синусоида, парабола яки гипербола һ.б. тиз генә төзү өчен трафарет ясарга кирәк булсын, ди. Моның өчен башта миллиметрлы кәгазьдә, мөмкин кадәр төгәлрәк итеп, бу кәкренең графигын төзиләр. Кайчы ярдәмендә трафаретны төгәл итеп кисеп алгач, аның чиге безгә кирәкле кәкре була. Кайчының һәр ноктадагы торышы (ә ул бу ноктада эзләнелгән турыны бирә дә инде) төгәл

82 нче рәсем



83 нче рәсем



84 нче рәсем

билгеләнгән: кайчы кискәндә бу торыштан читкә тайпылса, чыгынты хасил була яки трафарет киселә.

Практик яктан x x_0 гә якын кыйммәтләр алганда, f функциясенең графигы аның кисемтәсе белән туры килгәч һәм $(x_0; f(x_0))$ ноктасы аша үтүче турыны f *функциясе графигының* $(x_0; f(x_0))$ ноктасындагы *орынмасы* дип атыйлар. Алга табигый бер мәсьәлә килеп баса: бирелгән функциянең графигына бирелгән ноктадагы орынмасының торышын төгәл билгеләргә кирәк була.

f турысының бер ноктасының координаталары билгеле — бу $(x_0; f(x_0))$ ноктасы. Орынманың почмакча коэффициенты k ны табасы кала.

Мисал өчен, $y = x^2$ функциясен карап китик. Аның графигы x_0 ноктасының кечкенә тирәлегендә l орынмасының кисемтәсенә якын була. Шуңа күрә $(x_0; x_0^2)$ һәм $(x_0 + \Delta x; (x_0 + \Delta x)^2)$ нокталары аша үтүче кисүчеләрнең почмакча коэффициентлары, Δx нульгә чиксез якынлашса (ягъни x ноктасы x_0 гә бик якын килсә), k почмакча коэффициентына якын булалар.

$(x_0; y(x_0))$ һәм $(x_0 + \Delta x; y(x_0 + \Delta x))$ нокталары аша үтүче кисүченең почмакча коэффициенты $k(\Delta x)$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ка тигез (12 нче пункт), монда Δy — y функциясенең x_0 ноктасындагы Δx үсемтәсенә тиңдәш үсемтәсе. $y = x^2$ функциясе өчен

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \qquad (1)$$

тигезлеге дөрес була.

Орынманың почмакча коэффициентын табу өчен, Δx нульгә якынайганда, $k(\Delta x)$ ның нинди кыйммәткә якын булуын ачыклыйсы кала. $k(\Delta x)$ ның $2x_0$ гә якын булуы үзеннән-үзе аңлашыла. Димәк, Δx ның бик кечкенә кыйммәтләре өчен кисүченең почмакча коэффициенты $2x_0$ гә якын. $x_0 = 1$ булса, $k = 2$. Эзләнелә торган орынманың (1; 1) ноктасы аша үтүен исәпкә алсак, орынманың тигезләмәсе $y = 2x - 1$ була дигән нәтиҗәгә киләбез. Пунктның башында ук без, фикер йөртеп, шушы ук нәтиҗәгә килгән идек.

2. Хәрәкәтнең моменталь тизлеге. Хәзер сезгә физикадан билгеле булган мәсьәләгә кайтыйк. Ноктаның туры буенча хәрәкәтен карап китик. Вакытның t моментында ноктаның x координатасы $x(t)$ га тигез булсын. Физика курсындагы кебек үк, хәрәкәт тигез һәм салмак башкарыла, дип уйлыйк. Башкача әйтсәк, сүз реаль тормышта күзәтелә торган хәрәкәтләр турында бара. Ачыклык өчен сүз автомобильнең шоссе юлда туры сызыклы кисәге буенча хәрәкәте турында бара, дип уйлыйк.

Мәсьәләне болай куйыйк: билгеле $x(t)$ бәйлелеге буенча вакытның t моментында автомобиль хәрәкәт иткән тизлекне табыйк (бу тизлекнең *моменталь тизлек* дип аталганлыгын сез инде беләсез). $x(t)$ бәйлелеге сызыкча бәйлелек булса, җавап бик гади:

вакытның теләсә кайсы моменты өчен тизлек үтелгән юлның вакытка чагыштырмасына тигез була. Хәрәкәт тигез хәрәкәт булмаса, мәсьәлә катлаулана.

Вакытның теләсә кайсы моментында автомобильнең ниндидер (бу момент өчен) билгеле бер тизлек белән хәрәкәт итү факты ачык. Вакытның t_0 моментында спидометрның фоторәсемен эшләсәк, бу тизлекне җиңел таба алырбыз (спидометр t моменты өчен моменталь тизлекнең кыйммәтен күрсәтә). $x(t)$ билгеле булса, $v_{\text{моменталь}}(t_0)$ ны табу өчен, физика дәресләрендә сез болай эшли идегез.

Δt зурлыгындагы t_0 дән $t_0 + \Delta t$ га кадәр булган вакыт арасындагы уртача тизлек билгеле (12 нче пункт):

$$v_{\text{урта}}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Без фараз иткәнчә, җисем салмак хәрәкәт итә. Шуңа күрә болай уйлау табигый булыр: Δt бик кечкенә булса, вакытның бу аралыгында тизлек үзгәрмәс. Ул вакытта (бу аралыкта) уртача тизлек без эзләгән $v_{\text{моменталь}}(t_0)$ кыйммәтеннән аерылып тормас. Ә бу моменталь тизлекне билгеләүнең түбәндәге ысулына китерә: $v_{\text{урта}}(\Delta t)$ ны табарга һәм аның, Δt нульдән аерылып тормый дип санап, нинди кыйммәткә якын булуын билгеләргә кирәк була.

Конкрет мисал карап китик. v_0 тизлеге белән югарыга ыргытылган җисемнең моменталь тизлеген табыйк. Аның t моментындагы биеклеге безгә билгеле $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ формуласы буенча табыла.

1) Башта Δh ны табыйк:

$$\Delta h(t) = v_0(t_0 + \Delta t) - \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} - v_0 t_0 + \frac{gt_0^2}{2} = v_0 \Delta t - g t_0 \Delta t - \frac{g(\Delta t)^2}{2}.$$

$$2)\ v_{\text{урта}}(\Delta t) = \frac{(v_0 - gt_0)\Delta t - g\frac{(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t} = v_0 - gt_0 - \frac{g\Delta t}{2}. \qquad (3)$$

3) Δt ны нульгә якынайтып кечерәйтик (моны кыскача Δt нульгә омтыла дип әйтәләр. Ул болай языла: $\Delta t \to 0$).

Бу очракта $-\frac{g\Delta t}{2}$ нең шулай ук нульгә омтылганлыгы, ягъни $\Delta t \to 0$ өчен $-\frac{g\Delta t}{2} \to 0$ икәнлеге җиңел аңлашыла.

v_0 һәм $-gt_0$, димәк, $v_0 - gt_0$ зурлыклары да даими булганлыктан, (3) формуладан табабыз:

$$\Delta t \to 0 \text{ өчен } v_{\text{урта}}(\Delta t) \to v_0 - gt_0.$$

Шулай итеп, ноктаның бу вакытның t_0 моментындагы моменталь тизлеге

$$v_{\text{моменталь}}(\Delta t) = v_0 - gt_0$$

формуласы буенча табыла.

3. Чыгарылма. Абсциссасы $x_0 = 1$ булган ноктада параболага орынманың почмакча коэффициентын исәпләү һәм v_0 тизлеге белән югарыга ыргытылган җисемнең моменталь тизлеген табу турындагы без карап киткән ике мәсьәләнең әйтелешләре төрле иде. Ләкин без һәр ике очракта да бер схемага таянып эш иттек. Ирекле f функциясенә һәм аның билгеләнү өлкәсендәге теләсә нинди x_0 ноктасына карата кулланган бу схеманы болай тасвирлап була.

1) f функциясен бирүче формула ярдәмендә функциянең x_0 ноктасындагы үсемтәсен табабыз:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ *аермалы чагыштырмасы* өчен аңлатма табабыз:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

аннары аны үзгәртәбез — гадиләштерәбез, Δx ка кыскартабыз һ.б.

3) Δx нульгә омтыла дип санап, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ның нинди санга омтылуын ачыклыйбыз.

Шулай итеп, табылган сан кайвакытта (физикадагы кебек) *функциянең x_0 ноктасында үзгәрү тизлеге* яки (ешрак) *f функциясенең x_0 ноктасындагы чыгарылмасы* дип атала.

Билгеләмә. ***f функциясенең x_0 ноктасындагы чыгарылмасы* дип Δx нульгә омтылганда**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

аермалы чагыштырмасы омтылган сан атала.

f функциясенең x_0 ноктасындагы чыгарылмасы $f'(x_0)$ дип тамгалана («x_0 ноктасында эф штрих» дип укыла).

1 нче мисал. $f(x) = x^3$ функциясенең x_0 ноктасындагы чыгарылмасын табыйк.

Югарыда күрсәтелгән схема буенча эш итик.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ $(\Delta x \neq 0)$.

3) $3x_0^2$ кушылучысы — даими, ә $\Delta x \to 0$ өчен $3x_0\Delta x \to 0$ һәм $(\Delta x)^2 \to 0$ икәнлеге ачык, димәк, $3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \to 0$. Шулай итеп, табабыз:

$$\Delta x \to 0 \text{ өчен } \frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3x_0^2.$$

Димәк,

$$f'(x_0) = 3x_0^2.$$

2 нче мисал. $f(x) = kx + b$ функциясенең (k һәм b — даими) x_0 ноктасындагы чыгарылмасын табыйк.

1) $\Delta f = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$.

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = k$.

3) k — даими, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ теләсә нинди Δx өчен даими сан, димәк, $\Delta x \to 0$ өчен $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to k$. Моннан $(kx + b)' = k$.

x_0 ноктасындагы чыгарылмасы булган функция бу ноктада *дифференциалланучы* функция дип атала. f функциясе дифференциаллана торган нокталар күплеге D_1 булсын. Һәр $x \in D_1$ санына $f'(x)$ санын тиңдәш куеп D_1 күплегендә билгеләнгән яңа функция табарбыз. Бу функция $y = f(x)$ функциясенең *чыгарылмасы* дип атала һәм f' яки y' дип тамгалана.

Бирелгән f функциясенең чыгарылмасын табу *дифференциаллау* дип атала.

Бу пунктта без дифференциаллауның түбәндәге формулаларын таптык:

$(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(kx + b)' = k$.

$(kx + b)' = k$ формуласында $k = 0$, $b = C$ дип уйлап, биредә C — ирекле даими сан, $C' = 0$, ягъни *даими санның чыгарылмасы нульгә тигез* икәнлеге табыла.

Күнегүләр

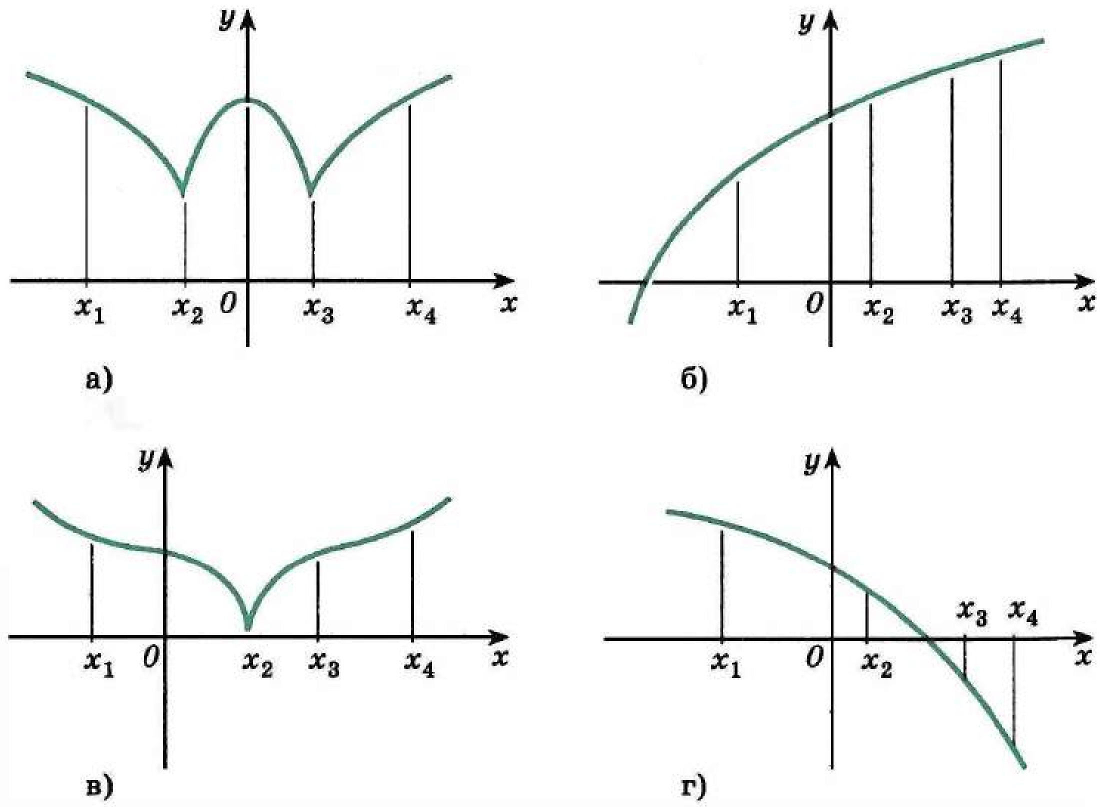
188.— f функциясенең графигын төзегез һәм аңа абсциссасы x_0 булган нокта аша үтүче орынма үткәрегез. Рәсемнән файдаланып, бу орынманың почмакча коэффициентының тамгасын билгеләгез:

а) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $x_0 = 0$, $x_0 = 3$, $x_0 = 2$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$, $x_0 = -2$, $x_0 = 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 2$.

189.— Функция графигына (85 нче рәсем) абсциссалары x_1, x_2, x_3, x_4 булган нокталар аша үтүче орынманың (әгәр ул булса) почмакча коэффициентының тамгасын билгеләгез. Бу орынма абсциссалар күчәре белән нинди почмак (кысынкымы яки җәенкеме) төзер? Нинди нокталар тирәлегендә функциянең графигы шома кәкре була.

190.- Функциянең үсү һәм кимү аралыкларын языгыз (86 нчы рәсем). Графикта күрсәтелгән һәр ноктада орынманың почмакча коэффициентының тамгасын билгеләгез.



85 нче рәсем

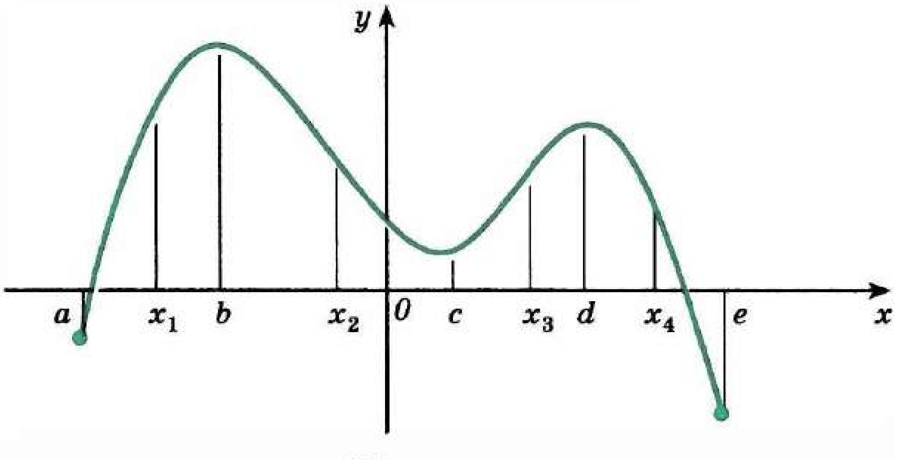
191. а) $f(x) = 2x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}01;$
б) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}01$ булса, x_0 ноктасында $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ны исәпләгез.

192. а) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 8x_0 + 4\Delta x$, $x_0 = 2;\ -1;$

б) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$, $x_0 = 1;\ -21;$

в) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -2x_0 + \Delta x$, $x_0 = 1;\ 2$

булса, $\Delta x \to 0$ өчен $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ чагыштырмасы нинди санга омтылыр?



86 нчы рәсем

193. — а) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2; -1{,}5$;

б) $f(x) = 4 - 2x$, $x_0 = 0{,}5; -3$;

в) $f(x) = 3x - 2$, $x_0 = 5; -2$;

г) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2{,}5; -1$ булса, дифференциаллауның, 13 нче пунктта табылган формулаларын кулланып, f функциясенең x_0 ноктасындагы чыгарылмасын табыгыз.

194. — Чыгарылма билгеләмәсеннән файдаланып,

а) $f(x) = x^2 - 3x$ ның -1; 2;

б) $f(x) = 2x^3$ ның 0; 1;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$ нең $-$ 2; 1;

г) $f(x) = 4 - x^2$ ның 3; 0 нокталарындагы чыгарылмаларын табыгыз.

195. — а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 3$; в) $x_0 = 0$; г) $x_0 = 2$ булса, $f(x) = x^2$ функциясе графигының абсциссасы x_0 булган нокта аша үтүче орынмасының тигезләмәсен табыгыз.

196. — Билгеләмәдән файдаланып, $x(t)$ законы буенча турысызыклы хәрәкәт итүче ноктаның t моментындагы моменталь тизлеген табыгыз:

а) $x(t) = -t^2 + 8t$, $t_0 = 6$; б) $x(t) = 3t^2 + 2$, $t_0 = 2$;

в) $x(t) = \frac{t^2}{4}$, $t_0 = 4$; г) $x(t) = 5t - 3$, $t_0 = 10$.

14. Функциянең өзлексезлеге һәм чикләмә аша күчү төшенчәсе

t ноктасында моменталь тизлекне табу турындагы мәсьәләгә кабат кайтыйк (13 нче пунктта (3) формуласын кара). $v_{урта}(\Delta t) = v_0 - gt_0 - g\cdot\frac{\Delta t}{2}$ функциясе $\Delta t = 0$ булганда билгеләнә алмый. Ләкин $L = v_0 = gt_0$ саны өчен $|\Delta t|$ кечерәйгәндә $v_{урта}(\Delta t) - L$ аермасы нульгә якынлаша. Шуңа күрә дә без $\Delta t \to 0$ өчен $v_{урта}(\Delta t) \to v_0 - gt_0$ дип яздык.

Гомумән, $f(x) - L$ аермасы теләсә никадәр кечкенә булса, ягъни $|f(x) - L|$ $|\Delta x|$ кечерәйгәндә теләсә нинди $h > 0$ дән кечерәк була алса, x x_0 *гә омтылганда* f *функциясе* L *санына омтыла*, дип әйтәләр, биредә $\Delta x = x - x_0$. (Моменталь тизлекне табу турындагы мәсьәләдәге кебек үк, $x = x_0$ кыйммәте каралмый.)

Билгеле, $x \to x_0$ урынына $\Delta x \to 0$ дип тә язарга мөмкин. f функциясе буенча L санын табу *чикләмә аша күчү* дип атала. Сез чикләмә аша күчү белән башлыча түбәндәге төп ике очракта эш итәрсез.

Беренче очрак — аермалы $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ чагыштырмасында чикләмә аша күчү, ягъни чыгарылма табу. Бу очрак белән сез алдагы пунктта таныштыгыз.

Икенче очрак функциянең өзлексезлеге төшенчәсе белән бәйләнгән. Әгәр $x \to x_0$ өчен $f(x) \to f(x_0)$ булса, функция x_0 *ноктасында өзлексез*, диләр. Биредә $f(x) - L = f(x) - f(x_0) = \Delta f$, $|\Delta f|$ бик кечкенә $|\Delta x|$ өчен кечкенә була, ягъни аргументның x_0 ноктасындагы кечкенә үзгәрешләренә функциянең кечкенә үзгәрешләре тиңдәш була. Сезгә билгеле булган барлык элементар функцияләр үзләренең билгеләнү өлкәләренең һәр ноктасында өзлексез булалар. Мондый функцияләрнең графиклары билгеләнү өлкәсенә кергән һәр аралыкта өзлексез кәкреләр белән сурәтләнәләр. Графикларны сез һәрвакытта кулланылган «нокталар буенча» төзү юлы шуңа нигезләнгән дә инде. Төгәлрәк әйткәндә, биредә без тикшергән функциянең, чыннан да, өзлексез булуын алдан ачыкларга кирәк була. Бик гади очракларда мондый тикшерүне өзлексезлек билгеләмәсенә нигезләнеп алып баралар.

1 нче мисал. Сызыкча $f(x) = kx + b$ функциясенең санлы турының һәр ноктасында өзлексез булуын исбат итик.

Безгә кечкенә $|\Delta x|$ лар өчен $|\Delta f|$ ның теләсә нинди $h > 0$ дән кечерәк була алуын күрсәтергә кирәк. Ләкин $|\Delta f| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| = |k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b)| = |k||\Delta x|$ һәм $|\Delta f|$ $h > 0$ дән $k \neq 0$ өчен $\Delta x < \frac{h}{|k|}$ итеп алсак кына кечерәк булыр ($k = 0$ өчен теләсә нинди Δx ны алырга була).

2 нче мисал. $f(x) = \sqrt{x}$ функциясенең x_0 ноктасында $x_0 > 0$ өчен өзлексез булуын исбат итик.

Башта без Δx ны $|\Delta x| \leqslant x_0$ булырлык итеп сайларга мөмкин икәнлеген күрсәтеп китик, ул вакытта $\sqrt{x} = \sqrt{x_0 + \Delta x}$ билгеләнә. Аермасын табыйк:

$$|\Delta f| = \left|\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}\right| < \frac{|\Delta x|}{\sqrt{x_0}}.$$

Әгәр $|\Delta x|$ ны $\sqrt{x_0}h$ нан кечерәк (без әйтеп киткәнчә, x_0 дән кечерәк) итеп алсак, $|\Delta f|$ ның $h > 0$ дән кечерәк булуы күренә.

Моменталь тизлекне табу мәсьәләсендә $v_{\text{моменталь}}(t_0)$ саны $v_{\text{урта}}(\Delta t)$ функциясе нульдә $v_{\text{моменталь}}$ саны белән «тутырылганнан» соң бу ноктада өзлексез функциягә әверелерлек итеп билгеләнгән иде. Орынманың почмакча коэффициентын табу мәсьәләсендә дә шул ук хәл $g(0) = 2x_0$ дип санасак, $g(\Delta x) = 2x_0 + \Delta x$ функциясе бу ноктада өзлексез функциягә әверелә.

Алдагы пункттагы мисаллардан яңа операция — чикләмә аша күчүнең — билгесез зурлыкларны табуның яңа чарасы булып торганлыгы күренә. Бу бүлектә без аннан киң файдаланырбыз. Чикләмә аша күчү кагыйдәләрен әйтеп китик (аларны математик анализ курсларында исбат итәләр).

> **1 нче кагыйдә.** f функциясе x_0 ноктасында өзлексез булса, $\Delta x \to 0$ өчен $\Delta f \to 0$.

> **2 нче кагыйдә.** f функциясенең x_0 ноктасында чыгарылмасы булса, $\Delta x \to 0$ өчен $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$.

1 нче һәм 2 нче кагыйдәләр f функциясенең һәм чыгарылманың x_0 ноктасында өзлексез булу турындагы билгеләмәләрдән турыдан-туры килеп чыгалар.

> **3 нче кагыйдә.** $x \to x_0$ өчен $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ булсын. Ул вакытта $x \to x_0$ (ягъни $\Delta x \to 0$) өчен:
> а) $f(x) + g(x) \to A + B$;
> б) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$;
> в) $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$ өчен).

Өзлексез f һәм g функцияләре өчен

$$A = f(x_0),\ B = g(x_0),$$

һәм бу кагыйдәләр x_0 ноктасында өзлексез функцияләрнең суммасы, тапкырчыгышы һәм өлеше (өлеш очрагында $g(x) \neq 0$) x_0 ноктасында өзлексез булуларын аңлаталар.

Чикләмә аша күчү кагыйдәләре функцияләренең өзлексезлеген исбатлаганда һәм дифференциаллау формулаларын чыгарганда киң кулланылалар.

3 нче мисал. $h(x) = 10x + \sqrt{x}$ функциясенең $(0; \infty)$ аралыгының теләсә нинди x_0 ноктасында өзлексез булуын исбатлыйк.

$f(x) = 10x$ һәм $g(x) = \sqrt{x}$ функцияләренең өзлексез булуы 1 нче һәм 2 нче мисалларда исбат ителгән иде. Шулай булгач, h функциясе өзлексез ике функциянең суммасы буларак өзлексез була (3 нче а кагыйдәсе).

4 нче мисал. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ икәнлеген исбатлыйк, биредә $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Ирекле x_0 ноктасы өчен

$$\Delta f = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \Delta x}}$$

(2 нче мисалны кара).

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \Delta x}}$.

3) 1 нче кагыйдә буенча $\Delta x \to 0$ өчен $\sqrt{x_0 + \Delta x} \to \sqrt{x_0}$, чөнки $\sqrt{x}$ функциясе x_0 ноктасында өзлексез (2 нче мисалны кара), шуңа

күрә $\Delta x \to 0$ өчен $\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \Delta x} \to 2\sqrt{x_0}$ (3 нче а кагыйдәсе, буенча) һәм $\Delta x \to 0$ өчен $\frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \Delta x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (3 нче в кагыйдәсе, буенча). Шулай итеп, теләсә нинди уңай x өчен $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. □

Күнегүләр

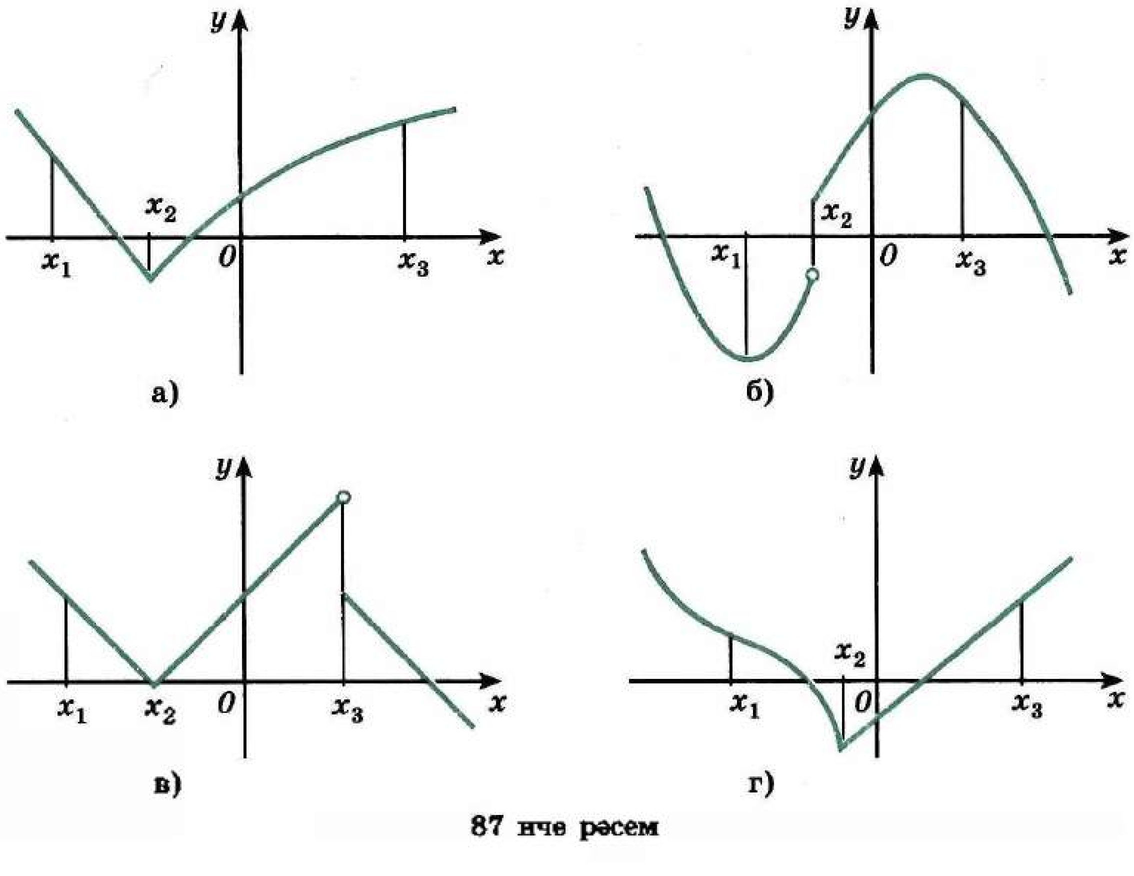
197. — Графигы 87 нче рәсемдә күрсәтелгән функция x_1, x_2, x_3 нокталарының һәркайсында өзлексез булырмы?

198. — f функциясенең графигын төзегез. Әлеге функциянең билгеләнү өлкәсендә функция өзлексез булмаган нокта бармы?

а) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leqslant -1 \text{ өчен,} \\ 1 - x^2, & x > -1 \text{ өчен;} \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leqslant 1 \text{ өчен,} \\ 2x - 1, & x > 1 \text{ өчен;} \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 1 \text{ өчен,} \\ \frac{1}{x}, & x \geqslant 1 \text{ өчен.} \end{cases}$



87 нче рәсем

199. — f функциясе бирелгән аралыкның һәр ноктасында өзлексез булырмы?

а) $f(x) = x^3 - 4x$, $(-\infty; \infty)$; б) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$, $[2; \infty)$;

в) $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $[-10; 20]$;

г) $f(x) = 5x - \sqrt{x}$, $(0; \infty)$.

200. — а) $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $x \to 0$, $x \to 2$;

б) $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$, $x \to 1$, $x \to 4$;

в) $f(x) = 4 - \frac{x}{2}$, $x \to -2$, $x \to 0$;

г) $f(x) = 4x - \frac{x^2}{4}$, $x \to -1$, $x \to 4$

булса, f функциясе нинди санга омтыла?

201. — $x \to 3$ өчен $f(x) \to 1$, $g(x) \to -2$ икәнлеге билгеле, $x \to 3$ булганда функция нинди санга омтыла?

а) $3f(x)g(x)$; б) $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}$;

в) $4f(x) - g(x)$; г) $(3 - g(x))f(x)$.

202. — $x \to -1$ өчен $f(x) \to 3$, $g(x) \to -0{,}5$ икәнлеге билгеле. $x \to -1$ булганда, функция омтылган санны табыгыз:

а) $\frac{f(x)}{(g(x))^2}$; б) $(f(x) - g(x))^2$;

в) $(f(x))^2 + 2g(x)$; г) $\frac{(g(x))^2}{f(x)-2}$.

203. — Функция нинди санга омтыла?

а) $x \to 4$ булганда, $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x-3}$;

б) $x \to -1$ булганда, $f(x) = \frac{x^3-3x}{x^2-2x+7}$;

в) $x \to 2$ булганда, $f(x) = \frac{5-2x}{2+x}$;

г) $x \to -1$ булганда, $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$.

204. — Квадратның ягы 0,01 дм төгәллек белән үлчәнсә, аның периметры нинди төгәллек белән табылган булыр?

205. — Төзек өчпочмакның периметрын 0,03 дм төгәллек белән табу өчен, аның ягын нинди төгәллек белән үлчәү җитә?

206. — Әйләнә озынлыгын 0,06 дм төгәллек белән исәпләү өчен, аның радиусын нинди төгәллек белән үлчәргә кирәк?

207. — $x \to a$ булганда, $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ икәнлеге билгеле. Чикләмә аша күчү кагыйдәсен кулланып исбатлагыз:

а) $Cf(x) \to C \cdot A$, биредә C — даими сан;

б) $f(x) - g(x) \to A - B$;

в) $(f(x))^2 - (g(x))^2 \to A^2 - B^2$;

г) $(f(x))^n \to A^n$, биредә $n \in Z$.

15. Чыгарылмаларны исәпләү кагыйдәләре

1. Дифференциаллауның төп кагыйдәләре. Чыгарылмаларны исәпләүнең берничә кагыйдәсен чыгарыйк. Бу пунктта u һәм v функцияләренең һәм аларның чыгарылмаларының кыйммәтләре x_0 ноктасында кыскача болай тамгалана: $u(x_0) = u$, $v(x_0) = v$, $u'(x_0) = u'$, $v'(x_0) = v'$.

1 нче кагыйдә. u һәм v функцияләре x_0 ноктасында дифференциаллансалар, аларның суммасы да бу ноктада дифференциаллана һәм

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Кыскача болай әйтәләр: *сумманың чыгарылмасы чыгарылмаларның суммасына тигез.*

1) Исбатлау өчен башта функцияләр суммасының без карап киткән x_0 ноктасындагы үсемтәсен исәплик:

$$\Delta(u + v) = u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) + v(x_0)) =$$
$$= (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) = \Delta u + \Delta v.$$

2) $\dfrac{\Delta(u + v)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

3) u һәм v функцияләре x_0 ноктасында, ягъни $\Delta x \to 0$ булганда дифференциалланалар,

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u', \ \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'.$$

Ул вакытта $\Delta x \to 0$ булганда $\dfrac{\Delta(u + v)}{\Delta x} \to u' + v'$ (3 нче a кагыйдә, чикләмәләрне исәпләү кагыйдәләрен кара — 14 нче п.) ягъни $(u + v)' = u' + v'$.

Лемма. Әгәр f функциясе x_0 ноктасында дифференциаллланса, ул чагында бу ноктада функция өзлексез була: $\Delta x \to 0$ булганда $\Delta f \to 0$, ягъни $\Delta x \to 0$ булганда $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.

Чыннан да, $\Delta x \to 0$ булганда $\Delta f = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x \to f'(x_0) \cdot 0$, чөнки $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$, ә $\Delta x \to 0$.

Шулай итеп, $\Delta x \to 0$ булганда $\Delta f \to 0$, ягъни дифференциаллаучы функцияләр өчен $\Delta x \to 0$ булганда $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.

2 нче кагыйдә. Әгәр u һәм v функцияләре x_0 ноктасында дифференциалланса, аларның тапкырчыгышы да бу ноктада дифференциаллана һәм

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

1) Башта тапкырчыгышның үсемтәсен табыйк:

$$\Delta(uv) = u(x_0 + \Delta x)\,v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)\,v(x_0) =$$
$$= (u(x_0) + \Delta u)(v(x_0) + \Delta v) - u(x_0)\,v(x_0) =$$
$$= u(x_0)\,v(x_0) + \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v - u(x_0)\,v(x_0) =$$
$$= \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

2) $\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v(x_0) + u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$.

3) u һәм v функцияләре $\Delta x \to 0$ булганда x_0 ноктасында дифференциалланганга күрә $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, $\Delta u \to 0$. Шуңа күрә $\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} \to u'v(x_0) + u(x_0)v' + 0 \cdot v' = u'v(x_0) + u(x_0)v'$, ягъни $(uv)' = u'v + uv'$. Моны исбатларга кирәк иде дә.

Нәтиҗә. Әгәр u функциясе x_0 ноктасында дифференциалланса, ә C — даими булса, Cu функциясе дә бу ноктада дифференциаллана һәм

$$(Cu)' = Cu'.$$

Кыскача болай әйтәләр: *даими тапкырлаучыны чыгарылма тамгасы алдына чыгарырга мөмкин.*

Исбатлау өчен икенче кагыйдәдән һәм 13 нче пункттан билгеле булган факттан файдаланабыз: $C' = 0$.

$$(Cu)' = C'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'.$$

3 нче кагыйдә. u һәм v функцияләре x ноктасында дифференциалланса һәм v функциясе бу ноктада нульгә тигез булмаса, $\frac{u}{v}$ өлеше дә ул ноктада дифференциаллана һәм

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Башта $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ формуласын чыгарыйк.

1) $\frac{1}{v}$ функциясенең үсемтәсен табыйк:

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{1}{v(x_0)} = \frac{v(x_0) - v(x_0 + \Delta x)}{v(x_0)\,v(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta v}{v(x_0)\big(v(x_0) + \Delta v\big)}.$$

2) Моннан

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x}=\frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0)(v(x_0)+\Delta v)}.$$

3) $\Delta x \to 0$ өчен $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$ (чөнки v x_0 ноктасында дифференциаллана), $\Delta x \to 0$ (без исбатлаган лемма буенча). Шуңа күрә

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} \to \frac{-v'}{v \cdot v}=-\frac{v'}{v^2}, \text{ ягъни } \left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}.$$

Хәзер, функцияләр тапкырчыгышының чыгарылмаларын табу кагыйдәсен кулланып, өлешнең чыгарылмасын табабыз:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(u\cdot\frac{1}{v}\right)'=u'\cdot\frac{1}{v}+u\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{u'}{v}+u\cdot\frac{-v'}{v^2}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

1 нче мисал. Түбәндәге функцияләрнең чыгарылмаларын табыйк: а) $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$.

а) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{x'}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$, шуңа күрә $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)'=(x^2)'-\left(\frac{1}{x}\right)'=2x-$
$-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x+\frac{1}{x^2}$;

б) $\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)'=\frac{(x^2)'(x^3+1)-x^2(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{2x(x^3+1)-x^2((x^3)'+1)'}{(x^3+1)^2}=$
$=\frac{2x(x^3+1)-x^2(3x^2+0)}{(x^3+1)^2}=\frac{2x^4+2x-3x^4}{(x^3+1)^2}=\frac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}.$

2. Дәрәҗәле функция чыгарылмасы. x^n дәрәҗәле функциясенең чыгарылмасын исәпләү формуласы болай була (монда n саны 1 дән зуррак булган ирекле натураль сан):

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \qquad (1)$$

x^2 функциясенең чыгарылмасы формуласы безгә инде билгеле: $(x^2)'=2x$.

Тапкырчыгышны дифференциаллау формуласын кулланып табабыз:

$$(x^3)'=(x^2\cdot x)'=(x^2)'x+x^2(x)'=2x\cdot x+x^2\cdot 1=3x^2;$$
$$(x^4)'=(x^3\cdot x)'=(x^3)x+x^3(x)'=3x^2\cdot x+x^3\cdot 1=4x^3.$$

Хәзер $(x^2)'=2x^{2-1}$, $(x^3)'=3x^{3-1}$, $(x^4)'=4x^{4-1}$ икәнен искәртеп китик, ягъни $n=2$, 3 һәм 4 өчен (1) формула исбатланды. Шуңа охшаш итеп исәпләүләрне дәвам итсәк, (1) формуланың $n=5$, 6 һ.б. өчен дә дөрес икәнлегенә ышанырбыз.

(1) формуланың теләсә нинди натураль $n>4$ өчен дөрес икәнлеген исбатлыйк.

(1) формула $n = k$ өчен дөрес, ягъни

$$(x^k)' = kx^{k-1}$$

булсын, ди.

Ул вакытта (1) формуланың $n = k + 1$ өчен дә дөрес булганлыгын күрсәтик. Чыннан да,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)'x + x^k \cdot (x)' =$$
$$= kx^{k-1} \cdot x + x^k = kx^k + x^k = (k+1)\,x^k.$$

Шуңа күрә, (1) формула $n = 4$ өчен дөрес булганлыктан, аның $n = 5$ өчен дә дөрес булуы килеп чыга, ә ул вакытта формула $n = 6$ өчен дә, димәк, $n = 7$ өчен дә һ.б. теләсә нинди натураль $n \in N$ өчен дә дөрес була (исбатлауны төгәл башкару математик индукция методына нигезләнгән).

Әгәр $n = 1$ яки $n = 0$ булса, $x \neq 0$ өчен бу формула шулай ук дөрес була. Чыннан да, $x \neq 0$ өчен (1) формула буенча

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1.$$
$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0,$$

ә бу безгә алдагы пункттан билгеле булган x һәм 1 функцияләре чыгарылмаларының кыйммәтләре белән тәңгәл килә.

Ниһаять, n — тискәре бөтен сан булсын, ди. Ул вакытта $n = -m$, монда m — натураль сан. Өлешне дифференциаллау кагыйдәсен кулланып, һәм натураль m өчен инде исбатланган (1) формуланы файдаланып, $x \neq 0$ булганда табабыз:

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}} =$$
$$= -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Шулай итеп, мондый нәтиҗә ясап була:

> Теләсә нинди бөтен n һәм теләсә нинди x өчен ($n \leqslant 1$ булганда, $x \neq 0$)
>
> $$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

2 нче мисал. а) $f(x) = x^{-5}$; б) $f(x) = 3x^7 - \frac{5}{x^3}$ функцияләренең чыгарылмаларын табабыз.

а) $(x^{-5}) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$;

б) $\left(3x^7 - \frac{5}{x^3}\right)' = 3(x^7)' - 5(x^{-3})' = 3 \cdot 7x^6 - 5(-3)\,x^{-4} = 21x^6 + \frac{15}{x^4}.$

Дәрәҗәле функциянең дифференциаллануыннан һәм чыгарылмаларны исәпләүнең төп кагыйдәләреннән

> бөтен рациональ функцияләрнең (күпбуыннарның) һәм вакланма-рациональ функцияләрнең билгеләну өлкәләренең һәр ноктасында дифференциалланулары килеп чыга.

Күнегүләр

Функцияләрнең чыгарылмаларын табыгыз (208—211).

208. а) $f(x) = x^2 + x^3$; б) $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$;

в) $f(x) = x^2 + 3x - 1$; г) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.

209. а) $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$; б) $f(x) = \sqrt{x}(2x^2 - x)$;

в) $f(x) = x^2(3x + x^3)$; г) $f(x) = (2x - 3)(1 - x^3)$.

210. а) $y = \frac{1+2x}{3-5x}$; б) $y = \frac{x^2}{2x-1}$; в) $y = \frac{3x-2}{5x+8}$; г) $y = \frac{3-4x}{x^2}$.

211. а) $y = x^6 - 3x^4 - x + 5$; б) $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x^4} + \sqrt{x}$;

в) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$; г) $y = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{x^3} + 1$.

212. f функциясенең бирелгән нокталардагы чыгарылмасының кыйммәтен исәпләгез:

а) $f(x) = x^2 - 3x$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$;

б) $f(x) = x - 4\sqrt{x}$, $x = 0{,}01$, $x = 4$;

в) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$, $x = -3$, $x = 0$.

213. а) $f(x) = 2x^2 - x$; б) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1{,}5x^2 - 4x$; г) $f(x) = 2x - 5x^2$ булса,

$f'(x) = 0$ тигезләмәсен чишегез.

214. а) $f(x) = 4x - 3x^2$; б) $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2$;

в) $f(x) = x^2 - 5x$; г) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$ булса,

$f'(x) < 0$ тигезсезлеген чишегез.

215. Функциянең чыгарылмасын табыгыз:

а) $f(x) = \frac{x^2-3x}{1+4x^3}$; б) $f(x) = \left(\frac{3}{x} + x^2\right)(2 - \sqrt{x})$;

в) $f(x) = \frac{5-2x^4}{1-x^3}$; г) $f(x) = \sqrt{x}(3x^5 - x)$.

216. x ның f функциясе чыгарылмасының нульгә тигез булгандагы кыйммәтләрен табыгыз:

а) $f(x) = x^5 - 3\frac{1}{3}x^3 + 5x$; б) $f(x) = 2x^4 - x^8$;

в) $f(x) = x^4 + 4x$; г) $f(x) = x^4 - 12x^2$.

217.— а) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x$; б) $f(x) = 3x - 5x^2 + x^3$;

в) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x$; г) $f(x) = 3x^2 - 9x - \frac{1}{3}x^3$

булса, $f'(x) < 0$ тигезсезлеген чишегез.

218.— Чыгарылмасы

а) $2x + 3$; б) $16x^3 - 0,4$; в) $8x - 2$; г) $9x^2 - \frac{1}{2}$

гә тигез булган кимендә бер функциянe формула аша бирегез.

219.— Әгәр:

а) $f_1(x)$ һәм $f_2(x)$ функцияләренең һәркайсының x_0 ноктасында чыгарылмасы булмаганлыгы;

б) $f_1(x)$ ның x_0 ноктасында чыгарылмасы булуы, ә $f_2(x)$ ның чыгарылмасының булмавы билгеле булса, $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ функциясенең x_0 ноктасында чыгарылмасы юк дип әйтү дөрес булырмы?

16. Катлаулы функциянең чыгарылмасы

1. Катлаулы функция. Мисалдан башлыйк.

1 нче мисал. $z = h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ формуласы белән билгеләнгән h функциясе өчен x ның бирелгән кыйммәте буенча z ның тиңдәш кыйммәтен исәпләргә кирәк булсын. Моның өчен башта бирелгән x өчен

$$y = f(x) = 1 - x^2$$

кыйммәтен, аннары y ның шул кыйммәте аша

$$z = g(y) = \sqrt{y}$$

кыйммәтен исәпләргә кирәк.

Шулай итеп, f функциясе x санына y санын тиңдәш, ә g функциясе y ны z ка куя, h функциясен y һәм f функцияләреннән төзелгән *катлаулы функция* дип әйтәләр һәм

$$h(x) = g(f(x))$$

рәвешендә язалар.

Ирекле x ноктасында катлаулы $h(x) = g(f(x))$ функциясенең кыйммәтен исәпләү өчен, башта «эчке» f функциясенең бу ноктадагы кыйммәте y ны, аннан соң $g(y)$ ны исәплиләр.

Катлаулы $g(f(x))$ функциясенең билгеләнү өлкәсе нинди була соң? Ул — $f(x)$ ның билгеләнү өлкәсенә кергән һәм аны g функциясенең билгеләнү өлкәсенә керерлек иткән барлык x лар күплеге.

Без карап киткән мисалда f функциясенең билгеләнү өлкәсе булып барлык санлы туры тора. Әгәр дә $f(x)$ ның кыйммәте $g(y) = \sqrt{y}$ функциясенең билгеләнү өлкәсенә керсә, $h(x)$ ның кыйммәте билгеләнгән була. Шуңа күрә $y \geq 0$ тигезсезлегенең үтәлүе, ягъни $1 - x^2 \geq 0$ булу таләп ителә, димәк, $g(f(x))$ функциясенең билгеләнү өлкәсе $[-1; 1]$ кисемтәсе була.

2. Катлаулы функциянең чыгарылмасы формуласы. Алдагы пунктларда сез рациональ функцияләрнең, аерым алганда, күпбуыннарның чыгарылмаларын табарга өйрәндегез. Ләкин $f(x) = (2x+3)^{100}$ функциясенең чыгарылмасын исәпләү күпбуынның чыгарылмасын табуга кайтып калса да, зур күләмле эш башкаруны таләп итә: $(2x+3)^{100}$ не күпбуын рәвешендә күрсәтергә һәм килеп чыккан суммадагы 101 кушылучыны дифференциалларга кирәк була. Катлаулы функциянең чыгарылмасын исәпләү кагыйдәсен исбатласак, бу һәм башка мондый мәсьәләләрнең чишелешен күзгә күренерлек дәрәҗәдә гадиләштереп була.

> Әгәр f функциясенең x_0 ноктасында, ә g функциясенең $y_0 = f(x_0)$ ноктасында чыгарылмасы булса, ул вакытта $h(x) = g(f(x))$ катлаулы функциясенең x ноктасында шулай ук чыгарылмасы була, өстәвенә
> $$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \qquad (1)$$

(1) формуланы исбатлау өчен (алдагы кебек үк), $\Delta x \neq 0$ булганда $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ вакланмасын тикшерергә һәм $\Delta x \to 0$ булганда $\frac{\Delta h}{\Delta x} \to g'(y_0) \cdot f'(x_0)$ икәнлеген күрсәтергә кирәк.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f$$

тамгаланышларын кертик. Ул вакытта $\Delta h = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = \Delta g$.

$\Delta y \to 0$ булганда $\Delta y \to 0$ була, чөнки f x_0 ноктасында дифференциаллана.

Без исбатлауны бары тик x_0 ноктасының ниндидер тирәлегендә $\Delta f \neq 0$ булырлык f функцияләре өчен генә башкарырбыз. Ул вакытта $\Delta x \to 0$ булганда $\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta h}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \to g'(y_0) \cdot f'(x_0)$, чөнки $\Delta x \to 0$ булганда $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$, ә $\Delta y \to 0$ булганда $\frac{\Delta g}{\Delta y} \to g'(y_0)$, ә бу югарыда күрсәтелгәнчә) $\Delta x \to 0$ булганда үтәлде.

2 нче мисал. Алда куелган мәсьәләгә кайтыйк һәм $h(x) = (2x+3)^{100}$ функциясенең чыгарылмасын табыйк:

h функциясен катлаулы $h(x) = g(f(x))$ функциясе рәвешендә күрсәтеп була, монда $g(y) = y^{100}$, $y = f(x) = 2x + 3$. Ләкин $f'(x) = 2$, $g'(y) = 100y^{99}$, шуңа күрә $h'(x) = 2 \cdot 100y^{99} = 200(2x+3)^{99}$.

3 нче мисал. $h(x) = \sqrt{3x^2+1}$ функциясенең чыгарылмасын табыйк.

$h(x) = g(f(x))$, монда $y = f(x) = 3x^2 + 1$, $g(y) = \sqrt{y}$, шуңа күрә $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ һәм $y' = f'(x) = 6x$, моннан

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$$

икәнлеген табабыз.

Күнегүләр

Катлаулы $h(x) = g(f(x))$ функциясен төзүче элементар f һәм g функцияләрен формулалар аша бирегез (220—221).

220.— а) $h(x) = \cos 3x$; б) $h(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

в) $h(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $h(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

221.— а) $h(x) = (3 - 5x)^5$; б) $h(x) = \sqrt{\cos x}$;

в) $h(x) = (2x + 1)^7$; г) $h(x) = \operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

Һәр функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз (222—223).

222. а) $y = \sqrt{9 - x^2}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$;

в) $y = \sqrt{0,25 - x^2}$; г) $y = \frac{1}{\sqrt{4x + 5 - x^2}}$.

223. а) $y = \sqrt{\cos x}$; б) $y = \frac{1}{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$;

в) $y = \operatorname{tg} 2x$; г) $y = \sqrt{\sin x}$.

Функцияләрнең чыгарылмаларын табыгыз (224—225).

224. а) $f(x) = (2x - 7)^8$; б) $f(x) = \frac{1}{(5x + 1)^6}$;

в) $f(x) = (9x + 5)^4$; г) $f(x) = \frac{1}{(6x - 1)^5}$.

225. а) $f(x) = \left(3 - \frac{x}{2}\right)^{-9}$; б) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x - 7\right)^8 - (1 - 2x)^4$;

в) $f(x) = (4 - 1,5x)^{10}$; г) $f(x) = (5x - 2)^{13} - (4x + 7)^{-6}$.

226.— **Функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз:**

а) $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$; б) $y = \sqrt{\frac{4}{x^2} - 1}$;

в) $y = \sqrt{\sin x - 0,5}$; г) $y = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$.

227.— $f(x) = 3 - 2x$, $g(x) = x^2$ һәм $p(x) = \sin x$. Әгәр:

а) $h(x) = f(g(x))$; б) $h(x) = g(p(x))$;

в) $h(x) = g(f(x))$; г) $h(x) = p(f(x))$ булса,

катлаулы h функциясен формула аша күрсәтегез.

228.— $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $g(x)=\cos x$ һәм $p(x)=\sqrt{x}$ функцияләре бирелгән. Әгәр:

а) $h(x)=f(g(x))$; б) $h(x)=f(p(x))$;
в) $h(x)=p(g(x))$; г) $h(x)=p(f(x))$ булса,

катлаулы h функциясен формула аша күрсәтегез. h функциясенең билгеләнү өлкәсен табыгыз.

229.— $f(g(x))=x$ булырдай f функциясен табыгыз:

а) $g(x)=2x$; б) $g(x)=\sqrt{x}$;
в) $g(x)=3x+2$; г) $g(x)=x^2+1$, $x\leq 0$.

230.— f функциясенең чыгарылмасын табыгыз:

а) $f(x)=(x^3-2x^2+3)^{17}$; б) $f(x)=\sqrt{1-x^4}+\frac{1}{x^2+3}$;
в) $f(x)=\sqrt{4x^2+5}$; г) $f(x)=(3-x^3)^5+\sqrt{2x-7}$.

17. Тригонометрик функцияләрнең чыгарылмалары

1. Синус чыгарылмасы формуласы.

Синус функциясенең теләсә нинди ноктада чыгарылмасы булуын һәм

$$(\sin x)'=\cos x. \qquad (1)$$

икәнлеген исбатлыйк.

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ формуласы кулланып табабыз:

$$\frac{\Delta\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

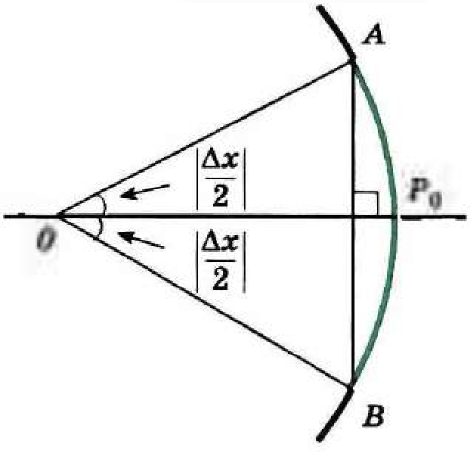
(1) формуланы чыгару өчен:

а) $\Delta x\to 0$ булганда $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1$;

б) $\Delta x\to 0$ булганда $\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\to\cos x_0$ икәнлеген күрсәтү җитә.

Бу раслауларга таянып, (1) формуланы китереп чыгарабыз. Чыннан да, $\Delta x\to 0$ өчен

$$\frac{\Delta\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\to 1\cdot\cos x_0=\cos x_0.$$



88 нче рәсем

▶ Без алда нигезләнеп эш иткән а) һәм б) раслауларының күрсәтмәле геометрик мәгънәләре бар.

а) Берәмлек әйләнәдә P_0 ноктасының ике ягына да $\frac{|\Delta x|}{2}$ озынлыкта P_0A һәм P_0B дугаларын салыйк (88 нче рәсем). Ул вакытта AB дугасының озынлыгы $|\Delta x|$ ка, ә AB хордасының озынлыгы $2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|$ булыр. $|\Delta x|$ кечкенә булганда AB хордасының озынлыгы ул тартып торган AB дугасы озынлыгыннан практик яктан караганда аерылып тормый диярлек. (Сез геометрия курсында әйләнә озынлыгы формуласын чыгарганда бу факттан файдаланган идегез инде. Чыннан да, билгеле булганча, зур n нар өчен $P_n \approx C$ якынча тигезлеге дөрес була, биредә P_n — камалган төзек n почмаклыкның периметры, ә C — әйләнә озынлыгы. Димәк, мондый күппочмак ягының озынлыгы ул тартып торган дуга озынлыгына якынча тигез була.). Шулай булгач,

$$\Delta x \to 0 \text{ булганда } \frac{AB}{\smile AB} = \frac{\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{2}\right|} = \left|\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right| \to 1.$$

б) Без AB хордасы озынлыгының AB дугасы озынлыгыннан кечерәк булуын, ягъни $2\sin\frac{|\Delta x|}{2} < 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2}$ икәнлеген искәртеп китик.

Косинуслар аермасы формуласы һәм бу тигезсезлектән файдаланып табабыз:

$$\left|\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - \cos x_0\right| =$$

$$= \left|-2\sin\frac{\Delta x}{4}\sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{4}\right)\right| \leq \left|2\sin\frac{\Delta x}{4}\right| \leq \frac{\Delta x}{2}.$$

Ләкин $\Delta x \to 0$ өчен $\frac{|\Delta x|}{2} \to 0$. Шуңа күрә $\Delta x \to 0$ өчен $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x_0$ була. ◀

Мисал. Катлаулы функцияне дифференциаллау формуласы буенча

$$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b).$$

2. Косинус, тангенс һәм котангенсны дифференциаллау формулалары.

$y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ функцияләренең чыгарылмалары аларның билгеләнү өлкәләренең һәр ноктасында булуын һәм түбәндәге формулаларның дөрес икәнлеген исбатлыйк:

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (2)$$

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (3)$$

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (4)$$

(2) формуланы чыгару $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ тигезлекләренә һәм катлаулы функцияне дифференциаллау кагыйдәсе:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x$$

ка нигезләнгән.

(3) һәм (4) формулаларны исбатлау өчен, өлеш чыгарылмасын табу формуласын һәм синус, косинус чыгарылмаларының алдан чыгарылган формулаларын кулланыйк:

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Күнегүләр

Һәр функциянең чыгарылмасын табыгыз (231—233).

231. а) $y = 2\sin x$; б) $y = 1 - \frac{1}{2}\sin x$;
в) $y = -0{,}5\sin x$; г) $y = 0{,}5 + 1{,}5\sin x$.

232. а) $y = 3\cos x$; б) $y = x + 2\cos x$;
в) $y = 1 - \cos x$; г) $y = 2\sin x + 1{,}5\cos x$.

233. а) $y = \sqrt{3} - 3\,\mathrm{tg}\, x$; б) $y = \cos x - \mathrm{tg}\, x$;
в) $y = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\, x$; г) $y = 2\,\mathrm{tg}\, x - \sin x$.

234. а) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x - \pi)$; б) $f(x) = x - \mathrm{tg}(-2x)$;
в) $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$; г) $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}$
булса, $f'(0)$ һәм $f'(\pi)$ ны табыгыз.

235. а) $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x$; б) $f(x)=x-\operatorname{tg} x$;
в) $f(x)=2\sin x-1$; г) $f(x)=x-\cos x$
булса, $f'(x)=0$ тигезләмәсен чишегез.

Функциянең һәркайсының чыгарылмасын табыгыз (236—238).

236. а) $f(x)=x^3\sin 2x$; б) $f(x)=x^4+\operatorname{tg} 2x$;
в) $f(x)=\frac{\cos 3x}{x}$; г) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$.

237. а) $f(x)=\sin^2 x$; б) $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$;
в) $f(x)=\cos^2 x$; г) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

238. а) $f(x)=\cos 2x\sin x+\sin 2x\cos x$;
б) $f(x)=\cos^2\frac{x}{4}-\sin^2\frac{x}{4}$;
в) $f(x)=\sin 5x\sin 3x+\cos 5x\cos 3x$;
г) $f(x)=\sin 3x\cos 3x$.

239. а) $f(x)=2\sin^2 x-\sqrt{2}x$; б) $f(x)=2x+\cos(4x-\pi)$;
в) $f(x)=\cos 2x$; г) $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}x$
булса, аларда $f'(x)=0$, $f'(x)>0$ булырлык нокталарны табыгыз.

240. а) $f'(x)=1-\sin x$; б) $f'(x)=2\cos 2x$;
в) $f'(x)=-\cos x$; г) $f'(x)=3\sin x$
булса, f функцияләренең кимендә берсен формула аша күрсәтегез.

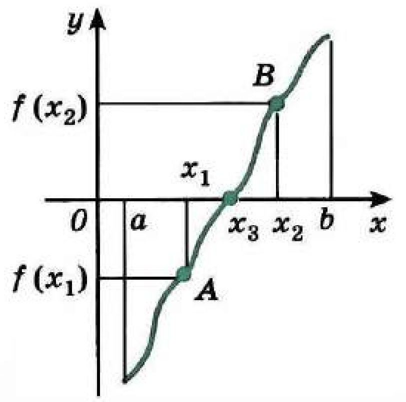
§ 5.

Өзлексезлекне һәм чыгарылманы куллану

18. Өзлексезлекне куллану

1. Функциянең өзлексезлеге. 14 нче пунктта сез ноктада функциянең өзлексезлеге төшенчәсе белән таныштыгыз. Әгәр функция нинди дә бер I аралыгының һәр ноктасында өзлексез булса, аны *I аралыгында өзлексез* дип атыйлар (I аралыгы *f функциясенең өзлексезлек аралыгы* дип атала). Бу аралыкның бер ноктасыннан аңа якын икенче ноктасына күчкәндә функция кыйммәте аз үзгәрә; бу аралыкта f графигы өзлексез сызык тәшкил итә, бу сызык турында аны «карандашны кәгазьдән аермыйча ясап була» диләр. (Мәктәп курсында өйрәнелә торган өзлексез функцияләр белән эш иткәндә бу һәрвакыт дөрес була.)

15 нче пунктта күрсәтелгәнчә, x_0 ноктасында дифференциалланучы функция бу ноктада өзлексез була. Барлык вакланмалы-рациональ һәм төп тригонометрик функцияләр үзләренең билгеләнү өлкәләренең барлык нокталарында дифференциалланалар. Димәк, бу функцияләр алда әйтелгән нокталарның һәркайсында өзлексезләр.



89 нчы рәсем

Мәсәлән, $f(x) = x^2$ функциясенең турының барлык нокталарында, ә $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясенең $(-\infty; 0)$ һәм $(0; \infty)$ араларында дифференциаллануыннан бу функцияләрнең тиңдәш араларда өзлексез булулары килеп чыга.

Өзлексез функцияләрнең түбәндәге үзлеген күрсәтеп китик:

> Әгәр дә f функциясе $(a; b)$ интервалында өзлексез булып нульгә әйләнмәсә, бу интервалда ул даими тамгасын саклый.

Бу раслауның күргәзмәле интерпретациясе бар. $(a; b)$ интервалында $f(x_1) < 0$, ә $f(x_2) > 0$ булырлык x_1 һәм x_2 нокталары табылыр, дип уйлыйк.

Ул вакытта $y = 0$ турысы аерып торган $A(x_1; f(x_1))$ һәм $B(x_2; f(x_2))$ нокталарын тоташтыручы өзлексез кәкре (f функциясенең графигы) бу турыны ($y = 0$ турысын) бирелгән интервалны ниндидер x_3 ноктасында кисеп үтәр (89 нчы рәсем), ягъни $f(x_3) = 0$ булыр.

A һәм B нокталары $(a; b)$ интервалы белән сурәтләнгән елганың төрле ярларында урнашкан дип күз алдына китерик. Туристка, A дан B га эләгү өчен, ниндидер бер урында елганы кичү кирәклеге ачык. Ә бу шартка каршы килә: f функциясе $(a; b)$ интервалында нульгә әйләнми (тигез кыйммәт алмый).

2. Интерваллар методы. Бер үзгәрешле тигезсезлекләрне чишү методы (*интерваллар методы*) өзлексез функцияләрнең бу пунктта тикшерелгән үзлегенә нигезләнгән (бу үзлекне тулысынча исбатлау математик анализ курсларында китерелә). Аны аңлатып китик.

f функциясе I интервалында өзлексез булып, бу интервалның чикле сандагы нокталарында нульгә әйләнсен. Өзлексез функцияләрнең югарыда күрсәтелгән үзлеге буенча бу нокталар I не һәркайсында өзлексез функция f даими тамгасын саклап калган интервалларга бүләләр. Бу тамганы билгеләү өчен, функциянең һәр интервалының нинди дә булса бер ноктасындагы кыйммәтен исәпләү җитә.

1 нче мисал. $\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} \geq 0$ тигезсезлеген чишик.

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ функциясе (ул — вакланмалы-рациональ функция) үзенең билгеләнү өлкәсендәге һәр ноктада өзлексез була

90 нчы рәсем

һәм −1, 1 нокталарында нульгә әйләнә. Бу функциянең билгеләнү өлкәсе булып ваклаучының нульләреннән, ягъни 2 һәм 3 нокталарыннан тыш, санлы туры тора. Бу нокталар −1 һәм 1 нокталары белән бергә f ның билгеләнү өлкәсен 5 аралыкка бүләләр (90 нчы рәсем), аларның һәркайсында f функциясе өзлексез һәм нульгә әйләнми. Рәсемдә тиңдәш һәр интервалда f ның тамгасы күрсәтелгән, аны f интервалның эчке нокталарындагы кыйммәтләре тамгаларын табу юлы белән билгелибез.

Тигезсезлеге төгәл тигезсезлек түгел, шуңа күрә −1 һәм 1 нокталары (функциясенең нульләре) тиңдәшле аралыкларга кертеләләр. Рәсемгә карап, җ а в а п н ы табарга мөмкин: тигезсезлекнең чишелеше булып $(-\infty; -1]$; $[1; 2)$ һәм $(3; \infty)$ аралыкларның берләшмәсе тора.

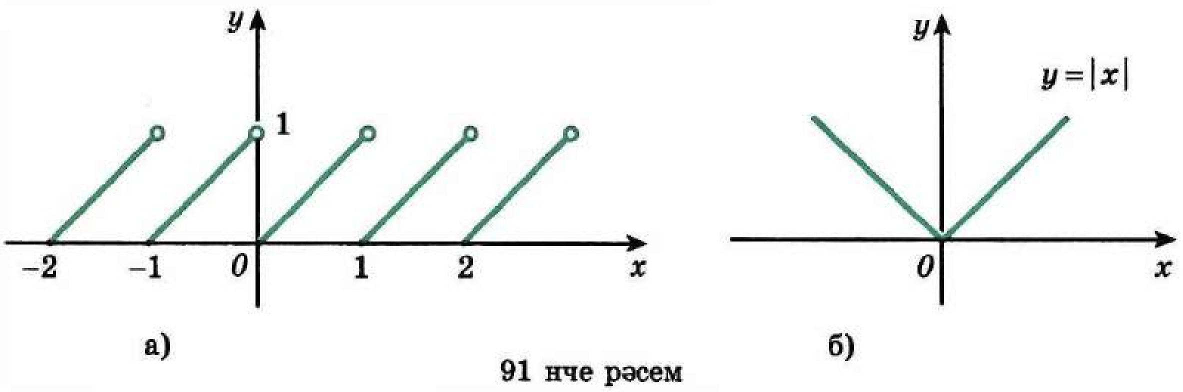
2 н ч е м и с а л. $x^3 + 2x - 2 = 0$ тигезләмәсе тамырларының берсен 0,1 гә кадәр төгәллек белән табыйк.

$f(x) = x^3 + 2x - 2 = 0$ функциясе өзлексез, шуңа күрә аның очларында f төрле тамгалы кыйммәтләр алырлык 0,2 озынлыгындагы кисемтә табу җитә. $f(1) = 1 > 0$, $f(0) = -2 < 0$, шуңа күрә тигезләмәнең тамыры бар һәм ул $[0; 1]$ кисемтәсендә урнашкан. $f(0,6) = 0{,}6^3 + 2 \cdot 0{,}6 - 2 = -0{,}584 < 0$ һәм $f(1) > 0$, димәк, тамыр $[0{,}6; 1]$ кисемтәсендә ята. Ниһаять, $f(0,8) = 0{,}112 > 0$, ә $f(0,6) < 0$, шулай итеп, тамырның $[0{,}6; 0{,}8]$ кисемтәсендә ятуы ачыкланды. Хәзер без аны таба алабыз: 0,1 төгәллек белән $x_0 \approx 0{,}7$.

3. Өзлексез булмаган функциягә мисал. Без моңа кадәр эш иткән барлык функцияләр үзләренең билгеләнү өлкәләренең теләсә кайсы ноктасында өзлексез иделәр. Ләкин, шулай булса да, бу хәл теләсә кайсы функция өчен дөрес дип уйларга ярамый.

М и с а л китерик. $f(x) = \{x\}$ функциясен карап китик, биредә $\{x\}$ — x санының вакланмалы кисәге ($f(x) = \{x\}$ ның графигы 91 нче *а* рәсемдә сурәтләнгән); абсциссалар күчәренең теләсә нинди бөтен санлы ноктасын, мәсәлән, $x = 2$ не алыйк.

x_0 ноктасында өзлексез функциянең төп үзлеге ($\Delta x \to 0$ өчен



91 нче рәсем

$f(x_0+\Delta x) \to \to f(x_0)$) бу очракта үтәлми. Чыннан да, $\Delta x \to 0$ булсын. Әгәр $\Delta x > 0$ булса $\{x_0+\Delta x\}$ нульгә якын. Әгәр дә $\Delta x < 0$ булса, $\{x_0+\Delta x\}$ кыйммәте 1 гә якын. Шул ук вакытта $f(x)=\{x\}$ функциясе $x=n$ нокталарыннан үзгә булган барлык нокталарда өзлексез, биредә n — бөтен сан.

$f(x)=\{x\}$ функциясенең бу үзлеген аңлау 91 нче *а* рәсемен караганнан соң читен түгел.

4. Өзлексез булып та, бирелгән ноктада дифференциалланмаучы функциягә мисал. Мондый функциягә $f(x)=|x|$ (91 нче *б* рәсем) мисал була ала, ул өзлексез, ләкин нульдә дифференциалланмый:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0 \text{ өчен}, \\ -x, & x<0 \text{ өчен} \end{cases}$$

икәнлеген искә төшереп китик.

$f(x)=|x|$ функциясенең теләсә нинди ноктада (шул исәптән нульдә дә) өзлексез булуы ачык.

Бу функциянең графигын карап китик. $x_0>0$ ноктасының ниндидер тирәлегендә теләсә нинди $x>0$ өчен функция x ка тигез, шуңа күрә мондый нокталарда аның чыгарылмасы x' гә тигез, ягъни $x>0$ булганда $|x|'=1$; $x<0$ булганда $|x|=-x$ булганлыктан, x ның тискәре кыйммәтләре өчен $|x|'=-1$; 0 ноктасында $f(x)=|x|$ функциясенең чыгарылмасы булмый.

▶ Моны киресеннән чыгып исбат итик. $f(x)=|x|$ ның нульдә чыгарылмасы бар, ягъни $\Delta x \to 0$ булганда $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ ниндидер A санына омтыла, дип уйлыйк. Ул вакытта җитәрлек кадәр кечкенә $|\Delta x|$ өчен $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ кыйммәтләре A га якын булырлар, шул исәптән Δx ның кечкенә кыйммәтләре өчен $\left|\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}-A\right|<1$ тигезсезлеге үтәлергә тиеш.

$\Delta x>0$ булганда $|1-A|<1$ тигезсезлеге дөрес, моннан $-1<1-A<1$, ягъни

$$0<A<2. \qquad (1)$$

$\Delta x<0$ булганда $|-1-A|<1$ тигезсезлеге дөрес, моннан $-1<-1-A<1$, ягъни

$$-2<A<0. \qquad (2)$$

(1) һәм (2) тигезсезлекләре үзара капма-каршылар. Шулай булгач, нульдә $f(x)=|x|$ функциясенең чыгарылмасы була дигән фараз итү дөрес булмаган.

Димәк,

$$|x|'=\begin{cases} 1, & x>0 \text{ өчен}, \\ x=0 & \text{өчен булмый}, \\ -1, & x<0 \text{ өчен}. \end{cases}$$

Күнегүләр

241.— а) $f(x) = x^4 - x + 1$; б) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leqslant -1 \text{ өчен}, \\ x^2 - x, & x > -1 \text{ өчен}; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \text{ өчен}, \\ 5 - 2x, & x \geqslant 0 \text{ өчен}; \end{cases}$ г) $f(x) = 2x - x^2 + x^3$

булса, $x_1 = 0$ һәм $x_2 = -1$ нокталарында f функциясе өзлексез булырмы?

242. Функцияләр өзлексез булган аралыкларны табыгыз:

а) $f(x) = x^3 - 2x^2$; б) $f(x) = \frac{x^3+27}{3x+x^2}$;

в) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4$; г) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^4-8}$.

243. Бирелгән тигезләмәнең $[0; 1]$ аралыгында ятучы тамыры барлыгын исбат итегез һәм аны (тамырны) 0,1 гә кадәр төгәллек белән табыгыз:

а) $1{,}4 - 10x^2 - x^3 = 0$; б) $1 + 2x^2 - 100x^4 = 0$;

в) $x^3 - 5x + 3 = 0$; г) $x^4 + 2x - 0{,}5 = 0$.

Тигезсезлекләрне чишегез (244—245).

244. а) $x^2 - 5x + 4 > 0$; б) $\frac{x+3}{x^2+4x-5} \geqslant 0$;

в) $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$; г) $\frac{x^2-7x+6}{x-2} < 0$.

245. а) $\frac{(x-2)(x-4)}{x^2+2x-3} \geqslant 0$; б) $\frac{8}{x^2-6x+8} < 1$;

в) $\frac{2x^2+5x}{x^2+5x+4} \geqslant 1$; г) $\frac{x^2-2x-3}{(x+3)(x-4)} < 0$.

246. Функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз:

а) $f(x) = \sqrt{x - \frac{4}{x-3}}$; б) $f(x) = \sqrt{\frac{3}{x^2-4} + 1}$;

в) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+7x+12}{x}}$; г) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{8}{x^2-1}}$.

247.— а) $f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x < 4 \text{ өчен}, \\ (x-m)^2, & x \geqslant 4 \text{ өчен}; \end{cases}$ б) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-m}$;

в) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + m, & x \leqslant 0 \text{ өчен}, \\ x + 2, & x > 0 \text{ өчен}; \end{cases}$ г) $f(x) = \frac{5-x}{x^4+m}$

булса, f функциясе m нинди кыйммәтләр алганда санлы турыда өзлексез булыр?

Тигезсезлекләрне чишегез (248—249).

248.— а) $x^4-10x^2+9\leqslant 0$; б) $x^4-8\geqslant 7x^2$;
в) $x^4-5x^2+6>0$; г) $5x^2-4>x^4$.

249.— а) $(x^2-1)(x+4)(x^3-8)\leqslant 0$; б) $\sqrt{x^2-4}\,(x-3)<0$;
в) $x^2(3-x)(x+2)>0$; г) $\dfrac{(x-2)^3(x+5)}{(x+3)^6}\geqslant 0$.

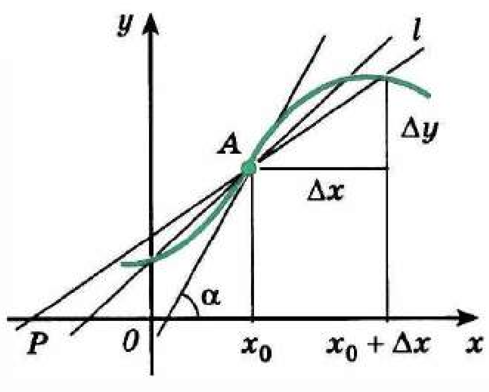
250.— Функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз:
а) $f(x)=\sqrt{9x-x^3}$; б) $f(x)=\sqrt{x^3-\frac{8}{x}}$;
в) $f(x)=\sqrt{16x-x^3}$; г) $f(x)=\sqrt{1-\frac{27}{x^3}}$.

19. Функция графигына орынма

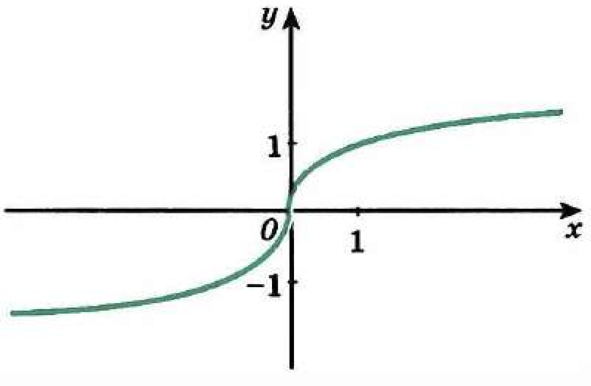
1. Орынма. Функция графигына орынма төшенчәсе белән сез инде таныш. x_0 ноктасында дифференциалланучы f функциясенең графигы x_0 тирәсендә орынмадан аерылып тормый диярлек, димәк, ул $(x_0;\ f(x_0))$ һәм $(x_0+\Delta x;\ f(x_0+\Delta x))$ нокталары аша үтүче l кисүчесенең кисемтәсенә бик якын була. Мондый кисүчеләрнең теләсә кайсысы графикның $A(x_0;\ f(x_0))$ ноктасы аша үтә (92 нче рәсем). Бирелгән A ноктасы аша үтүче турыны төгәл итеп бирү өчен, аның почмакча коэффициентын күрсәтү җитә. $\Delta x\to 0$ булганда, кисүченең почмакча коэффициенты $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $f'(x_0)$ гә омтыла (аны без орынманың почмакча коэффициенты итеп кабул итәрбез). *Орынма — $\Delta x\to 0$ булганда, кисүченең чик торышы ул.*

$f'(x_0)$ булмаса, орынма да булмый ($y=|x|$ функциясенең (0; 0) ноктасында булмаган кебек, 91нче *б* рәсем), яки ул вертикаль була ($y=\sqrt[3]{x}$ графигының (0; 0) ноктасында кебек, 93 нче рәсем).

Шулай итеп, f функциясенең x_0 ноктасында чыгарылмасы булуы графикның $(x_0;\ f(x_0))$ ноктасында аңа вертикаль булмаган орынма булуы белән эквивалент, монда *орынманың почмакча*



92 нче рәсем



93 нче рәсем

коэффициенты $f'(x_0)$ гә тигез. Чыгарылманың геометрик мәгънәсе шуннан гыйбарәт.

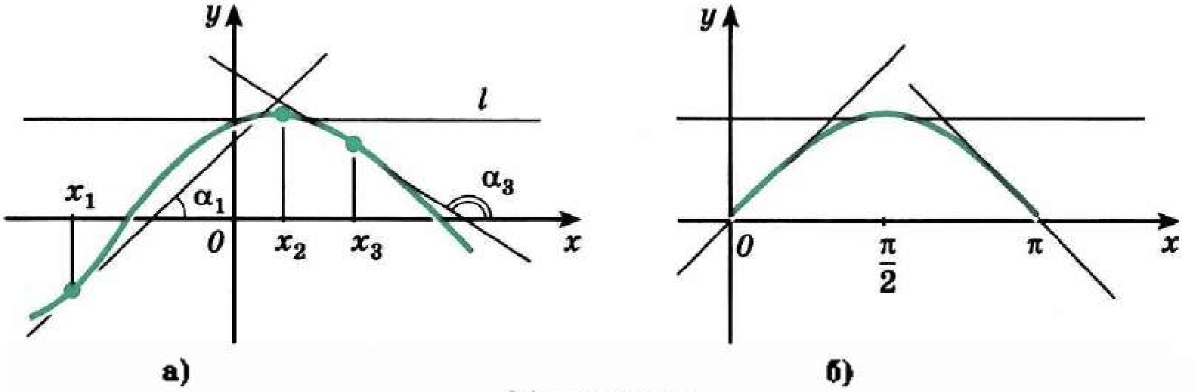
> x_0 ноктасында дифференциалланучы f функциясенең графигына орынма — $(x_0;\ f(x_0))$ ноктасы аша үтүче һәм почмакча коэффициенты $f'(x_0)$ булган туры ул.

f функциясенең графигына x_1, x_2, x_3 нокталарында орынмалар үткәрик (94 нче *а* рәсем) һәм алар абсциссалар күчәре белән төзегән почмакларны билгелик (ул почмаклар күчәрнең уңай юнәлешеннән уңай юнәлештә турыга кадәр булган почмаклар). Без α_1 почмагының кысынкы, α_3 почмагының җәенке икәнлеген, ә α_2 почмагының нульгә тигез булуын күрәбез, чөнки l турысы Ox күчәренә параллель. Кысынкы почмакның тангенсы уңай, җәенкенеке — тискәре, $\operatorname{tg} 0 = 0$, шуңа күрә

$$f'(x_1) > 0,\ f'(x_2) = 0,\ f'(x_3) < 0.$$

Аерым нокталарда орынма үткәрү графикларның эскизларын төгәлрәк төзү мөмкинлеген бирә. Мәсәлән, синус функциясенең графигы эскизын төзү өчен, алдан 0; $\frac{\pi}{2}$ һәм π нокталарында синусның чыгарылмасы тиңдәшле рәвештә 1; 0 һәм -1 гә тигез икәнлеген табабыз. Аннары $(0;\ 0)$, $\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$ һәм $(\pi;\ 0)$ нокталары аша үтүче һәм почмакча коэффициентлары тиңдәшле рәвештә $1, 0$ һәм -1 булган турылар төзибез (94 нче *б* рәсем). Бу турылар һәм Ox турысы белән төзелгән трапециягә синусның графигын, ул $x = 0$ гә, $\frac{\pi}{2}$ гә һәм π гә тигез булганда, тиңдәшле турыларга орынырлык итеп камыйсы гына кала.

Синусның графигы нуль тирәлегендә $y = x$ турысыннан аерылып тормаганлыгын күрсәтеп китик. Мисал өчен, күчәрләрдә масштаблар бер берәмлектә 1 см кисемтә туры килерлек итеп сайланган булсын. $\sin 0{,}5 \approx 0{,}479425$, ягъни $|\sin 0{,}5 - 0{,}5| \approx 0{,}02$, сайлап алынган масштабта бу 0,2 мм озынлыгындагы кисемтәгә туры килә. Шуңа күрә $y = \sin x$ функциясенең графигы $(-0{,}5;\ 0{,}5)$ интервалында $y = x$ турысыннан (вертикаль юнәлештә) 0,2 мм дан артмаган зурлыкка тайпыла ала, ә бу якынча үткәрелгән сызыкның калынлыгына туры килә.



94 нче рәсем

2. Орынма тигезләмәсе. Хәзер f функциясе графигының $A(x_0; f(x_0))$ ноктасындагы орынмасының тигезләмәсен чыгарыйк.

Почмакча коэффициенты $f'(x_0)$ булган туры тигезләмәсе мондый рәвештә була:

$$y = f'(x_0)\cdot x + b.$$

b ны исәпләү өчен, орынманың A ноктасы аша үтүеннән файдаланыйк:

$f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + b$, моннан $b = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$, димәк, орынманың тигезләмәсе мондый:

$$y = f'(x_0)\cdot x - f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0),$$

яки

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

1 нче мисал. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ функциясе графигының абсциссасы 2 булган ноктадагы орынма тигезләмәсен табыйк.

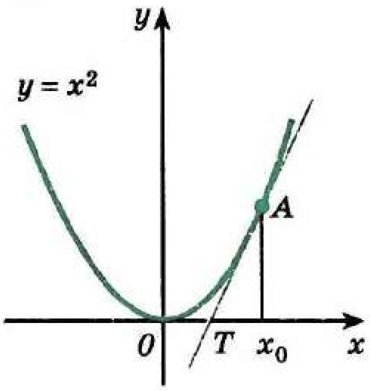
Бу мисалда $x_0 = 2$, $f(x_0) = f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2\cdot 2^2 + 1 = 1$, $f'(x) = 3x^2 - 4x$, $f'(x_0) = f'(2) = 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2 = 4$. Бу саннарны (1) тигезләмәгә куеп, $y = 1 + 4(x - 2)$, ягъни $y = 4x - 7$ тигезләмәсен табарбыз.

2 нче мисал. $y = x^2$ параболасының абсциссасы x_0 булган ноктадагы орынма тигезләмәсен чыгарыйк.

$y(x_0) = x_0^2$, ә $y'(x_0) = 2x_0$ икәнлеге билгеле. Бу кыйммәтләрне орынманың (1) тигезләмәсенә куеп табабыз: $y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$, ягъни $y = 2x_0x - x_0^2$. Мәсәлән, $x_0 = 1$ өчен тигезләмәсе $y = 2x - 1$ булган орынма килеп чыга.

Параболага $A\ (x_0; x_0^2)$ ноктасындагы орынманың Ox лар күчәре белән кисешү ноктасы T ның координаталарын табыйк (95 нче рәсем). Әгәр дә T ноктасының координаталары булса $(x_1; 0)$, T ноктасы орынма өстендә ята (шуңа күрә аның координаталары орынманың тигезләмәсен канәгатьләндерәләр), моннан $0 = 2x_0x_1 - x_0^2$. $x_0 \neq 0$ булса, $x_1 = \frac{x_0}{2}$.

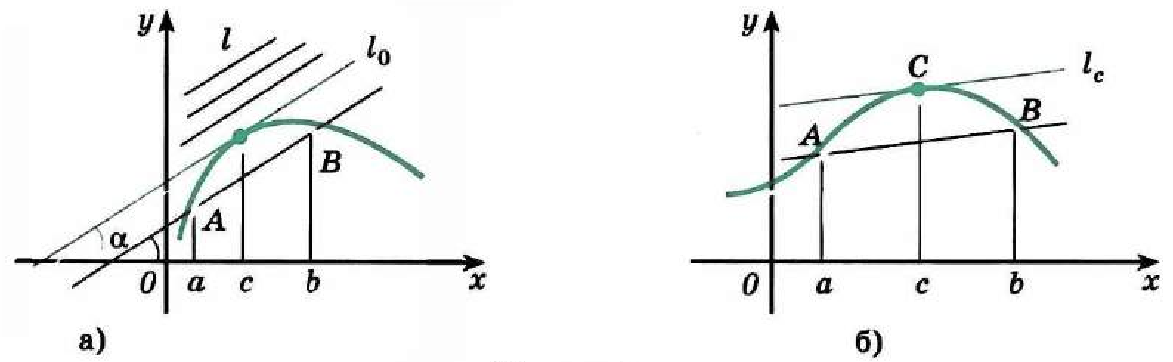
Табылган нәтиҗә параболага аның (түбәдән башка) теләсә кинди ноктасында орынма төзүнең гади ысулына китерә: моның өчен A ноктасын очлары 0 һәм x_0 булган Ox күчәре кисемтәсен урталай бүлүче T ноктасы белән тоташтыру җитә; AT турысы — эзләнелгән орынма. $x_0 = 0$ булса, орынма Ox турысы була.



95 нче рәсем

3. Лагранж формуласы. f графигының $(a; b)$ интервалыннан абсциссасы c булган ноктасында орынмасы барлыгын, аның $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ нокталары аша үтүче кисүчегә параллель булуының дәреслеген күргәзмәле аңлату өчен чыгарылманың геометрик мәгънәсеннән файдаланыйк.

AB га параллель һәм графикның $[a; b]$ аралыгына тиңдәш булган өлеше белән уртак нокталары булмаган l турысын карап



96 нчы рәсем

китик. Бу l турысын, ул AB га параллель калырлык итеп, f графигына таба күчерик. Турының графикның бу кисәге белән уртак нокталары килеп чыккан l_0 торышын билгелик. 96 нчы *а* рәсемнән мондый «беренче» уртак нокталарның теләсә кайсы l_0 турысының f графигына орыну ноктасы икәнлеге күренә. Бу ноктаның абсциссасын c аша тамгалыйк. Ул вакытта $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha$, монда α — l_0 турысы белән абсциссалар күчәре арасындагы почмак. Ләкин $l \parallel AB$, шуңа күрә α почмагы AB кисүчесенең авышу почмагына тигез була, ягъни

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Шулай итеп, функция дифференциалланса, $(a; b)$ интервалында

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

булырлык $c \in (a; b)$ ноктасын табып була (96 нчы *б* рәсем).

Бу формуланы *Лагранж формуласы* дип атыйлар.

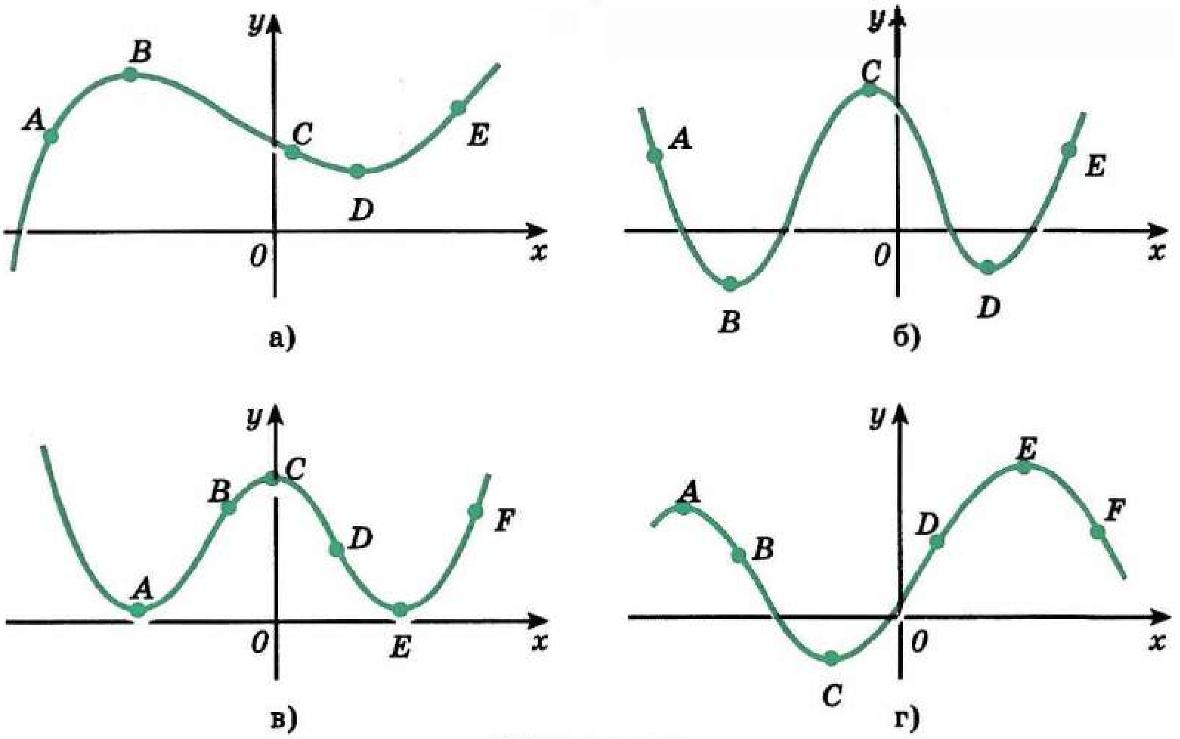
Күнегүләр

251.— f функциясенең нинди нокталарында орынма:
а) горизонталь була;
б) абсциссалар күчәре белән кысынкы почмак төзи;
в) абсциссалар күчәре белән җәенке почмак төзи (97 нче рәсем)?

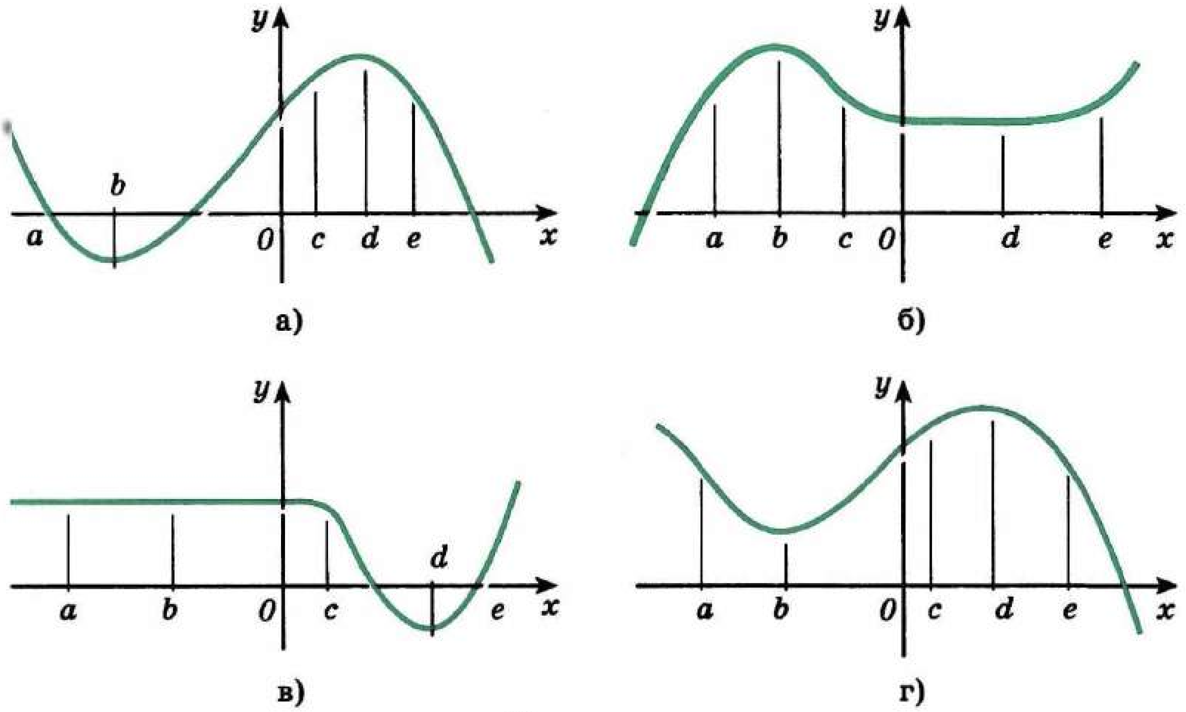
252.- Аргумент нинди (абсциссалар күчәрендә билгеләнгән) кыйммәтләр алганда, график аша бирелгән функциянең чыгарылмасы (98 нче рәсем): а) нульгә тигез; б) нульдән зуррак; в) нульдән кечерәк?

f функциясе графигының бирелгән M ноктасы аша үтүче орынманың абсциссалар күчәренә авышу почмагы тангенсын табыгыз (253—254).

253. а) $f(x) = x^2$, $M(-3; 9)$; б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, $M\left(2; \frac{2}{3}\right)$;
в) $f(x) = x^3$, $M(-1; -1)$; г) $f(x) = x^2 + 2x$, $M(1; 3)$.



97 нче рәсем



98 нче рәсем

254. а) $f(x) = 2\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$;

б) $f(x) = -\operatorname{tg} x$, $M(\pi; 0)$;

в) $f(x) = 1 + \sin x$, $M(\pi; 1)$;

г) $f(x) = -\cos x$, $M(-\pi; 1)$.

f функциясе графигының абсциссасы x_0 булган ноктадагы орынмасының тигезләмәсен языгыз (255—256).

255. — а) $f(x) = \frac{3}{x}$, $x_0 = -1$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = 2x - x^2$, $x_0 = 0$, $x_0 = 2$;

в) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$;

г) $f(x) = x^3 - 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 2$.

256. — а) $f(x) = 3\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_0 = \pi$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

в) $f(x) = 1 + \cos x$, $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

г) $f(x) = -2\sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_0 = \pi$.

f функциясе графигының алардагы орынмаларның абсциссалар күчәренә параллель булган нокталарны табыгыз (257—258).

257. — а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 16x$;

в) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$; г) $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

258. — а) $f(x) = 2\cos x + x$; б) $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}x$;

в) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; г) $f(x) = \sqrt{2}x - 2\sin x$.

259. — Функциянең графигы Ox күчәре белән нинди почмак ясап кисешер?

а) $f(x) = 3x - x^3$; б) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; г) $f(x) = -\cos x$.

260. — Функциянең графигы Oy күчәре белән нинди почмак төзеп кисешер?

а) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; б) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$; г) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

20. Якынча исәпләүләр

$$f(x) = x^7 - 2x^6 + 3x^2 - x + 3$$

функциясенең $x_0 = 2{,}02$ ноктасындагы якынча кыйммәтен исәпләргә кирәк булсын, ди. f ның 2,02 гә якын булган $x_0 = 2$ ноктасындагы кыйммәте җиңел табыла: $f(2) = 13$. f ның графигы 2 ноктасындагы тиргәлектә $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ турысына — аңа абсциссасы 2 булган ноктада үткәрелгән орынмага якын. Шуңа күрә $f(2{,}02) \approx y(2{,}02)$. Шулай булгач, $f'(x) = 7x^6 - 12x^5 + 6x - 1$, $f'(x_0) = f'(2) = 75$ һәм $f(x) \approx y(x) = 13 + 75 \cdot 0{,}02 = 14{,}5$.

Калькуляторда исәпләүләр $f(2{,}02) \approx 14{,}57995$ нәтиҗәсен бирәләр.

Гомумән, x_0 ноктасында дифференциалланучы f функциясе графигы, Δx нульдән аз аерылып торса (графикның абсциссасы x_0 булган ноктасына үткәрелгән), орынмага якын була, ягъни кечкенә Δx лар өчен

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (1)$$

x_0 ноктасы $f(x_0)$ һәм $f'(x_0)$ кыйммәтләре чагыштырмача җиңел табыла алырлык булса, (1) формула $f(x)$ ның x булганда, x_0 гә җитәрлек кадәр якын булганнары өчен якынча кыйммәтләрен табарга мөмкинлек бирә. $\sqrt{4{,}08}$ нең кыйммәтен исәпләгәндә, x_0 сыйфатында 4 санын алу бик табигый, чөнки 4,08 саны 4 кә якын һәм $x_0 = 4$ булганда $f(x_0) = \sqrt{x_0}$ һәм $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ кыйммәтен табу авыр түгел: $f(4) = \sqrt{4} = 2$, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

(1) формула буенча $\Delta x = 0{,}08$ булганда табабыз:

$$\sqrt{4{,}08} \approx 2 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}08 = 2{,}02.$$

1 нче мисал. (1) формуладан

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x \qquad (2)$$

якынча формуласын чыгарыйк.

$f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ һәм $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$ дип алыйк. Ул чагында $f(x_0) = \sqrt{1} = 1$ һәм $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, моннан $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}$. (1) формула буенча

$$f(x) = \sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x.$$

Аерым алганда, $\sqrt{1{,}06} = \sqrt{1+0{,}06} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}06 = 1{,}03$.

$\sqrt{4{,}08}$ кыйммәтен шулай ук (2) формула буенча табып була:

$$\sqrt{4{,}08} = 2\sqrt{1{,}02} \approx 2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}02\right) = 2{,}02.$$

2 нче мисал. (1) формуладан

$$(1+\Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x \qquad (3)$$

якынча формуласын чыгарыйк.

$f(x) = x^n$, $x_0 = 1$ һәм $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$ дип алыйк. $f(x_0) = 1$, $f'(x) = nx^{n-1}$ не табыйк, моннан $f'(x_0) = n$. (1) формула буенча

$$f(x) = (1+\Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x.$$

Мәсәлән, $1{,}001^{100} = (1+0{,}001)^{100} \approx 1 + 100\cdot 0{,}001 = 1{,}1$.

$1{,}001^{100}$ нең калькулятор ярдәмендә исәпләп табылган кыйммәте 1,10512 гә тигез.

3 нче мисал. $\frac{1}{0,997^{30}}$ кыйммәтен исәпләү өчен, $n = -30$, $\Delta x = -0,003$ булганда, (3) формуладан файдалану уңай:

$$\frac{1}{0,997^{30}} = (1-0,003)^{-30} \approx (1+(-30)\cdot(-0,003)) = 1+0,09 = 1,09.$$

(1) формуланы еш кына башка элементар, мәсәлән, тригонометрик функцияләрнең якынча кыйммәтләрен исәпләү өчен дә кулланалар. Мәсәлән, sin 1° ны исәпләү өчен $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ дип алу уңай, монда $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ $\left(\text{чөнки } 1° = \frac{\pi}{180}\right)$.

Шулай булгач, $f(x_0) = \sin 0 = 0$, $f'(x_0) = \cos 0 = 1$ һәм

$$\sin x \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 0 + 1\cdot\Delta x = \Delta x,$$

ягъни $\sin 1° \approx \frac{\pi}{180} \approx 0,017453$. sin 1° ның кыйммәтен калькулятор ярдәмендә исәпләп, $\sin 1° \approx 0,0174525$ икәнлеген табабыз.

Күнегүләр

261. — (1) формула ярдәмендә f функциясенең x_1 һәм x_2 нокталарындагы якынча кыйммәтләрен исәпләгез:

а) $f(x) = x^4 + 2x$, $x_1 = 2,016$, $x_2 = 0,97$;

б) $f(x) = x^5 - x^2$, $x_1 = 1,995$, $x_2 = 0,96$;

в) $f(x) = x^3 - x$, $x_1 = 3,02$, $x_2 = 0,92$;

г) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_1 = 5,04$, $x_2 = 1,98$.

(1) һәм (3) формулалар ярдәмендә якынча кыйммәтләрне табыгыз (262—263).

262. а) $1,002^{100}$; б) $0,995^{6}$; в) $1,03^{200}$; г) $0,998^{20}$.

263. а) $\sqrt{1,004}$; б) $\sqrt{25,012}$; в) $\sqrt{0,997}$; г) $\sqrt{4,0016}$.

(1) формула ярдәмендә якынча кыйммәтләрне исәпләгез (264—266).

264. — а) tg 44°; б) cos 61°; в) sin 31°; г) ctg 47°.

265. — а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0,04\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 0,02\right)$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0,03\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0,05\right)$.

266. — а) $\frac{1}{1,003^{20}}$; б) $\frac{1}{0,996^{40}}$; в) $\frac{1}{2,0016^{4}}$; г) $\frac{1}{0,994^{5}}$.

21. Физикада һәм техникада чыгарылма

1. Чыгарылманың механик мәгънәсе. Физика курсында хәрәкәт тизлегенең ничек билгеләнгәнлеген искә төшерик. Иң гади очракны карап китик: материаль нокта координаталар турысы буенча хәрәкәт итә, хәрәкәт законы бирелгән, ягъни бу x ноктасының координатасы t вакытыннан билгеле бер $x(t)$ функциясе булсын. t_0 дән $t_0+\Delta t$ га кадәр вакыт арасы өчен ноктаның күчүе $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=\Delta x$ ка, ә аның уртача тизлеге

$$v_{ур}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (1)$$

га тигез.

$\Delta t<0$ өчен дә (1) формула дөрес: күчү $x(t_0)-x(t_0+\Delta t)=-\Delta x$ ка, ә вакыт арасы зурлыгы $-\Delta t$ га тигез.

Хәрәкәтнең характеры, гадәттә, мондый була: кечкенә Δt лар өчен тизлек практик яктан карагаңда үзгәрми, ягъни зур төгәллек белән хәрәкәтне тигез хәрәкәт дип санарга була (13 нче пункттагы мисалны карагыз). Икенче төрле әйткәндә, уртача тизлекнең кыйммәте $\Delta t\to 0$ булганда, ниндидер бер билгеле булган кыйммәткә омтыла, аны t_0 вакыты моментында бу ноктадагы *моменталь тизлек* $v(t_0)$ дип атыйлар да инде. Шулай итеп,

$$\Delta t\to 0 \text{ булганда, } v_{ур}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t}\to v(t_0).$$

Ләкин чыгарылма билгеләмәсе буенча $\Delta t\to 0$ булганда,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\to x'(t_0).$$

Шуңа күрә моменталь тизлек $v(t)$ (бары тик) теләсә нинди дифференциалланучы $x(t)$ функциясе өчен генә билгеләнә дип саныйлар, өстәвенә

$$v(t)=x'(t). \qquad (2)$$

> Кыскача болай әйтәләр: координатаның вакыт буенча чыгарылмасы тизлек була. *Чыгарылманың механик мәгънәсе* шуннан гыйбарәт.

Моменталь тизлек уңай кыйммәтләр дә, тискәре кыйммәтләр дә һәм, билгеле, 0 кыйммәте дә алырга мөмкин. Вакытның нинди дә булса (t_1, t_2) аралыгында тизлек уңай булса, нокта уңай юнәлештә хәрәкәт итәр, ягъни $x(t)$ координатасы вакыт үтү белән үсә, әгәр дә $v(t)$ тискәре булса, $x(t)$ координатасы кими.

Хәрәкәтнең тизләнеше белән дә шундый ук хәл. Ноктаның хәрәкәт тизлеге v вакыт t га карата функция. Бу функциянең чыгарылмасы хәрәкәтнең тизләнеше дип атала:

$$a=v'(t).$$

> Кыскача болай әйтәләр: тизлекнең вакыт буенча чыгарылмасы тизләнеш була.

1 нче мисал. Материаль ноктаның түбән төшүен карап китик. Координаталар турысы аска таба вертикаль юнәлтелеп, материаль ноктаның башлангыч торышы 0 гә туры килсә, физикадан билгеле булганча, $x(t) = \frac{gt^2}{2}$ булыр. Ул чакта вакытның t моментында ноктаның төшү тизлеге

$$v = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = gt,$$

ә $a = (gt)' = g$ тизләнеше даими зурлык булыр.

Гомумирәк очракны карап китик.

2 нче мисал. Туры буйлап хәрәкәт итүче нокта координатасының вакытка бәйләнеше түбәндәге формула аша күрсәтелсен:

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0,$$

монда $a \neq 0$, v_0 һәм x_0 — даими зурлыклар. Хәрәкәтнең тизлеген һәм тизләнешен табабыз.

Бу хәрәкәтнең тизлеге мондый була:

$$v = x'(t) = \left(\frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0\right)' = 2\cdot\frac{a}{2}t + v_0 = at + v_0.$$

Хәрәкәт тизлеге вакытка карата функция икәнлеге билгеле, шуңа күрә без бу хәрәкәтнең тизләнешен таба алабыз: $v'(t) = (at + v_0)' = a$. Без квадратик законга буйсынган хәрәкәтнең тизләнеше даими һәм a га тигез икәнлеген күрәбез, $a > 0$ булса, хәрәкәт тигез тизләнешле, әгәр дә $a < 0$ булса, тигез акренәюче була. $v_0 = v(0)$, ә $x_0 = x(0)$ икәнлеген дә күрсәтеп китик.

III бүлектә без туры буенча хәрәкәт иткәндә, тизләнеш даими булса, хәрәкәтнең

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0$$

квадратик законына буйсынганын исбатларбыз, биредә v_0 — ноктаның башлангыч тизлеге, x_0 — башлангыч координата.

$y = f(x)$ — ирекле, дифференциалланучы функция булсын. Ул вакытта без материаль ноктаның координаталар турысы буенча $x = f(t)$ законына буйсынган хәлдә хәрәкәт итүен карап китә алабыз. Чыгарылманың механик мәгънәсе дифференциаль исәпләүнең теоремаларын күргәзмәле интерпретацияләргә мөмкинлек бирә.

3 нче мисал. f һәм h ике дифференциалланучы функцияләр булсын. Туры буенча түбәндәге (чагыштырма) хәрәкәтне карап китик. Координаталарның поезд белән бәйләнгән хәрәкәтчел системасы бирелсен, аның башы (машинист кабинасы) координаталарның хәрәкәтсез системасы башына (станциягә) карата $x_1 = f(t)$ законы буенча хәрәкәт итсен. Координаталарның хәрәкәтчел системасында материаль нокта $x_2 = h(t)$ законы буенча хәрәкәт итә. Ул вакытта бу ноктаның координаталарның хәрәкәтсез системасына карата x координатасы $x = x_1 + x_2$ гә тигез, ә аның тиз-

леге $v(t) = x'(t)$ була. Икенче яктан, тизлекләрне кушу законы буенча $v(t) = v_1(t) + v_2(t) = x_1'(t) + x_2'(t)$. Шулай итеп, без чыгарылманың механик мәгънәсе ярдәмендә билгеле булган

$$(f+h)' = f' + h'$$

формуласын таптык.

4 нче мисал. Материаль нокта координаталар турысы буенча $x = f(t)$ законы буенча хәрәкәт итсен. Ул вакытта аның $[a; b]$ аралыгындагы урта тизлеге

$$v_{ур} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

га тигез.

$v(t)$ моменталь тизлеге $[a; b]$ арасы нокталарында һәрвакытта да уртачасыннан кечерәк (зуррак) була алмый. Димәк, ниндидер $t_0 \in [a; b]$ моментында моменталь тизлек уртача тизлеккә тигез була, ягъни $[a; b]$ аралыгында

$$v(t_0) = f'(t_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \qquad (3)$$

булырлык t_0 табыла.

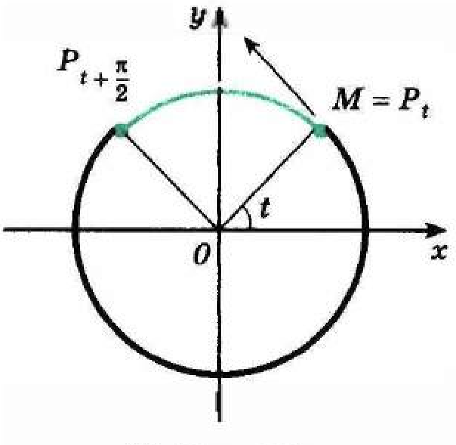
Без Лагранж формуласының механик интерпретациясен таптык.

2. Чыгарылма куллануга мисаллар. Функцияләрнең физик күренешләрне характерлаучы чыгарылмалары ярдәмендә башка физик зурлыклар да бирелә ала. Мәсәлән (билгеләмә буенча), егәрлек ул эшнең вакыт буенча табылган чыгарылмасы була. Мисал карап китик.

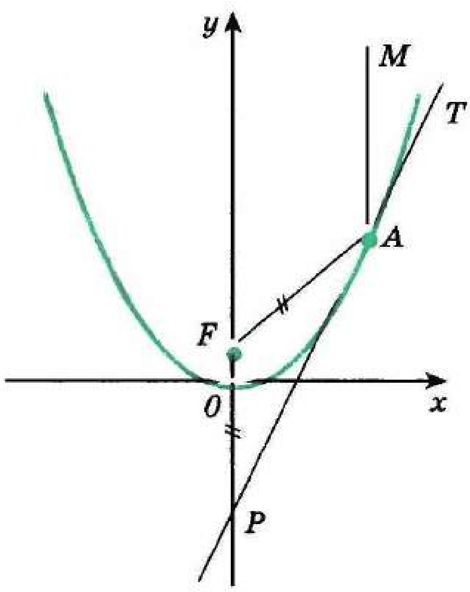
5 нче мисал. Бериш булмаган таякчык бирелгән, өстәвенә аның озынлыгының теләсә нинди l кисәгенең массасы $m(l)$ билгеле булсын (l таякчыкның билгеләнгән башыннан саналсын). Таякчык бериш булмаса да, аның зур булмаган (l дан $l + \Delta l$ га кадәр) кисәгенең тыгызлыгы якынча бер үк $\left(\frac{\Delta m}{\Delta l}\right)$ дип уйлау табигый, өстәвенә, Δl никадәр кечкенә булса, тыгызлык бу арада шулкадәр кечкенә чикләрдә үзгәрер. Шуңа күрә таякчык тыгызлыгының l га бәйле буларак таралышы характеристикасы итеп $d(l) = m'(l)$ *сызыкча тыгызлыгын* кабул итәләр.

6 нчы мисал. Механика мәсьәләләренең күбесендә ноктаның яссылыктагы яки пространстводагы хәрәкәте карала. Ул вакытта тизлек вектор зурлык була. Әгәр дә ноктаның t моментындагы координаталары $x(t)$ һәм $y(t)$ га тигез булсалар, тизлек векторы $\vec{v}(t)$ ның координаталары $x'(t)$ һәм $y'(t)$ га тигез була икән. Моннан файдаланып, кинематика нигезендә тригонометрик функцияләрнең чыгарылмалары формулаларын чыгарып була.

Радиусы 1 булган әйләнә буенча сәгать угына каршы юнәлештә 1 гә тигез почмакча тизлек белән тигез хәрәкәт карап китик (99 нчы рәсем). Ул чагында вакытның t моментында M ноктасының координаталары мондый була: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Физика



99 нчы рәсем



100 нче рәсем

курсыннан сезгә билгеле булганча, тизлек векторы $\vec{v}(t)$ әйләнәгә орынма юнәлешендә булып, аның озынлыгы 1 гә тигез ($|\vec{v}| = wR = 1 \cdot 1 = 1$). Димәк, бу вектор координаталары $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$ һәм $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$ булган $\overline{OP}_{t+\frac{\pi}{2}}$ векторы белән тәңгәл килә. Икенче яктан, $\vec{v}(t)$ векторының координаталары тиңдәшле рәвештә $x'(t)$ (ягъни $\cos' t$) һәм $y'(t)$ (ягъни $\sin' t$) га тигез. Безгә таныш булган формулалар табылды:

$$\cos' t = -\sin t, \ \sin' t = \cos t.$$

7 нче мисал. Параболаның оптикада һәм техникада кулланыла торган үзлеген чыгарыйк.

$y = ax^2$ параболасын Oy күчәре тирәсендә әйләндерүдән барлыкка килә торган өслек *әйләнү параболоиды* дип атала. Параболоидның эчке өслеге — көзгеле өслек, һәм бу параболик көзге Oy күчәренә параллель булган яктылык нурларының бәйләме белән яктыртыла дип күз алдына китерик.

Бу көзгенең Oy күчәре аша үтүче α яссылыгы белән төзелгән кисемен карап китик. Бу кисем $y = x^2$ параболасы кебек үк парабола була (Ox күчәрен кисем яссылыгында сайлыйбыз, $a = 1$). Оптика законнары буенча яктылыкның кайтарылган нуры α яссылыгында ятачак, өстәвенә бу нур параболага орынма белән төшүче MA нуры ясаган почмак белән тигез почмак төзер (100 нче рәсем).

Без Oy күчәренә параллель барлык нурларның чагылганнан соң Oy күчәренең бер үк ноктасында кисешүләрен исбат итәрбез.

Чагылган ирекле нурның Oy күчәре белән кисешү ноктасын F аша тамгалыйк. AT турысы параболага A ноктасында орынма булыр. Яктылыкның чагылдыру законнарыннан (100 нче рәсем) $\angle TAM = \angle FAP$ икәнлеге шунда ук килеп чыга. Ләкин MA нуры Oy күчәренә параллель, шуңа күрә $\angle FPA = \angle TAM$. Димәк, $\angle FPA =$

$= \angle FAP$, ягъни FPA өчпочмагы — тигезьянлы һәм $FA = FP$. $A(x_0; y_0)$ ноктасы парабола өстендә ята, шуңа күрә $y_0 = x_0^2$. AT орынмасының тигезләмәсе $y = 2x_0x - x_0^2$ рәвешле була. Аннан P ноктасының y_P ординатасын табабыз. Ул $y_P = 2x_0 \cdot 0 - x_0^2$, ягъни $y_P = -y_0$. F ноктасының ординатасын y дип тамгаласак, $FP = y + y_0$ булыр. Озынлык $FA = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - y)^2}$, шуңа күрә ($FA = FP$ икәнлеген искә төшерик) $(y + y_0)^2 = x_0^2 + (y_0 - y)^2$ тигезлеге дөрес, ягъни $y^2 + 2yy_0 + y_0^2 = y_0 + y_0^2 - 2yy_0 + y^2$, моннан $4yy_0 = y_0$ һәм ($y_0 \neq 0$ булганлыктан) $y = \frac{1}{4}$.

Шулай итеп, параболик көзгенең күчәренә параллель булган барлык нурлар чагылганнан соң бер ноктага җыела, ул ноктаны *параболик көзгенең фокусы* дип атыйлар (F ноктасын шулай ук $y = x^2$ параболасының фокусы дип атыйлар).

Параболик телескопларның төзелеше бу үзлеккә нигезләнгән. Ерак йолдызларның нурлары безгә параллель бәйләм рәвешендә килеп җитә. Параболик телескопны ясап, аның фокусына фотопластинка куйсак, без йолдыздан килгән яктылык сигналын көчәйтү мөмкинлегенә ирешәбез. Радиосигналларны көчәйтү мөмкинлеген биргән параболик антенналар эшләү дә шушы ук принципка нигезләнгән.

Параболик көзге фокусында яктылык чыганагы урнаштырсак, бу чыганактан килүче нурлар, көзгенең өслегеннән чагылганнан соң таралмыйча, көзгенең күчәренә параллель булган тар бәйләмгә җыелалар. Бу факт прожекторлар һәм фонарьлар, төрле проекторлар ясаганда кулланыла, аларның көзгеләрен параболалар формасында эшлиләр.

Күнегүләр

267.— Материаль нокта $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$ законы буенча турысызыклы хәрәкәт итә.
а) Хәрәкәтнең тизлеген t вакытының теләсә нинди моментында исәпләү өчен, формула чыгарыгыз. б) $t = 2c$ ка тигез моменты өчен тизлекне табыгыз. (Күчү метрларда үлчәнә.) в) Хәрәкәт башланып ничә секунд үткәч, нокта туктап калыр?

268.- Материаль нокта $x(t) = t^3 - 4t^2$ законы буенча турысызыклы хәрәкәт итә. $t = 5c$ моменты өчен тизлекне һәм тизләнешне табыгыз. (Күчеш метрларда үлчәнә.)

269.- Җисем үз күчәре тирәли $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$ законы буенча әйләнә. Ирекле t моментында һәм $t = 4$ булганда, почмакча тизлек $\omega(t)$ ны табыгыз ($\varphi(t)$ — радианнарда үлчәнгән борылу почмагы, $\omega(t)$ — секундына радиан белән үлчәнгән тизлек, t — секундларда үлчәнгән вакыт).

270.— Маховик тоткарлау нәтиҗәсендә t вакыт эчендә $\varphi(t) = 4t - 0{,}3t^2$ почмакка борыла. 1) Вакытның $t = 2c$ моментында маховикның почмакча әйләнү тизлеге $\omega(t)$ ны; 2) вакытның кайсы моментында аның әйләнүдән туктаганын табыгыз. ($\omega(t)$ — радианнар белән үлчәнгән почмак, t — секундлар белән үлчәнгән вакыт.)

271.— Нокта $x(t) = 2t^3 + t - 1$ законы буенча туры сызык буйлап хәрәкәт итсен. Вакытның t моментында тизләнешне табыгыз. Вакытның кайсы моментында тизләнеш а) 1 см/с^2; б) 2 см/с^2 ка тигез булыр? ($x(t)$ — сантиметрларда үлчәнгән күчү, t — секундларда үлчәнгән вакыт.)

272.— Нокта, $x(t) = -\frac{t^3}{6} + 3t^2 - 5$ законына буйсынып, туры сызык буйлап хәрәкәт итсен (вакыт — секундлар, координата метрлар белән үлчәнә). а) Ноктаның тизләнеше нульгә тигез булган вакытның t моментын; б) бу моментта нокта нинди тизлек белән хәрәкәт иткәнен табыгыз.

273.— Нокта, $x(t) = \sqrt{t}$ законына буйсынып, туры сызык буйлап хәрәкәт итә. Аның тизләнеше тизлекнең кубына пропорциональ икәнлеген күрсәтегез.

274.— $x(t) = 2t^3 - t^2$ законы буенча турысызыклы хәрәкәт итүче m массалы материаль ноктага, $t = 2$ булганда, тәэсир итүче F көчен табыгыз.

275.— Массасы 2 кг булган җисем $x(t) = t^2 + t + 1$ законы буенча туры сызык буйлап хәрәкәт итә. x координатасы — сантиметрлар белән, вакыт секундлар белән үлчәнә. а) Тәэсир итүче көчне; б) хәрәкәт башланып 2 секундтан соң җисемнең кинетик энергиясе E ны табыгыз.

276.— Озынлыгы 20 см булган AB таякчыгының A ноктасыннан l (см) ераклыкта урнашкан теләсә нинди C ноктасы өчен таякчыкның AC кисәге массасы граммнарда $m(l) = 3l^2 + 5l$ формуласы аша табылуы билгеле булсын. а) AB кисемтәсенең уртасында; б) таякчыкның B очында сызыкча тыгызлыкны табыгыз.

277.— Ике материаль нокта туры сызык буйлап $x_1(t) = 4t^2 - 3$ һәм $x_2(t) = t^3$ законнары буенча хәрәкәт итә. Кайсы вакыт аралыгында беренче ноктаның тизлеге икенчесенең тизлегеннән зуррак булыр?

278.— O пунктыннан араларындагы почмак 60° ка тигез булган ике нур буенча ике җисем: берсе 5 км/сәг тизлек белән — тигез, икенчесе $s(t) = 2t^2 + t$ законы буенча хәрәкәт итә. Алар бер-берсеннән нинди тизлек белән ераклашалар? (s — километрлар, t — секундлар белән үлчәнә.)

§ 6.

Функцияне тикшергәндә чыгарылма куллану

22. Функциянең үсүе (кимүе) билгесе

6 нчы пунктта без функцияләрне тикшерүнең төп мәсьәләләреннән берсе бу функциянең үсә яки кими торган аралыкларын табу икәнлеген күреп киттек. Мондый тикшерүне чыгарылма ярдәмендә җиңел башкарып була. Тиешле раслауларны әйтеп китик.

Әгәр дә I интервалының һәр ноктасында $f'(x) > 0$ булса, f функциясе I дә үсә.

I интервалының һәр ноктасында $f'(x) < 0$ булса, f функциясе I дә кими.

Бу билгеләрне исбатлау Лагранж формулаларына нигезләнеп алып барыла (19 нчы пунктны карагыз). Интервалда теләсә нинди x_1 һәм x_2 саннарын алыйк. $x_1 < x_2$ булсын. Лагранж формуласы буенча

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \qquad (1)$$

булырлык $c \in (x_1; x_2)$ саны бар. c саны I интервалына керә, чөнки x_1 һәм x_2 нокталары I гә керәләр. $x \in I$ өчен $f'(x) > 0$ булса, $f'(c) > 0$, һәм шуңа күрә $f(x_1) < f(x_2)$ бу (1) формуладан килеп чыга, чөнки $x_2 - x_1 > 0$. Шулай итеп, I дә f функциясенең үсүе исбатланды. Әгәр $x \in I$ өчен $f'(x) < 0$ булса, $f'(c) < 0$, һәм шуңа күрә $f(x_1) > f(x_2)$ бу (1) формуладан килеп чыга, чөнки $x_2 - x_1 > 0$. Шулай итеп, I дә f функциясенең кимүе исбатланды.

Бу билгеләрнең күргәзмәле мәгънәләре түбәндәге физик фикер йөртүләрдән ачыкланыр (ачыклык өчен үсү билгесен карап китик).

Ординаталар күчәре буенча хәрәкәт итүче нокта ординатасы вакытның t моментында $y = f(t)$ булсын. Ул чакта вакытның t моментында бу ноктаның тизлеге $f'(t)$ га тигез булыр (21 нче пунктны кара). I аралыгында вакытның теләсә нинди моменты өчен $f'(t) > 0$ булса, нокта ординаталар күчәренең уңай юнәлешендә хәрәкәт итәр, ягъни $t_1 < t_2$ булса, $f(t_1) < f(t_2)$. Ә бу a функциясенең I аралыгында үсүен аңлата.

1 нче мисал. $f(x)=x-x^3$ функциясенең үсү (кимү) аралыкларын табыйк һәм аның графигын төзик.

Бу функция барлык реаль саннар күплегендә билгеләнгән. $f'(x)=1-3x^2$ тигезлегеннән $1-3x^2>0$ булса, $f'(x)>0$. Бу тигезсезлекне интерваллар методы белән чишеп (101 нче *а* рәсем), $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ интервалында $f'(x)>0$ һәм, димәк, бу интервалда fның үскәнен белербез.

Шуңа охшаш рәвештә $\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ һәм $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \infty\right)$ аралыкларында $f'(x)<0$, шуңа күрә бу аралыкларда f кими. Хәзер fның $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ һәм $\frac{1}{\sqrt{3}}$ нокталарындагы кыйммәтен исәплик:

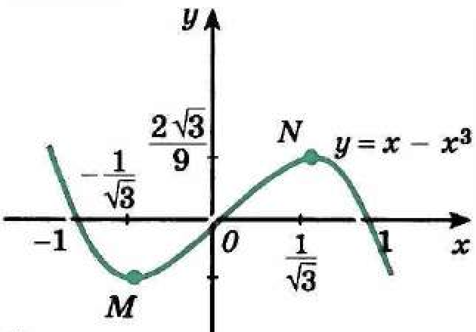
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=-\frac{2}{3\sqrt{3}};$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Координаталар яссылыгында $M\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ һәм $N\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ нокталарын билгелик, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ аралыгында үсүче, $\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ һәм $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \infty\right)$ аралыкларында кимүче функциянең графигын төзик (101 нче *б* рәсем).

Рәсемнән күренгәнчә, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ һәм $\frac{1}{\sqrt{3}}$ нокталарында өзлексез f функциясе $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ кисемтәсендә үсә, ә $\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ һәм $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\ \infty\right)$ аралыкларында кими.

а)



б)

101 нче рәсем

1 нче искәрмә. Әгәр f функциясе үсү (кимү) аралыгының кайсы да булса бер очында өзлексез булса, ул вакытта бу ноктаны әлеге аралыкка кертәләр (1 нче мисалдагы $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ һәм $\frac{1}{\sqrt{3}}$ нокталары кебек).

Без бу фактны исбатламыйча гына кабул итәрбез.

2 нче искәрмә. $f'(x)>0$ һәм $f'(x)<0$ тигезсезлекләрен чишү өчен, интерваллар методын (Дарбу теоремасын) куллану уңай була: аларда чыгарылма 0 гә тигез яки ул

булмаган нокталар f функциясенең билгеләнү өлкәсен аларның һәркайсында f' даими тамга саклый торган аралыкларга бүләләр. (Бу факт математик анализ курсында исбат ителә.) f' ның кыйммәтен аралыкның нинди дә булса ноктасында исәпләп, тамганы билгеләп була.

2 нче мисал. $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ функциясенең үсү (кимү) аралыкларын табыйк һәм аның графигын төзик.

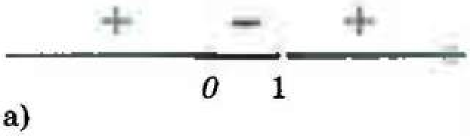
Бирелгән функциянең билгеләнү өлкәсе булып $(-\infty; 0)$ һәм $(0; \infty)$ аралыклары берләшмәсе тора; $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$; шуңа күрә $x = 1$ булганда, $f'(x) = 0$. 0 һәм 1 нокталары f функциясенең билгеләнү өлкәсен өч аралыкка: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ һәм $(1; \infty)$ аралыкларына бүләләр. 2 нче искәрмә буенча, аларның һәркайсында f' үзенең даими тамгасын саклый. Бу аралыкларның һәрберсендә чыгарылманың тамгасы 102 нче *а* рәсемдә күрсәтелгән.

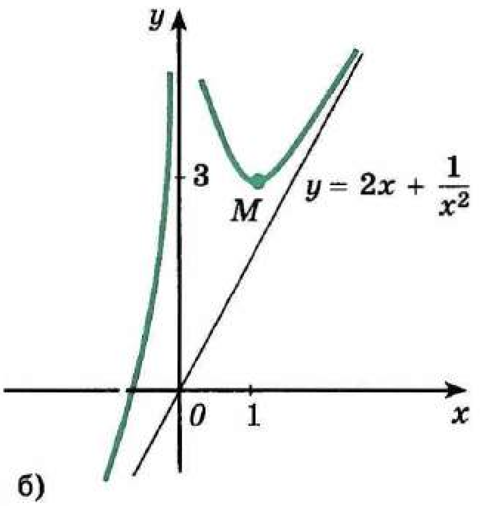
Шулай булгач, бирелгән функция $(-\infty; 0)$ һәм $(1; \infty)$ аралыкларында үсә. f функциясе 1 ноктасында өзлексез, шуңа күрә бу ноктаны (1 нче искәрмә нигезендә) f функциясе үскән аралыкка кертергә мөмкин.

Нәтиҗәдә f ның $(-\infty; 0)$ һәм $[1; \infty)$ аралыкларында үскәнлеген табабыз. Аннары $(0; 1)$ интервалында $f'(x) < 0$ һәм шуңа күрә f (1 нче искәрмәне искә алганда) $(0; 1]$ аралыкта кими.

0 ноктасы $D(f)$ ка керми, ләкин, x 0 гә омтылганда, $\frac{1}{x^2}$ кушылучысы чиксез үсә. Шуңа күрә f ның кыйммәтләре дә чиксез үсә. 1 ноктасында функция 3 кә тигез кыйммәт ала.

Хәзер координаталар яссылыгында $M(1; 3)$ ноктасын билгелик һәм $(-\infty; 0)$, $[1; \infty)$ аралыкларында үсүче, ә $(0; 1]$ аралыкта кимүче функциянең графигын сызыйк (102 нче *б* рәсем).





102 нче рәсем

3 нче мисал. $f(x) = -2x + \sin x$ функциясенең үсү (кимү) аралыкларын табыйк.

Функция барлык саннар турыда билгеләнгән. Аның чыгарылмасы мондый була:

$$f'(x) = -2 + \cos x.$$

$|\cos x| \leq 1$ булганлыктан, барлык реаль x лар өчен $f'(x) < 0$ булуы җиңел табыла. Ә бу $f(x) = -2x + \sin x$ функциясенең барлык саннар турыда кимегәнлеген аңлата.

Күнегүләр

Функцияләрнең үсү һәм кимү аралыкларын табыгыз (279—281).

279. а) $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$; б) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$;
в) $f(x) = 4x - 5$; г) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$.

280. а) $f(x) = -\frac{2}{x} + 1$; б) $f(x) = x^2(x - 3)$;
в) $f(x) = \frac{x-3}{x}$; г) $f(x) = x^3 - 27x$.

281. а) $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$; б) $f(x) = 4 - x^4$;
в) $f(x) = x(x^2 - 12)$; г) $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

282. Түбәндәге шартларны канәгатьләндерүче f функциясе графигының эскизын төзегез:
а) $D(f) = [-2; 5]$, $f'(x) > 0$, $x \in (-2; 5)$ өчен;
б) $D(f) = [1; 6]$, $f'(x) < 0$, $x \in (1; 3) \cup (3; 6)$, $f'(3) = 0$ өчен;
в) $D(f) = [-2; 5]$, $f'(x) > 0$, $x \in (-2; 1) \cup (1; 5)$, $f'(1) = 0$ өчен;
г) $D(f) = [1; 6]$, $f'(x) < 0$, $x \in (1; 6)$ өчен.

Функцияләрнең үсү һәм кимү аралыкларын табыгыз аларның графикларын төзегез (283—284).

283. а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$; б) $f(x) = 4x^3 - 1{,}5x^4$;
в) $f(x) = 2 + 9x + 3x^2 - x^3$; г) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

284. а) $f(x) = 2 - \frac{4}{0{,}5x - 1}$; б) $f(x) = |x - 3| - 2$;
в) $f(x) = 8x^2 - x^4$; г) $f(x) = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$.

285. f функциясенең $\boldsymbol{R}$ да үсүен, ә g функциясенең $\boldsymbol{R}$ да кимүен исбат итегез:
а) $f(x) = 3x + \cos 2x$; б) $g(x) = -\frac{x^3}{3} - x$;
в) $f(x) = x^7 + 2x^5 + 3$; г) $g(x) = -4x + \sin x$.

286. Бирелгән P_1 һәм P_2 аралыкларының һәркайсында тигезләмәнең бары тик бер генә тамыры булуын исбат итегез:
а) $x^3 - 27x + 2 = 0$; $P_1 = [-1; 1]$, $P_2 = [4; 6]$;
б) $x^4 - 4x - 9 = 0$; $P_1 = [-2; 0]$, $P_2 = [2; 3]$;
в) $x^4 + 6x^2 - 8 = 0$; $P_1 = [-2; -1]$, $P_2 = [1; 2]$;
г) $-1 + 3x^2 - x^3 = 0$; $P_1 = [-2; 0]$; $P_2 = [2; 3]$.

23. Функцияләрнең критик нокталары, аның максимумнары һәм минимумнары

Без $f'(x) > 0$ һәм $f'(x) < 0$ булган аралыкларда функциянең үзен тотышын карап киттек. Чыгарылма булмаган яки ул нульгә тигез булган функциянең билгеләнү өлкәсендәге эчке нокталары бу функциянең *критик нокталары* дип атала. Ул нокталар, функциянең графигын төзегәндә, зур роль уйныйлар, чөнки бары тик алар гына функциянең экстремум нокталары була ала (103 һәм 104 нче рәсемнәр). Тиешле раслауны әйтеп китик, аны *Ферма теоремасы* (француз математигы Пьер Ферма хөрмәтенә) дип атыйлар.

Экстремумның кирәклек билгесе.

Әгәр x_0 ноктасы f функциясенең экстремум ноктасы булып бу ноктада аның чыгарылмасы булса, ул нульгә тигез: $f'(x_0) = 0$.

$f'(x) > 0$ очрагын карап китик. Чыгарылманың билгеләмәсе буенча $x \to x_0$ булганда, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ чагыштырмасы $f'(x_0)$ уңай санына омтыла, димәк, ул үзе дә x_0 гә җитәрлек кадәр якын булган барлык x лар өчен уңай була. Мондый x лар өчен

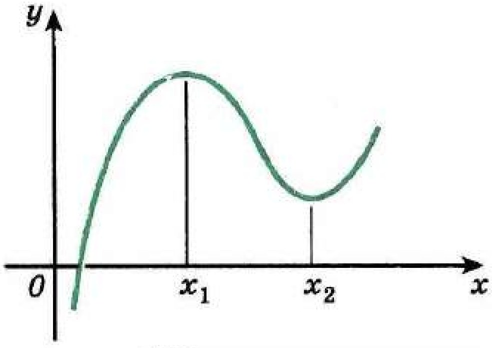
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

һәм, димәк, x_0 нең ниндидер тирәлегендәге барлык $x > x_0$ өчен $f(x) > f(x_0)$. Шуңа күрә x_0 максимум ноктасы була алмый.

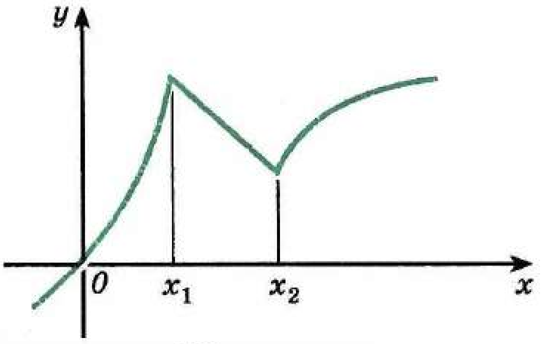
Әгәр $x < x_0$ булса, $f(x) < f(x_0)$ һәм, димәк, x_0 ноктасы f ның минимум ноктасы да булмый.

$f'(x) < 0$ очрагы да шулай ук тикшерелә.

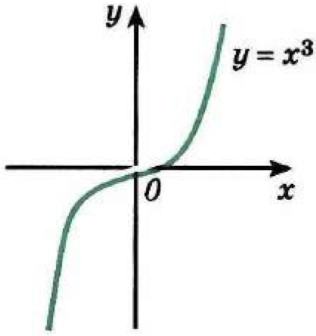
Ферма теоремасының экстремум булу өчен кирәкле шарт кына булуын кисәтеп үтү зур әһәмияткә ия: x_0 ноктасында чыгарылманың нульгә әйләнүеннән функция бу ноктада экстремумга ия дип әйтү дөрес булмас иде. Мәсәлән, $f(x) = x^3$ функциясенең чыгарылмасы 0 ноктасында нульгә тигез, ләкин функциянең бу ноктада экстремумы юк (105 нче рәсем).



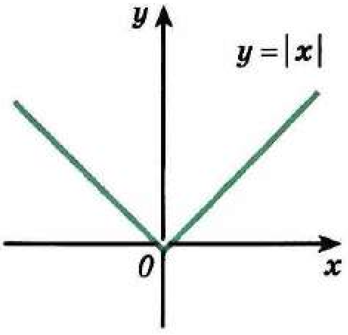
103 нче рәсем



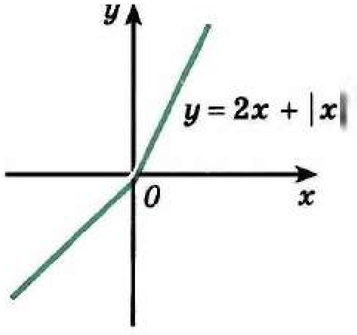
104 нче рәсем



105 нче рәсем



106 нчы рәсем



107 нче рәсем

Хәзергә кадәр без чыгарылмалары нульгә тигез булган критик нокталарны тикшердек. Чыгарылмалары булмаган критик нокталар да бар, аларны да карап үтәргә кирәк. (Мәсәлән, 0 ноктасының $y = \sqrt{x}$ функциясе өчен критик нокта булмаганлыгын күрсәтеп китик: бу ноктада чыгарылма юк, ләкин ул билгеләнү өлкәсенең эчке ноктасы булмый.) Бу нокталарда функциянең экстремумнары булырга да, булмаска да мөмкин.

1 нче мисал. $f(x) = |x|$ функциясен тикшерик (106 нчы рәсем). 0 ноктасында бу функциянең чыгарылмасы юк. Димәк, бу нокта — критик нокта. 0 ноктасында функциянең минимумы булуы ачык.

2 нче мисал. $f(x) = 2x + |x|$ функциясен карыйк (107 нче рәсем). Графиктан 0 ноктасында бу функциянең экстремумы булмавы күренә. Бу ноктада функциянең чыгарылмасы да юк.

Чыннан да, f функциясенең 0 ноктасында чыгарылмасы бар дип уйласак, $f(x) - 2x$ның да 0 дә чыгарылмасы булыр иде. Ләкин $f(x) - 2x = |x|$, ә $|x|$ функциясе 0 ноктасында дифференциалланмый (18 нче пунктны карагыз), каршылык килеп чыкты.

Димәк, f функциясенең 0 ноктасында чыгарылмасы юк.

Ферма теоремасыннан функциянең экстремум нокталарын табу өчен, беренче чиратта аның критик нокталарын табарга кирәк икәнлеге килеп чыга. Тикшерелгән мисаллардан күренгәнчә, бирелгән критик ноктаның экстремум ноктасымы, юкмы икәнлеген белү өчен, өстәмә тикшерү үткәрергә кирәк була. Шуның белән бергә, еш кына ноктада экстремумның булуы өчен түбәндәге җитәрлек шартлардан файдалану ярдәм итә.

Функциянең максимумы билгесе ***Әгәр f функциясе x_0 ноктасында өзлексез, ә $(a; x_0)$ интервалында $f'(x_0) > 0$ һәм $(x_0; b)$ интервалында $f'(x_0) < 0$ булса, x_0 ноктасы f функциясенең максимум ноктасы була.***

Теореманы гадирәк итеп әйтсәк, куллану өчен уңайрак булыр.

Чыгарылма x_0 ноктасында тамгасын плюстан минуска үзгәртсә, x_0 максимум ноктасы була.

Исбатлау. $f'(x) > 0$ чыгарылмасы $(a; x_0)$ интервалында, ә f функциясе x_0 ноктасында өзлексез, димәк (22 нче пунктны кара), f функциясе $(a; x_0]$ аралыкта үсә һәм шуңа күрә $(a; x_0)$ интервалындагы барлык x лар өчен $f(x) < f(x_0)$.

$[x_0; b)$ аралыгында функция кими (исбатлау алдагыга охшаш итеп алып барыла) һәм шуңа күрә $(x_0; b)$ интервалындагы барлык x лар өчен $f(x) < f(x_0)$.

Шулай итеп, $(a; b)$ интервалындагы барлык $x \neq x_0$ өчен $f(x) < f(x_0)$, ягъни x_0 ноктасы f функциясенең максимум ноктасы була.

Максимум билгесенең бик гади механик мәгънәсе бар. Без $f(x)$ ул — Oy күчәре буйлап хәрәкәт итүче ноктаның вакытның x ноктасындагы координатасы, ә $f'(x)$ — ноктаның бу моменттагы тизлеге дип саный алабыз. Шарт буенча вакытның x_0 дән алдан килүче аралыгында нокта тизлеге уңай. Шуңа күрә бу вакыт эчендә нокта, уңай юнәлештә хәрәкәт итеп, Oy күчәре буенча $f(x_0)$ ноктасына кадәр күтәрелә, ягъни $x < x_0$ булганда, $f(x) < f(x_0)$. Нокта x_0 моментында бер мизгелгә туктап тора (вакытның бу моментында аның тизлеге нульгә тигез була яки аның түгел), аннан соң ул күчәр буйлап төшә башлый (шарт буенча $f'(x)$ тизлеге, $x > x_0$ булганда, нульдән кечерәк), ягъни $f(x) < f(x_0)$. Шулай итеп, x_0 тирәлегендә $f(x) < f(x_0)$ һәм x_0 ноктасы — максимум ноктасы.

Функциянең минимумы билгесе. ***f функциясе x_0 ноктасында өзлексез, ә $(a; x_0)$ интервалында $f'(x_0) < 0$ һәм $(x_0; b)$ интервалында $f'(x_0) > 0$ булса, x_0 ноктасы f функциясенең минимум ноктасы була.***

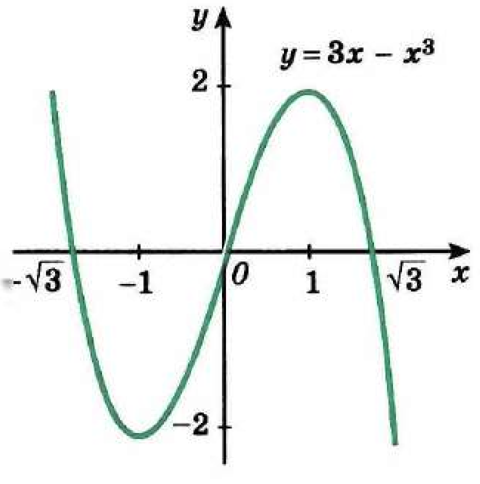
Гадәттә, бу теореманың гадиләштерелгән әйтелешеннән файдаланалар.

Чыгарылма x_0 ноктасында тамгасын минустан плюска үзгәртсә, x_0 минимум ноктасы була.

Бу билгене исбатлау максимум билгесен исбатлауга охшаш (аны мөстәкыйль башкару файдалы булыр).

3 нче мисал. $f(x) = 3x - x^3$ функциясенең экстремум нокталарын табыйк.

Бу функциянең $3 - 3x^2$ ка тигез чыгарылмасы барлык нокталарда билгеләнгән һәм -1 һәм $+1$ нокталарында нульгә әйләнә. -1 ноктасында чыгарылма тамгасын минустан плюска үзгәртә ($x < -1$ булганда,



108 нче рәсем

ма тамгасын плюстан минуска үзгәртә. Максимум һәм минимум билгеләреннән файдаланып, f функциясе өчен -1 ноктасының — минимум, ә 1 ноктасының максимум ноктасы икәнен табабыз. Функциянең графигы 108 нче рәсемдә сурәтләнгән.

Күнегүләр

287.— Графигы 109 нчы рәсемдә сурәтләнгән функциянең критик нокталарын табыгыз.

288.— Функциянең критик нокталарын табыгыз:

а) $f(x) = 4 - 2x + 7x^2$; б) $f(x) = 1 + \cos 2x$;

в) $f(x) = x - 2\sin x$; г) $f(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$.

289.— Графигы 110 нчы рәсемдә сурәтләнгән f функциясенең максимум һәм минимум нокталарын табыгыз. Тиңдәш ноктада чыгарылма булырмы? Ул булса, аның кыйммәте нинди булыр?

290.— Функциянең критик нокталарын табыгыз. Аларның кайсылары — максимум нокталары, ә кайсылары минимум нокталары булыр?

а) $f(x) = 5 + 12x - x^3$; б) $f(x) = 9 + 8x^2 - x^4$;

в) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$; г) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2$.

291.— f функциясенең критик нокталары булмаганлыгын исбатлагыз:

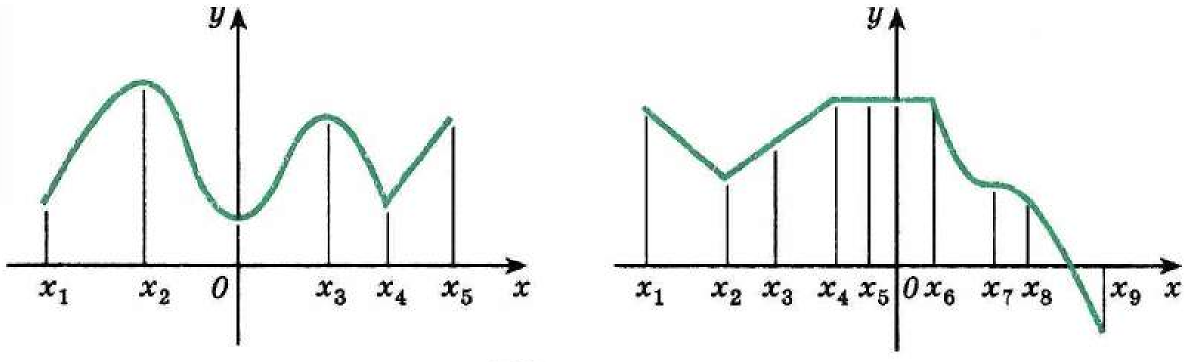
а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

в) $f(x) = 3x - 7$; г) $f(x) = 3x^5 + 2x$.

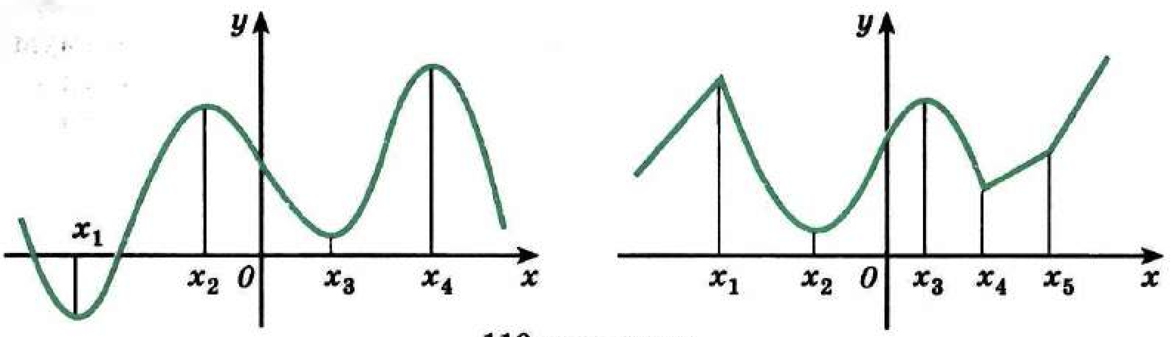
f функциясенең критик нокталарын табыгыз (292—293).

292.— а) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$; б) $f(x) = 2x + \frac{8}{x^2}$;

в) $f(x) = 10\cos x + \sin 2x - 6x$; г) $f(x) = x^3 - 4x + 8$.



109 нчы рәсем



110 нчы рәсем

293.— а) $f(x) = (x-2)^3$; б) $f(x) = \begin{cases} -x-2, & x \leqslant -1 \text{ булганда,} \\ x, & -1 < x < 1 \text{ булганда,} \\ 2-x, & x \geqslant 1 \text{ булганда;} \end{cases}$

в) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$; г) $f(x) = \begin{cases} x+6, & x < -2 \text{ булганда,} \\ x^2, & -2 \leqslant x \leqslant 2 \text{ булганда,} \\ 6-x, & x > 2 \text{ булганда.} \end{cases}$

294.— Түбәндәге үзлекләргә ия булган функция графигының эскизын төзегез:

а) $D(f) = [-3; 5]$, $f'(x) > 0$ $x \in (-3; 1)$ өчен, $f'(x) < 0$ $x \in (1; 5)$ һәм $f'(1) = 0$ өчен;

б) $D(f) = [-3; 5]$, $f'(x) < 0$ $x \in (-3; 1)$ өчен, $f'(x) > 0$ $x \in (1; 5)$ өчен һәм 1 ноктасында f функциясенең чыгарылмасы булмый;

в) $D(f) = [a; b]$, x_1 — функциянең минимум ноктасы, x_2 — аның максимум ноктасы, $f(a) > f(b)$;

г) $D(f) = [a; b]$, x_1 — максимум ноктасы, x_2 — минимум ноктасы, $f(a) = f(b)$.

295.— Функциянең үсүен, кимүен тикшерегез һәм экстремумы булу-булмавын ачыклагыз. Функциянең графигын төзегез:

а) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2$; б) $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$;

в) $f(x) = 2x - \frac{1}{6}x^3$; г) $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

24. Функцияне тикшергәндә чыгарылма куллануга мисаллар

Сез (4 нче пункттан) функциянең графигын төзүне аны тикшерүдән башлауның яхшырак икәнлеген беләсез, ә ул түбәндәгедән гыйбарәт: бирелгән функция өчен: 1) аның билгеләнү өлкәсен табалар; 2) f функциясенең так яки җөп, периодик булу-булмавын ачыклыйлар. Моннан соң 3) f функциясе графигының координаталар күчәрләре белән кисешү нокталарын; 4) аның тамгасы даими булган аралыкларны; 5) үсү һәм кимү аралыкларын; 6) экстремум нокталарын һәм бу нокталарда fның кыйммәтләрен

табалар һәм 7) «аерым» нокталар һәм модуле буенча зуррак x лар тирәлегендә функциянең үзен тотышын тикшерәләр.

Шул рәвешле тикшерү нәтиҗәсендә функциянең графигы төзелә.

Функциянең үсүен (кимүен) һәм экстремумы булу-булмавын тикшерү чыгарылма ярдәмендә башкару уңай. Моның өчен башта f функциясенең чыгарылмасын һәм аның критик нокталарын табып, аннары аларның кайсылары экстремум нокталары булуын ачыклыйлар.

1 нче мисал. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ функциясен тикшерик һәм аның графигын төзик.

Тикшерүне югарыда күрсәтелгән схема буенча башкарыйк.

1) $D(f) = R$, чөнки f — күпбуын.

2) f функциясе так та, җөп тә булмый (моны үзлегегездән исбатлагыз).

3), 4) f графигы ординаталар күчәре белән $(0; f(0))$ ноктасында кисешә; f графигының абсциссалар күчәре белән кисешү нокталарын табу өчен, $3x^5 - 5x^3 + 2 = 0$ тигезләмәсен чишәргә кирәк, аның тамырларының берсе ($x = 1$) җиңел табыла. Тамырларның башкалары (әгәр алар булса) якынча гына табыла алалар. Шуңа күрә бирелгән бу функция өчен без графикның абсциссалар күчәре белән башка кисешү нокталарын һәм тамганың даими аралыкларын табып тормыйбыз (4 нче пунктта күрсәтелеп киткәнчә, кителгән схема якынча характерда гына була).

5), 6) f функциясенең чыгарылмасын табабыз:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1).$$

$D(f') = R$,шуңа күрә $f'(x)$ булмаган критик нокталар юк.

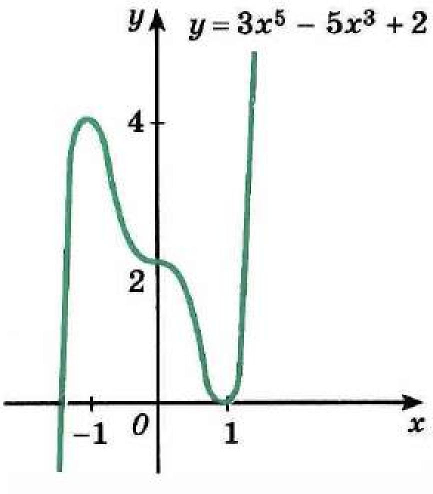
$x^2(x^2 - 1) = 0$ булса, ягъни аргументның 0, −1 һәм 1 гә тигез кыйммәтләре өчен $f'(x) = 0$ икәнлеген искәртеп китик. Без тикшергән функциянең өч критик ноктасы бар.

Таблица төзибез:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	2	↘	0	↗
		max				min	

Бу таблицаның беренче юлында үсү тәртибендә функциянең критик нокталары һәм алар белән чикләнгән интерваллар бирелгән. Икенче юлда бу интервалларда чыгарылманың тамгалары күрсәтелгән. (Мондый һәр интервалда чыгарылманың тамгасы үзгәрешсез кала, аны табу өчен чыгарылманың тикшерелә торган интервалдагы нинди дә булса ноктада тамгасын билгеләү җитә.) Өченче юлда бирелгән функциянең ничек үзгәрә баруы: «↗» — үсә, «↘» — кими, дүртенчесендә критик нокталарның рәвешләре турындагы нәтиҗәләр язылган (югарыда бирелгән схеманың 5 нче

һәм 6 нчы пунктлары). f функциясенең критик ноктасы булган 0 ноктасы экстремум ноктасы булмый, шуңа күрә ул таблицаның дүртенче юлында күрсәтелмәгән. Функциянең критик ноктлар арасындагы аралыкта ничек үзгәрә баруы турындагы нәтиҗәне еш кына (чыгарылманың тамгасын билгеләү урынына) функциянең бу аралыклар очындагы кыйммәтләрен чагыштырып ясап була. Мәсәлән, $f(0) < f(-1)$ булганда, $(-1; 0)$ аралыгында функция кими (һәм, димәк, бу аралыкта $f' < 0$ була).



111 нче рәсем

Функциянең графигын төзибез (111 нче рәсем). Төзүне таблицада күрсәтелгән аралыкларда башкару уңай. Мәсәлән, таблицада f ның $(0; 1)$ интервалында кимүе күрсәтелгән. f 0 һәм 1 нокталарында өзлексез (чөнки ул һәр җирдә өзлексез), шуңа күрә ул $[0; 1]$ кисемтәсендә кими. Шуның өчен графикны $[0; 1]$ кисемтәсендә $f(0) = 2$ кыйммәтеннән $f(1) = 0$ кыйммәтенә кадәр кими торган итеп ясыйбыз. Бу вакытта 0, ±1 нокталарында графикка орынмалар горизонталь булырга тиешләр, таблицаның икенче юлында бу нокталарда чыгарылма нульгә тигез диелгән. Башка аралыкларда да график шулай ук төзелә.

2 нче мисал. $2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0$ тигезләмәсенең тамырлары санын табыйк.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 11$ функциясен карап китик. Аның билгеләнү өлкәсе $D(f) = (-\infty; \infty)$. Бу f функциясенең критик нокталарын эзләп табу өчен, аның чыгарылмасын табабыз: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Бу чыгарылма $x = -1$ һәм $x = 2$ нокталарында нульгә әйләнә.

Таблицаны тутырыйк:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	−4	↘	−31	↗
		max		min	

$(-\infty; -1]$ аралыкта функция $-\infty$ тән -4 кә кадәр үсә. Шуңа күрә бу аралыкта $f(x) = 0$ тигезләмәсенең тамырлары булмый; $[-1; 2]$ аралыкта тигезләмәнең тамырлары шулай ук булмый, чөнки бу аралыкта f функциясе -4 тән -31 гә кадәр кими; ниһаять, $[2; \infty)$ аралыкта функция -31 дән чиксезлеккә кадәр үсә, шуңа күрә бу аралыкта $f(x) = 0$ тигезләмәсенең төгәл бер тамыры була (тамырлар турындагы теорема буенча). Шулай итеп, $2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0$ тигезләмәсенең бер тамыры бар (бу тамыр да $(2; \infty)$ интервалында була).

Күнегүләр

Функцияне тикшерегез һәм аның графигын төзегез (296—297).

296. а) $f(x) = x^2 - 2x + 8$; б) $f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3}$;

в) $f(x) = -x^2 + 5x + 4$; г) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$.

297. а) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
в) $f(x) = x^3 + 3x + 2$; г) $f(x) = 3x^2 - x^3$.

298. Функциянең үсү һәм киму аралыкларын табыгыз:
а) $f(x) = 1 + 1{,}5x - 3x^2 - 2{,}5x^3$;
б) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 6x + 1$;
в) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 8x - 5$; г) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x - 2$.

299. f функциясенең R күплегендә үсүен исбатлагыз:
а) $f(x) = 2x - \cos x$; б) $f(x) = x^5 + 4x$;
в) $f(x) = \sin x + \frac{3x}{2}$; г) $f(x) = 2x^3 + x - 5$.

Функцияне тикшерегез һәм аның графигын төзегез (300—302).

300. а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$; б) $f(x) = 4x^2 - x^4$;

в) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 1\frac{1}{3}x^3$; г) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

301. а) $f(x) = x^2\sqrt{1 + x}$; б) $f(x) = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$;

в) $f(x) = x\sqrt{2 - x}$; г) $f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$.

302. а) $f(x) = \sin^2 x + \sin x$; б) $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$;

в) $f(x) = \cos^2 x - \cos x$; г) $f(x) = \frac{x}{x - 1}$.

303. f функциясенең бирелгән аралыкта уңай кыйммәтләр алганлыгын исбат итегез:
а) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$; $I = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;
б) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$; $I = [1; \infty)$;
в) $f(x) = x - \sin x$; $I = (0; \infty)$;
г) $f(x) = x + \frac{\pi}{2} - \cos x$; $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

304. — Тигезләмәнең ничә тамыры бар?

а) $4x^3 - 3x^2 - 36x - 10 = 0$; б) $\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x = 0$;

в) $x^4 - 4x^3 - 9 = 0$; г) $x^2 - \frac{x^4}{3} - 1 = 0$.

25. Функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләре

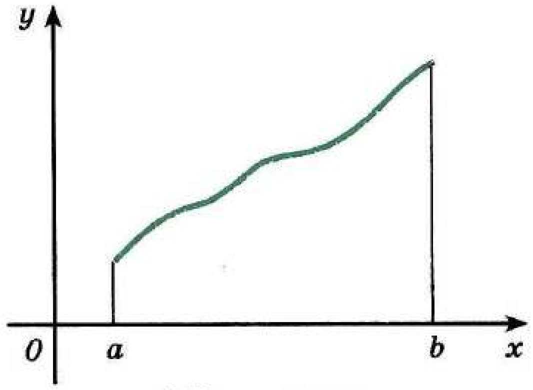
Бик күп практик мәсьәләләрне чишү еш кына кисемтәдә өзлексез булган функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табуга кайтып кала. Анализ курсларында $[a; b]$ *кисемтәсендә өзлексез f функциясенең бу кисемтәдә иң зур* һәм *иң кечкенә кыйммәтләр алуын*, ягъни $[a; b]$ кисемтәсендә f функциясе иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләр алырлык нокталар булуын раслаучы **Вейерштрасс теоремасы** исбатлана.

$[a; b]$ кисемтәсендә f функциясе өзлексез булып кына калмыйча, бу кисемтәдә аның чикле санда гына критик нокталары да булган очрак өчен *f ның иң зур* һәм *иң кечкенә кыйммәтләрен табу* кагыйдәсен күрсәтик.

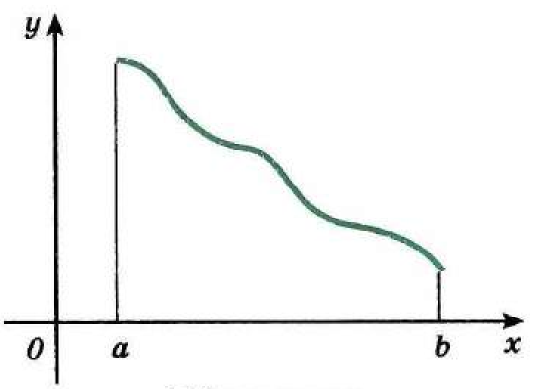
Башта f ның $[a; b]$ кисемтәсендә критик нокталары юк, дип уйлыйк. Ул вакытта (23 нче пункт) f бу кисемтәдә үсә (112 нче рәсем) я кимер (113 нче рәсем), һәм, димәк, f функциясенең $[a; b]$ кисемтәсендәге иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләре булып f ның a һәм b очларындагы кыйммәтләре торыр.

Хәзер $[a; b]$ кисемтәсендә f функциясенең критик нокталары чикле санда булсын. Бу нокталар $[a; b]$ кисемтәсен эчке өлешләрендә критик нокталар булмаган чикле сандагы кисемтәләргә бүләләр. Шуңа күрә (алдагы абзацны кара) f иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен мондый кисемтәләрнең очларында, ягъни функциянең критик нокталарында яки a һәм b нокталарында алыр.

> Шулай итеп, кисемтәдә критик нокталары чикле санда булган функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табу өчен, аның барлык критик нокталарындагы һәм кисемтә очларындагы кыйммәтләрен исәпләргә һәм табылган саннарның иң зурысын һәм иң кечкенәсен сайлап алырга кирәк.



112 нче рәсем



113 нче рәсем

1 нче мисал. $y(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 1$ функциясенең $[-2; 0]$ кисемтәсендәге иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыйк.

Башта критик нокталарны табабыз. $y'(x) = 3x^2 - 3x - 6$ чыгарылмасы теләсә кайсы x өчен билгеләнгән, шуңа күрә $y'(x) = 0$ тигезләмәсен чишәргә кала. Аны чишеп табабыз: $x = -1$ һәм $x = 2$.

Хәзер $y(-2) = -1$, $y(-1) = 4{,}5$ һәм $y(0) = 1$ саннарының иң зурысын һәм иң кечкенәсен сайлап алырга кирәк ($x = 2$ критик ноктасы тикшерелә торган кисемтәгә керми). Кыйммәтләрнең иң кечкенәсе -2 ноктасында һәм ул -1 гә тигез, ә иң зурысы -1 ноктасында һәм аның 4,5 кә тигез булуы ачык. Аны кыскача болай язалар:

$$\max_{[-2;\,0]} y(x) = y(-1) = 4{,}5; \quad \min_{[-2;\,0]} y(x) = y(-2) = -1.$$

Функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табуның югарыда бирелгән методын күп төрле практик мәсьәләләрне чишкәндә дә кулланырга була. Бу очракта түбәндәге схема буенча эш итәләр:

1) мәсьәлә функцияләр теленә «күчерелә». Моның өчен җайлы булган x параметрын сайлап алалар һәм аның аша безне кызыксындырган зурлыкны $f(x)$ функциясе итеп күрсәтәләр;

2) анализ чаралары ярдәмендә бу функциянең ниндидер аралыктагы иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләре эзләнә;

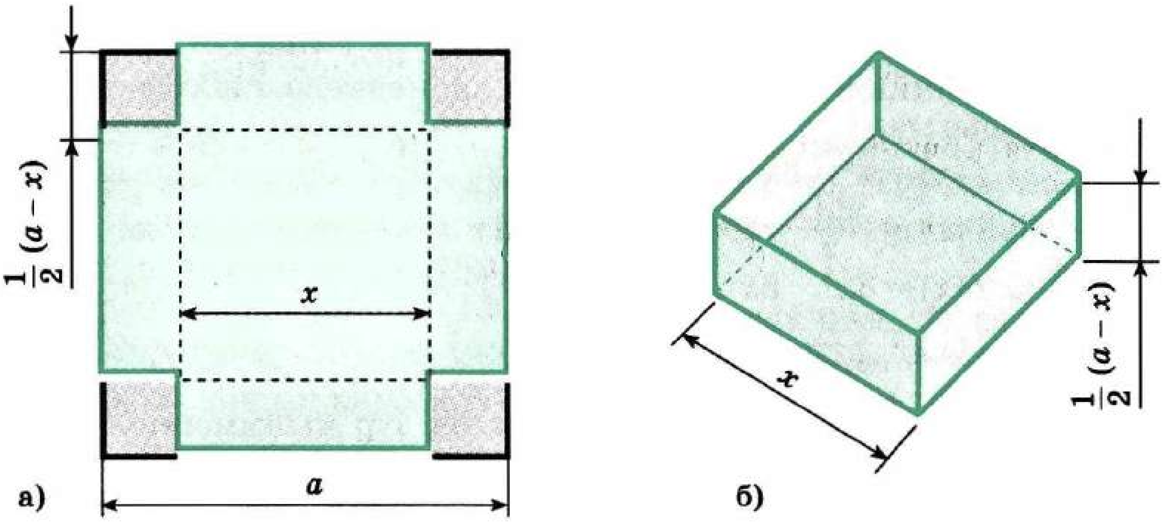
3) функцияләр телендә табылган нәтиҗәнең (баштагы мәсьәләнең терминнарында) нинди практик мәгънәсе булуы ачыклана.

Гомумән алганда, практик мәсьәләләрне математика чаралары белән чишү, кагыйдә буларак, төп өч этапны эченә ала: 1) формализация (баштагы мәсьәләне математика теленә күчерү); 2) килеп чыккан математик мәсьәләне чишү һәм 3) табылган нәтиҗәгә интерпретация (аны математика теленнән баштагы мәсьәлә терминнарына «күчерү»).

Бу гомуми метод белән (аны математик модельләштерү методы дип атыйлар) сез инде танышкан идегез, бу схема буенча алгебра курсында текстлы мәсьәләләр чишелде. Аны куллануга мисал китерик.

2 нче мисал. Ягы a булган квадрат формасындагы калайдан аның почмакларыннан кечкенә квадратлар кисеп алырга да (114 нче рәсем), кырыйларын бөгеп, өсте ачык тартма ясарга кирәк. Тартманың күләме максималь булсын өчен, аның нигез ягы нинди булырга тиеш?

Чишү. 1) Тартманың нигез ягы озынлыгын x дип алыйк. Ул чакта кисеп алынган квадратларның яклары озынлыгы $\frac{1}{2}(a - x)$, ә тартманың күләме $\frac{1}{2}(a - x)x^2$ ка тигез булыр. Мәсьәләнең мәгънәсе буенча x саны $0 < x < a$ тигезсезлеген канәгатьләндерергә,



114 нче рәсем

ягъни $(0; a)$ интервалына керергә тиеш. Шулай итеп, безгә $V(x) = \frac{1}{2}(a-x)x^2$ функциясенең $(0; a)$ интервалындагы иң зур кыйммәтен табарга кирәк.

2) Функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табу кагыйдәсе кисемтә өчен әйтелгән иде. $V(x)$ функциясе барлык саннар турысында өзлексез, шуңа күрә аның иң зур кыйммәтен $[0; a]$ кисемтәсендә эзләп, аннан соң гына без чишә торган мәсьәлә өчен нәтиҗә ясарбыз. Функциянең критик нокталарын табыйк:

$$V'(x) = ax - \frac{3}{2}x^2, \ ax - \frac{3}{2}x^2 = 0,$$

ягъни $x = 0$ яки $x = \frac{2}{3}a$.

$$V\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{1}{2}\left(a - \frac{2}{3}a\right)\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{2}{27}a^3.$$

$V(0) = 0$ һәм $V(a) = 0$, шуңа күрә V функциясе үзенең иң зур кыйммәтен $x = \frac{2}{3}a$ булганда ала, ягъни

$$\max_{[0;\, a]} V(x) = V\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{2}{27}a^3.$$

Функция $[0; a]$ кисемтәсенең, димәк, $(0; a)$ интервалының эчендә дә иң зур кыйммәт ала.

3) x ның бирелгән шартларда мөмкин булган күләмнең максимумына ия булган тартманың нигез ягы озынлыгы булганлыгын искә төшерәсе кала.

Табылган нәтиҗә нигез ягы $\frac{2}{3}a$ булган тартманың иң зур күләмле булуын аңлата.

Күнегүләр

305. — f функциясенең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыгыз:

а) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$; $[-1; 1]$ һәм $[0; 3]$ аралыкларында;

б) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$; $[-4; -1]$ һәм $[1; 3]$ аралыкларында;

в) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$; $[0; 2]$ һәм $[2; 3]$ аралыкларында;

г) $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $[-3; -2]$ һәм $[1; 5]$ аралыкларында.

306. — Функциянең P_1 аралыгындагы иң зур кыйммәтен P_2 аралыгындагы иң кечкенә кыйммәте белән чагыштырыгыз.

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$; $P_1 = [-4; 0]$, $P_2 = [3; 4]$;

б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$; $P_1 = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $P_2 = [2; 3]$.

307. — Материаль нокта $s(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$ законы буенча туры сызык буйлап хәрәкәт итә, монда $s(t)$ — метрларда юл һәм t — секундларда вакыт. Вакытның $[4; 10]$ аралыгындагы кайсы моментында ноктаның хәрәкәт итү тизлеге иң зур булыр һәм ул күпмегә тигез?

308. — Аргумент $[-2; 5]$ аралыгында нинди кыйммәтләр алганда, $f(x) = 21x + 2x^2 - \frac{x^3}{3}$ функциясенең үзгәрү тизлеге иң зур яки иң кечкенә булыр?

309. — Турысызыклы хәрәкәт итүче материаль ноктаның тизлеге $v(t) = \frac{1}{6}t^3 - 12t$ законы буенча үзгәрә (тизлек секундына метрларда үлчәнә). Хәрәкәт $t_1 = 10$ с тан $t_2 = 50$ с ка кадәр аралыкта тикшерелсә, вакытның кайсы моментында хәрәкәтнең тизләнеше иң кечкенә булыр?

310. — f функциясенең бирелгән аралыктагы иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыгыз:

а) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$; $[0; 2\pi]$;

б) $f(x) = 1{,}5x^2 + \frac{81}{x}$; $[1; 4]$;

в) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$; $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$;

г) $f(x) = x + \frac{1}{x+2}$; $[-5; -2{,}5]$.

311. — Квадратлары суммасы иң кечкенә булырлык итеп, 24 санын тискәре булмаган ике кушылучының суммасы рәвешендә күрсәтегез.

312.— Тапкырчыгышы иң зур булырлык итеп, 4 санын тискәре булмаган ике кушылучының суммасы рәвешендә күрсәтегез.

313.— Озынлыгы 48 м булган тимерчыбык кисәген турыпочмаклык килеп чыгарлык итеп бөккәннәр. Турыпочмаклыкның мәйданы иң зур булсын өчен, аның яклары нинди озынлыкта булырга тиеш?

314.— Тапкырчыгышлары иң зур булырлык итеп, 54 санын уңай өч кушылучының суммасы рәвешендә күрсәтегез, кушылучыларның икесе 1 һәм 2 саннарына пропорциональ булсын.

315.— Квадратлары суммасы иң кечкенә булырлык итеп, 16 санын ике уңай санның тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтегез.

316.— Турыпочмаклыкның мәйданы 64 $см^2$. Периметры иң кечкенә булсын өчен, турыпочмаклыкның яклары нинди озынлыкта булырга тиеш?

317.— Нигезе квадрат булган турыпочмаклы параллелепипед формасындагы өсте ачык мичкә 13,5 л сыеклык сыйдырырга тиеш. Үлчәмнәре нинди булганда, мичкәне ясау өчен, иң аз материал кирәк булыр?

318.— Нигезе 60 см һәм ян ягы 50 см булган тигезьянлы өчпочмакка иң зур мәйданлы турыпочмаклык камалган. Турыпочмаклыкның ике түбәсе өчпочмакның нигезендә, ә калган икесе аның ян якларында яталар. Турыпочмаклыкның яклары озынлыгын табыгыз.

319.— Түгәрәк бүрәнәдән, турыпочмаклы кисемнең мәйданы иң зур булырлык итеп, балка кисеп алганнар. Әгәр бүрәнәнең кисем радиусы 20 см булса, балка кисеменең үлчәмнәрен табыгыз.

320.— Бораулау вышкасы таш юлның иң якын ноктасыннан 9 км ераклыкта урнашкан. Бу ноктадан юл буйлап 15 км ераклыкта урнашкан (юлны туры сызык дип алабыз) торак пунктка бораулау вышкасыннан курьер җибәрергә кирәк. Курьер, велосипедка утырып, басудан 8 км/сәг, таш юлдан 10 км/сәг тизлек белән барса, югарыда әйтелгән пунктка иң кыска вакыт эчендә барып җиту өчен, аңа таш юлның нинди ноктасына таба хәрәкәт итәргә кирәк?

321.— Көймә ярның иң якын A ноктасыннан 3 км ераклыкта. Көймәдәге пассажир A ноктасыннан 5 км ераклыкта яр буенда урнашкан B авылына барып җитәргә уйлый. Көймә 4 км/сәг тизлек белән хәрәкәт итә, ә пассажир, көймәдән төшсә, сәгатенә 5 км юл үтә ала. B авылына иң кыска вакытта барып җиту өчен, ул көймә белән ярның нинди пунктына килеп туктарга тиеш?

322.— Үзенең квадраты белән суммасы иң кечкенә кыйммәт алырлык санны табыгыз.

323.— Бирелгән гипотенузалы барлык турыпочмаклы өчпочмаклардан тигезьянлысының мәйданы иң зур булганлыгын исбат итегез.

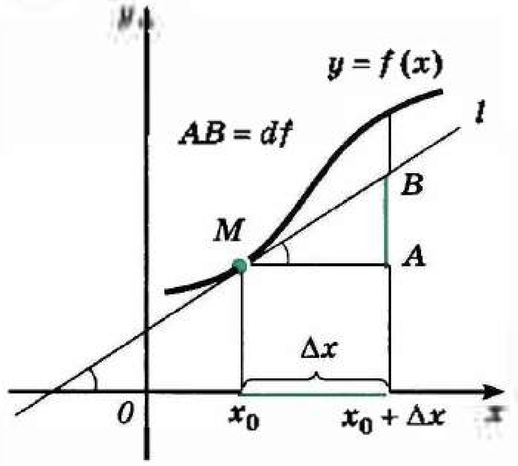
324.— Әйләнәгә камалган барлык турыпочмаклыклар арасыннан иң зур мәйданлысын табыгыз.

325.— Бирелгән түгәрәккә камалган барлык тигезьянлы өчпочмаклар арасыннан тигезьяклысының мәйданы иң зур булганлыгын күрсәтегез.

Тарихтан мәгълүматлар

1. Терминнар һәм тамгаланышларның килеп чыгышы. Математиканың чыгарылмаларны һәм аларның функцияләрне тикшергәндә кулланыуны өйрәнүче кисәген *дифференциаль исәпләү* дип атыйлар. Аермаларны күрсәтүче Δf рәвешендәге үсемтәләр чыгарылмалар белән эш иткәндә сизелерлек дәрәҗәдә зур роль уйныйлар. Шуңа күрә calculis differenlialis (ул *аермалар исәпләү* дип тәрҗемә ителә) дигән яңа исәпләүнең исеменә латин тамыры differentia (аерма) килеп керү бик табигый; бу исем инде XVII гасыр ахырында ук барлыкка килә.

«Чыгарылма» термины (аны 1797 елда Ж. Лагранж (1736—1813) керткән) француз сүзе derivée нең турыдан-туры татарчага тәрҗемәсе булып тора; хәзерге y', f' тамгаланышларын да Ж. Лагранж керткән. Мондый исем төшенчәнең мәгънәсен чагылдыра (туры килә): $f'(x)$ $f(x)$ тан китереп чыгарыла, $f(x)$ тан чыгарылма булып тора. И. Ньютон чыгарылма функцияне — *флюкция* дип, ә функциянең үзен *флюента* дип атаган. Г. Лейбниц *дифференциаль чагыштырма* турында сүз алып барган һәм чыгарылманы $\frac{df}{dx}$ дип тамгалаган. Болай тамгалау хәзерге әдәбиятта еш очрый.



115 нче рәсем

df символын Лейбниц f функциясенең *дифференциалын* тамгалау өчен сайлап алган. f функциясенең df дифференциалы ул — $f'(x_0)$ чыгарылмасының Δx үсемтәсенә тапкырчыгышы, ягъни $df = f'(x_0)\Delta x$. Әгәр дә Δx ны dx белән алыштырсак, болай язып була: $df = f'(x_0)\,dx$, моннан $f'(x_0) = \frac{df}{dx}$. Дифференциалның геометрик мәгънәсе 115 нче рәсемнән ачык күренә: монда $df = AB$, ә l турысы — графикка орынма.

Лейбниц Готфрид Фридрих (1646—1716)

Бөек немец галиме. Философ, математик, физик, юрист, тел белгече. Ньютон белән бергәләп математик анализга нигез салучы. Зур әһәмияткә ия булган математик мәктәп оештыручы. Лейбниц идеяләренең математик логика үсешенә тәэсире шактый зур булды.

Дифференциаль исәпләүдә кабул ителгән терминология турында сөйләү *чикләмә* һәм *чиксез кечкенә зурлык* төшенчәләреннән башка тулы булмас иде. Чикләмә турында түбәндә җентекләбрәк сөйләнер, ә хәзерге барлык кулланмаларда чыгарылманың чикләмә буларак билгеләнүен кисәтеп китик. Югарыда кабул ителгән $\Delta x \to 0$ булганда, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x)$ тамгаланышы урынына $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ дип язалар.

lim тамгаланышы — латин сүзе *limes* нең (межа, чик) кыскартмасы; Δx ны кечерәйтеп, без $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ның кыйммәтен $f'(x_0)$ «чигенә» омтылдырабыз. «Чикләмә» терминын Ньютон керткән.

Чиксез кечкенә зурлык мисалы булып Δx тан $(\Delta x)^2$ функциясе хезмәт итә ала, чөнки $\Delta x \to 0$ булганда, $(\Delta x)^2 \to 0$. Гомумән, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ булса, $\alpha(x)$ — чиксез кечкенә дип әйтәләр.

Чиксез кечкенәләр математик анализда зур роль уйныйлар, шуңа күрә аны еш кына чиксез кечкенәләр анализы дип тә атыйлар.

Ниһаять, «экстремум» сүзенең латин extremum (кырый) сүзеннән килеп чыкканлыгын искәртеп китик. Maximum — иң зур, ә minimum — иң кечкенә буларак тәрҗемә ителә.

2. Дифференциаль исәпләү тарихыннан.

1) Дифференциаль исәпләү Ньютон һәм Лейбниц тарафыннан чагыштырмача күптән түгел, XVII гасырның ахырында барлыкка килгән. Моннан бик күп еллар элек Архимедның спираль кебек катлаулы кәкрегә (чикләмә аша күчү кулланып) орынма төзү генә түгел, бәлки $f(x) = x^2(a - x)$ функциясенең максимумын да таба алуы гаҗәпкә калдыра.

Орынма төшенчәсе (ул, сез белгәнчә, чыгарылма төшенчәсенә бәйләнгән) эпизодик рәвештә Италия математигы Н. Тарталья (1500—1557) хезмәтләрендә очрый. Биредә орынма туптан атылган

Ферма Пьер
(1601—1665)

Франция математигы һәм юристы. Үз вакытының иң танылган математикларыннан берсе. Ферманың саннар теориясе өлкәсендә зур әһәмияткә ия булган хезмәтләре бар. Ул аналитик геометрияне төзүче, аналитик геометриядә зур нәтиҗәләргә ирешә.

ядрәнең иң зур ераклыкка очуын тәэмин итүче авышу почмагын өйрәнгәндә карала. И. Кеплер орынманы бирелгән радиуслы шарга камалган параллелепипедның иң зур күләмлесен табуга багышланган мәсьәләне чишкәндә тикшерә.

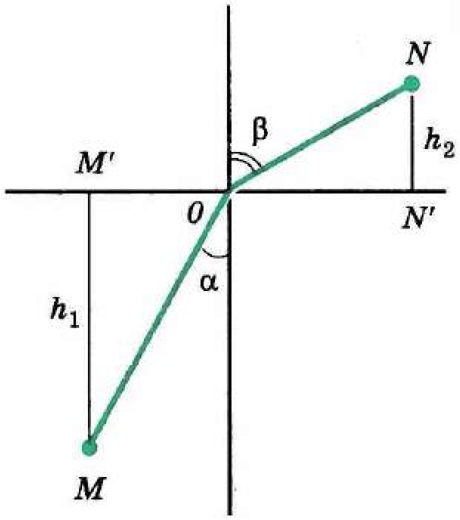
XVII гасырда Г. Галилейның хәрәкәт тәгълиматы нигезендә чыгарылманың кинематик концепциясе актив үсеш алды. Болай аңлатуның төрле мәсьәләләргә карата кулланылган вариантлары Р. Декартта, француз математигы Робервальдә (1602—1675), инглиз галиме Д. Грегорида (1638—1675), И. Барроу (1630—1677) һәм, ниһаять, И. Ньютон хезмәтләрендә очрыйлар.

Декарт, линзаларның оптик үзлекләрен өйрәнгәндә, орынма һәм *нормальне* (орыну ноктасына орынмага перпендикуляр итеп үткәрелгән турыны шулай атыйлар) карау кирәклеге турындагы фикергә килгән. Аналитик геометрия методлары һәм үзе уйлап тапкан *аныксыз коэффициентлар методы* ярдәмендә ул төрле кәкреләргә, шул исәптән эллипска да, нормальләр төзү мәсьәләләрен чишә алган.

1629 елда П. Ферма күпбуынның экстремумнарын табу кагыйдәләрен тәкъдим иткән. Бу кагыйдәләрне чыгарганда, Ферманың, максимум һәм минимум булуның иң гади дифференциаль шартларын белә торып, чикләмә аша күчүне актив куллануын әйтеп үтәргә кирәк.

Математиканы үстерүдә Ферманың роле зур булды. Лаеклы рәвештә аның исемен йөртүче теоремалар сезгә анализдан билгеле булган теорема белән чикләнми, Ферманың бөек теоремасы («$x^n + y^n = z^n$ тигезләмәсенең икедән зуррак булган натураль n өчен натураль саннарда чишелеше юк»), хәзергә кадәр исбатланмаса да, саннар теориясе проблемалары өстендә аның уйлануларының берсенең генә нәтиҗәсе булып тора. Ферма — аналитик геометрияне төзүчеләрнең берсе. Ул оптика белән дә шөгыльләнгән. Ферма принцибы («Яктылык нуры аны үтү вакыты иң

кечкенә булырлык итеп тарала») күпләргә билгеле, ул хәзерге физикада да кулланыла.



116 нчы рәсем

Бу принципның зур әһәмияткә ия булган нәтиҗәләрен сез үзлегегездән чыгара аласыз. Яктылык кайтарылу законы («Кайтарылу почмагы төшү почмагына тигез») Ферма принцибы буенча билгеле бер геометрик мәсьәләгә кайтып кала. *Яктылыкның сыну законын* чыгару өчен, сезгә билгеле булган экстремум табу кагыйдәләрен кулланырга кирәк була. (Мондый мәсьәлә чишәргә кирәк (116 нчы рәсем): «Яктылык нуры астагы ярымъяссылыкның M ноктасыннан өстәге ярымъяссылыкның N ноктасына үтә. Яктылыкның астагы ярымъяссылыктагы (бериш тирәлектә) тизлеге даими һәм v_1 гә тигез, ә өстәге ярымъяссылыктагы тизлеге v_2. Нокта юлны иң аз вакытта үтә алсын өчен, ул нинди юл буенча хәрәкәт итәргә тиеш?»)

Чыгарылмалар турындагы систематик тәгълимат Лейбниц һәм Ньютон хезмәтләрендә үсеш алган. Ньютон — анализның ике төп проблемасын әйтеп бирүче кеше:

«1. Үтелә торган юлның озынлыгы даими рәвештә (ягъни вакытның теләсә нинди моменты өчен) биреп барыла; хәрәкәтнең әйтелгән вакыттагы тизлеген табарга кирәк.

2. Хәрәкәтнең тизлеге даими рәвештә бирелә: әйтелгән вакыт эчендә үтелгән юлның озынлыгын табарга».

Беренче проблема элементлары белән сез инде бу бүлектә танышкан дифференциаль исәпләүнең үсеш программасын бирә. Икенчесе интеграль исәпләүгә карый (III бүлекне кара).

Әгәр Ньютон, нигездә, механика мәсьәләләреннән чыгып эш итсә (Ньютон анализы Ньютон классик механикасы белән бер үк вакытта барлыкка килә), Лейбниц исә күбесенчә геометрик мәсьәләләрдән чыгып эш иткән.

Анализ идеяләренең моннан соңгы үсеше турында сөйләгәндә (ә алар бик тиз таралдылар һәм үзләрен яклаучылар таптылар), беренче чиратта Лейбниц укучылары — бертуган Я. һәм И. Бернуллиларны атап китәргә кирәк.

И. Бернулли укучысы А. Лопиталь (1661—1704) 1696 елда дифференциаль исәпләү буенча беренче басма курсын бастырып чыгарган, бу курс яңа методларның киң таралуына китергән.

Лагранж да яхшы нәтиҗәләргә ирешкән, аның хезмәтләре анализ нигезләрен ачыклауда зур роль уйнаган.

Математиканың күп кенә башка бүлекләрендәге кебек математик анализны үстерү буенча Л. Эйлер һәм К. Ф. Гаусс (1777—1855) керткән өлеш аерата зур.

Кыскача очеркта XVIII гасырда һәм соңрак башкарылган ачышларның асылы турында сөйләп бетерергә мөмкин түгел. Ләкин юнәлешләрнең берсе турында искә алмау мөмкин түгел. Сүз функцияләрне дәрәҗәле рәтләргә таркату, ягъни функцияләрне кушылучылар саны чиксез булган күпбуыннар рәвешендә күрсәтү турында бара. Чиксез сумманың (санлы рәтнең) бер мисалы сезгә таныш: чиксез периодик вакланмалар чиксез сандагы кушылучылар суммасы рәвешендә күрсәтелделәр. Санлы һәм функциональ рәтләр белән Ньютон гына түгел, аннан алда яшәгән галимнәр дә эш иткәннәр, шуңа күрә *Тэйлор формуласы* исеме бик үк гадел түгел (Б. Тэйлор (1685—1731) — инглиз математигы, ул аны 1715 елда бастырып чыгарган). Түбәндәге бик билгеле бәйләнеш:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \ldots$$

бу исемне йөртә (биредә $f^{(n)}(x_0)$ — f функциясен x_0 ноктасында n тапкыр дифференциаллаганнан соң табылган кыйммәт, ә $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$). Чыгарылмалар формулаларын, мәсәлән, $\sin x$ һәм $\cos x$ өчен белеп, сез аларны үзегез Тэйлор рәтенә тарката аласыз.

Күп очракта чиксез санлы кушылучыларны алып ташлап, функцияләргә күпбуыннар аша шактый якынлашуга мөмкинлек бирә торган формулалар табып була.

2) Бик күп мәсьәләләрне чишәргә мөмкинлек биргән яңа, көчле метод барлыкка килү сәбәпле туган энтузиазм XVIII гасырда анализның көчле үсүенә китерде. Ләкин бу гасыр ахырында дифференциаль һәм интеграль исәпләүләрне төзүчеләр алдына баскан проблемалар кискен алга куелды.

Кыенлыкларның иң зурысы *чикләмә, өзлексезлек, реаль* сан кебек төп төшенчәләрнең төгәл билгеләмәсе булмауда иде (моңа бәйле рәвештә фикерләүләрдә логик җитешсезлекләр һәм хәтта хаталар да бар иде). Өзлексезлек билгеләмәсе характерлы мисал булып тора. Эйлер, Лагранж һәм хәтта Фурье (ә ул XIX гасыр башында эшли башлаган иде) өзлексез функция дип үзенең билгеләнү өлкәсендә бары тик бер аналитик аңлатма аша бирелгән функцияне атыйлар иде.

Шулай итеп, «яңа» математика грек математикларының классик үрнәкләрендә тәрбияләнгән галимнәр өчен гадәти булган төгәллек стандартларына җавап бирмәде. Математикларга бик кирәк булган интуиция математика фәненнән аерылгысыз булган логикадан алга чыкты. Ньютон, Лейбниц, Эйлер кебек гигантларның интуицияләре аларга хата ясамаска мөмкинлек бирде. Ләкин нык логик нигезләр кирәк иде.

Коши Огюстен Луи
(1789—1857)

Франция математигы. Анализ, комплекслы үзгәрешлеле функцияләр теориясе, дифференциаль тигезләмәләр теориясе һ.б. өлкәләрдәге зур әһәмияткә ия булган шактый күп теоремаларны исбат иткән. Кошиның зур хезмәте анализ курсын эшкәртүгә багышланган, анда ул, әерым алганда, классик билгеләмәгә әверелгән билгеләмәләр — чикләмә, функциянең өзлексезлеге билгеләмәләрен биргән.

XVIII гасыр өчен түбәндәге әйтелмәләр характерлы. Танылган математик М. Ролль: «Яңа исәпләү ул — гениаль хаталар коллекциясе»,— дип язды. Ә Франциянең бөек фикер иясе Вольтер исә: «Исәпләүләр — барлыгын төгәл исбатларга мөмкин булмаган нәрсәләрне исәпләү һәм төгәл үлчәү осталыгы»,— дип әйткән.

XIX гасырның 20 нче елларында Франция математигы О. Коши (1789—1857) анализга нык фундамент салуга зур өлеш керткән, ул функция һәм эзлеклелек чикләмәләренең төгәл билгеләмәләрен тәкъдим иткән һәм алар нигезендә анализның күп кенә фундаменталь теоремаларын исбатлаган. Алардан бераз элегрәк (1821 елда) чикләмә һәм өзлексезлек билгеләмаләрен биргән, шактый гына башка, зур әһәмияткә ия булган нәтиҗәләргә (шул исәптән аралыкта өзлексез булып та, аның бер ноктасында да чыгарылмасы булмаган данлыклы функциягә мисал китергән) ирешкән чех математигы Б. Больцано (1781—1848) турында әйтеп китәргә кирәк. Ләкин аның хезмәтләре соңрак билгеле булды.

Коши функция чикләмәсенә мондый билгеләмә биргән: «Теләсә нинди $\varepsilon > 0$ саны өчен $0 < |x - a| < \delta$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче барлык x лар өчен $|f(x) - A| < \varepsilon$ булырлык $\delta > 0$ санын табып булса, A саны x a га омтылганда, $f(x)$ функциясенең чикләмәсе дип атала (ягъни $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$).

Бу билгеләмәгә нигезләнеп, ноктада өзлексезлек билгеләмәсен бирү кыен түгел: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(x_0)$ булса, f функциясе x_0 ноктасында өзлексез була.

Эзлеклелек чикләмәсенең (интеграл билгеләмәсе бу төшенчәгә бәйле; 30 нчы пунктны кара) билгеләмәсе болай әйтелә: «Теләсә нинди $\varepsilon > 0$ саны өчен $|a_n - A| < \varepsilon$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче барлык $n > N$ өчен шундый N номеры булса, A саны *a_n эзлеклелегенең чикләмәсе* дип атала.

Коши чикләмәләр турындагы без чыгарылмаларны исәпләгәндә кулланган (14 нче пунктта аларны чикләмә аша күчү кагыйдәләре дип атаган идек) түбәндәге теоремаларны исбат итте:

Әгәр $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ һәм $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ булса, сумманың һәм аерманың, тапкырчыгышның, өлешнең ($\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ булганда) чикләмәләре бар һәм

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B,$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) g(x)) = A \cdot B,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \text{ була.}$$

«Коши»ча исбатлауга мисал китерик (еш кына: «эпсилон-дельта телендә» дип әйтәләр). Сумманың чикләмәсе турындагы теореманы исбатлыйк.

Теләсә нинди уңай $\varepsilon > 0$ санын алыйк. Ул вакытта $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ һәм шуңа күрә (Коши билгеләмәсе буенча):

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ шартыннан $0 < |x - a| < \delta_1$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче барлык x лар өчен

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

булырлык, δ_1 санын табып була;

2) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ шартыннан түбәндәге килеп чыга:

$0 < |x - a| < \delta_2$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче барлык x лар өчен

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

булырлык $\delta_2 > 0$ бар.

δ_1 һәм δ_2 саннарының иң кечкенәсен δ аша тамгалыйк. Ул вакытта $0 < |x - a| < \delta$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче теләсә нинди x өчен (1) һәм (2) тигезсезлекләр үтәлә; бу x лар өчен табабыз:

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| =$$

$$= |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leqslant |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Моның белән $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$ икәнлеге исбатлана.

Кагыйдәләрнең башкалары (тапкырчыгыш һәм өлеш өчен) шуңа охшаш рәвештә исбатлана.

XVII гасырда күп кенә математикларның лозунглары мондый иде: «Алга барыгыз, ирешкән нәтиҗәләрегезнең дөреслегенә ышаныч сезгә соңрак килер».

3. Реаль сан төшенчәсе турында. Математик анализ XVIII гасырда барлыкка килә. Ләкин аңа нигез бары тик XIX гасырның ахырында О. Коши (160 нчы биткә карагыз) тарафыннан барлыкка китерелгән чикләмәләр теориясеннән соң ук немец математиклары Р. Дедекинд (1831—1916), К. Вейерштрасс (1815—1897)

Кантор Георг
(1845–1918)
Немец математигы, математиканың үсешенә, математика нигезләрен аңлауга аның идеяләренең һәм хезмәтләренең тәэсире зур булды. Күплекләр теориясен төзүче. Чиксез күплекләр теориясенә, реаль саннар теориясенә кагылышлы булган шактый күп нәтиҗәләргә иреште.

һәм Г. Кантор (1845—1918) берьюлы берничә төрле формада реаль саннар теориясен төзегәннән соң гына тулысынча нигез салына.

Саннар турындагы беренче күзаллаулар тормыш-көнкүреш таләпләре тәэсирендә әкренләп барлыкка килгән. Бик күптәннән үк санау һәм зурлыкларны үлчәү өчен саннар кулланылган.

«Бирелгән чикле күплек ничә элементны эченә ала?» дигән сорауга һәрвакыт я натураль сан, я нуль саны белән күрсәтелә дип җавап бирелә. Димәк, тискәре булмаган барлык бөтен саннар күплеге

$$\{0; 1; 2; 3; \ldots\}$$

санауның барлык ихтыяҗларын канәгатьләндерә.

Зурлыкларны үлчәгәндә, эш башкачарак. Мәсәлән, ике пункт арасы 3,5 километрга, бүлмәнең мәйданы 16,45 квадрат метрга тигез булуы мөмкин һ.б.

Зурлыклар төрле төрдә була. Ике мисал китерик.

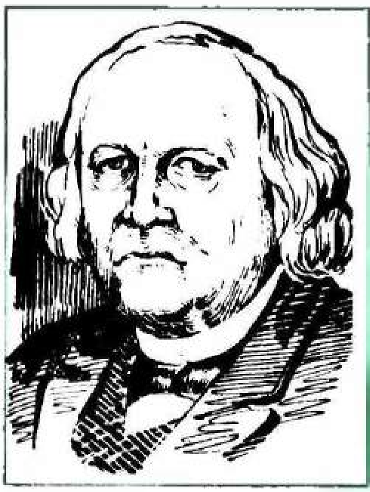
1. Нокталар арасындагы ераклыклар, кисемтәләрнең, сынык һәм кәкре сызыкларның озынлыклары — болар бер үк төрдәге зурлыклар. Аларны сантиметрларда, метрларда, километрларда һ.б. күрсәтәләр.

2. Вакыт аралыкларының дәвамлылыгы — шулай ук бер үк төрдәге зурлыклар. Аларны секундларда, минутларда, сәгатьләрдә һ.б. күрсәтәләр.

Бер үк төрдәге зурлыкларны үзара *чагыштырырга* һәм *кушарга* мөмкин:

1 м > 90 см	350 м + 650 м = 1 км
300 с < 1 сәг	2 сәг + 3 сәг = 5 сәг

Ләкин 1 метрмы, әллә 1 сәгать зурракмы дип сорауның мәгънәсе юк, шулай ук 1 метр белән 30 секундны да кушарга ярамый. Вакыт аралыкларының дәвамлылыгы белән ераклыклар да — төрле төрдәге зурлыклар. Төрле төрдәге зурлыкларны чагыштырырга һәм кушарга ярамый.



Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815–1897)

Немец математигы, ул математиканың төрле өлкәләрендәге классик теоремаларны исбатлаучы. Вейерштрассның математик анализны нигезләүгә багышланган хезмәтләре асылда төгәл һәм төзек теория булдыруны тәмамладылар.

Зурлыкларны уңай саннарга һәм нульгә тапкырларга мөмкин. a зурлыгын тискәре булмаган x санына тапкырлау нәтиҗәсендә шул ук төрдәге $b = xa$ зурлыгы килеп чыга. Берничә мисал китерик:

$$5 \cdot 20 \text{ см} = 100 \text{ см} = 1 \text{ м}$$
$$0{,}01 \cdot 20 \text{ см} = 0{,}2 \text{ см} = 2 \text{ мм}$$
$$0 \cdot 20 \text{ см} = 0 \text{ см}$$

Нинди дә булса e зурлыгын үлчәү берәмлеге буларак кабул итеп, аның ярдәмендә шул ук төрдәге теләсә нинди иКенче a зурлыгын үлчәргә мөмкин. Үлчәү нәтиҗәсендә табабыз: $a = xe$, монда x — сан.

Бу x саны, e ны үлчәү берәмлеге итеп алганда, a зурлыгының санча кыйммәте дип атала. Мәсәлән, үлчәү берәмлеге 1 м булганда, (e = 1 м), бүлмә озынлыгының санча кыйммәте 5,6 була, ә үлчәү берәмлеге бер сантиметр (e = 1 см) булганда, шул ук озынлыкның санча кыйммәте 560 була.

Үлчәү берәмлеге бер үк e булганда, a һәм b зурлыкларының санча кыйммәтләре x һәм y ка тигез, ягъни $a = xe$, $b = ye$ булсын. Әгәр $b \neq 0$ булса, $\frac{x}{y}$ чагыштырмасын a ның b *зурлыгына чагыштырмасы* дип атыйлар.

Зурлыклар турындагы иң гади мәгълүматлар шуннан гыйбарәт. Монда китерелгән зурлыклар турындагы төшенчә саннар төшенчәсенә таяна. Ләкин тарихи юл башкача була: уңай реаль саннар зурлыклар чагыштырмасы (дөресрәге, кисемтәләрнең озынлыклары чагыштырмасы) буларак килеп чыга.

Берәмлек квадратның диагонале аның ягы белән үлчәмсез булуы ачылганнан соң, кисемтәләрнең озынлыклары чагыштырмасы натураль саннар белән генә түгел, хәтта рациональ саннар белән дә һәрвакыт күрсәтелә алмавы мөмкин икәнлеге ачыклана, һәр кисемтәнең санча кыйммәтен билгеле бер үлчәү берәмлегендә билгеләү өчен, яңа саннар — иррациональ саннар кертү таләп ителгән.

Практикада барлык зурлыкларны да үлчәү якынча характерда. Аларның нәтиҗәләрен таләп ителгән төгәллек белән рациональ вакланмалар ярдәмендә яки махсус рәвештә чикле унарлы вакланмалар ярдәмендә аңлатырга мөмкин. Мәсәлән, ягы 1 м лы квадратның диагонален бер сантиметрга кадәр төгәллек белән үлчәгәндә, без аның озынлыгы якынча 1,41 м га тигез икәнен беләбез. Бер миллиметрга кадәр төгәллек белән үлчәгәндә, бу озынлыкның якынча 1,414 м га тигез икәнен табабыз.

Ләкин математикада еш кына практик исәпләүләрнең якынча характерда булуын читләтеп үтәләр. Кисемтәләрнең озынлыкларын үлчәүгә әзлекле рәвештә теоретик якын килү чиксез унарлы вакланмаларны тикшерү кирәклегенә китерә. ($\frac{2}{3} = 0{,}666...$; $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$; $\pi = 3{,}14159265...$ саннары нәкъ шундый вакланмалар белән күрсәтеләләр.)

Теләсә нинди кисемтәнең үлчәү берәмлеге итеп кабул ителгән кисемтә озынлыгына чагыштырмасы чиксез унарлы вакланма рәвешендә күрсәтергә мөмкин булган сан белән аңлатыла.

Реаль саннарның тулы теориясе шактый катлаулы һәм урта мәктәп программасына керми. Ләкин аларны төзүнең бер ысулы белән без гомуми күренештә танышып китәрбез.

1. Кабул итәләр:

а) һәр реаль санга (аның язылышы сыйфатында) чиксез унарлы вакланма туры килә:

$$x = a_0, a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...;$$

б) һәр чиксез унарлы вакланма реаль санның язылышы була.

Ләкин монда чиксез тугызлыклар эзлеклелегенә тәмамланган унарлы вакланмаларны чиксез нульләр эзлеклелегенә тәмамланган унарлы вакланманы аңлаткан санның икенче төрле язылышы дип исәпләү табигый:

$$0{,}9999... = 1{,}0000...;\ 12{,}765999... = 12{,}766000... .$$

Мондый килешүне мисал ярдәмендә аңлатыйк:

$$0{,}(9) = 3 \cdot 0{,}(3) = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

Бары тик периодта тугыз булган унарлы вакланмаларны караудан төшереп калдырып кына, без реаль саннар күплеге белән чиксез унарлы вакланмалар күплеге арасында үзара беркыйммәтле тиңдәшлек табабыз:

a_0 саны — ул уңай x санының *бөтен кисәге*, ә $x - a_0 = 0$, $a_1a_2a_3...a_n...$ — x санының *вакланма кисәге*.

$x_n = a_0, a_1a_2a_3...a_n$ санын — x ның 10^{-n} кадәр төгәллектә киме белән алынган унарлы якынлашуы, ә $x'_n = x_n + 10^{-n}$ санын $x = a_0, a_1a_2a_3...a_n...$ санының 10^{-n} *кадәр төгәллектә артыгы белән алынган унарлы якынлашуы* дип атыйлар.

Әгәр x саны тискәре, ягъни

$$x = -a_0,a_1a_2a_3\dots a_n\dots$$

булса, ул вакытта

$$x'_n = -a_0,a_1a_2a_3\dots a_n \text{ һәм } x_n = x'_n - 10^{-n}$$

дип уйланыла.

2. Ике реаль санны *чагыштыру кагыйдәсен* кертәләр. Кимендә бер n өчен $x_n < y_n$ тигезсезлеге үтәлгәндә, билгеләмә буенча x саны y санынннан *кечерәк* була. x_n һәм y_n — монда x һәм y өчен 10^{-n} кадәр төгәллектә киме белән алынган унарлы якынлашулар. (Без чикле унарлы вакланмаларны чагыштыру кагыйдәсе таныш булудан файдаландык.)

3. Реаль саннар өстендә *арифметик гамәлләрне* билгелиләр (монда шулай ук чикле унарлы вакланмалар өчен бу гамәлләрнең билгеләнгән булуыннан чыгып эш итәбез).

Теләсә нинди n өчен

$$x_n + y_n \leqslant x + y < x'_n + y'_n$$

тигезсезлеге үтәлгәндә, z реаль санын x һәм y реаль саннарының *суммасы* ($x + y$ дип тамгалана) дип атыйлар.

Математик анализ курсында андый санның барлыгы һәм бертөрле генә билгеләнүе исбатлана.

Аналогик рәвештә, тискәре булмаган x һәм y саннарының *тапкырчыгышы* дип теләсә нинди n өчен

$$x_ny_n \leqslant xy < x'_ny'_n$$

тигезсезлеге үтәлгән z саны (xy дип тамгалана) атала.

Андый сан бар һәм бертөрле генә билгеләнә. Монда төрле тамгадагы реаль саннар өчен тискәре булмаган $|x|$ һәм $|y|$ саннарының тапкырчыгышы инде билгеләнгән дип эш итәләр, $xy = -|x|\,|y|$ дип уйланыла; калган очракларда $xy = |x|\,|y|$. (Гадәттә, $a_0,a_1a_2\dots a_n\dots$ санын $a_0,a_1a_2\dots a_n\dots$ һәм $-a_0,a_1a_2\dots a_n\dots$ саннарының һәркайсының модуле дип атыйлар.)

Алу гамәле кушуга кире гамәл буларак билгеләнә: x һәм y саннарының *аермасы* $x - y$ дип $y + z = x$ тигезлеге үтәлгән z саны атала. Ә бүлү гамәле тапкырлау гамәленең киресе буларак билгеләнә: $x : y$ *өлеше* дип $yz = x$ тигезлеге үтәлгән z саны атала.

4. 3 нче пунктта күрсәтелгәнчә билгеләнгән тигезсезлекләр һәм арифметик гамәлләр аларга рациональ саннар күплегендә хас булган төп үзлекләрнең сакланганлыгын күрсәтәләр.

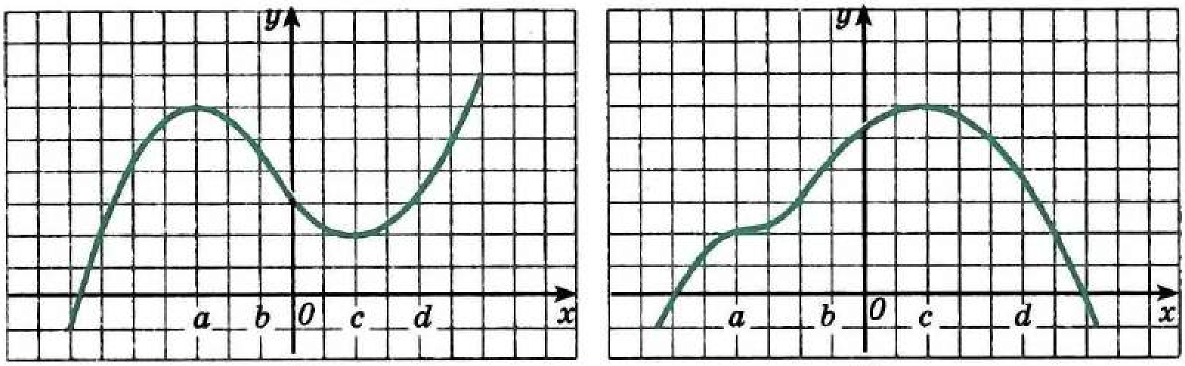
Кабатлау өчен сораулар һәм мәсьәләләр

1. 1) Аргумент үсемтәсе һәм функция үсемтәсе нәрсә ул?

2) Δx һәм Δf үсемтәләренең геометрик мәгънәсе нидән гыйбарәт? $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ чагыштырмасыныкы?

3) $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ не x_0 һәм Δx аша күрсәтегез:

а) $f(x) = x^2 - x$; б) $f(x) = x^3 + 2$; в) $f(x) = 3x - 1$; г) $f(x) = \frac{2}{x}$.



а) б)

117 нче рәсем

2. **1) Функциянең ноктадагы чыгарылмасының билгеләмәсен әйтегез.**
2) Билгеләмәдән файдаланып, f функциясенең x_0 ноктасындагы чыгарылмасын табыгыз:

а) $f(x) = x^2 + 1,\ x_0 = -2;$ б) $f(x) = \frac{2}{x},\ x_0 = 3;$

в) $f(x) = 2x - 1,\ x_0 = -4;$ г) $f(x) = x^3,\ x_0 = 2.$

3. **1) Чыгарылмаларны исәпләү кагыйдәләрен әйтегез. $f(x) = x^n$ функциясенең чыгарылмасы күпмегә тигез булыр (n — бөтен сан)?**
2) Дифференциалланучы f функциясе график аша бирелгән (117 нче рәсем). f графигында күрсәтелгән нокталарда орынма төзегез һәм чыгарылманың a, b, c, d нокталарындагы якынча кыйммәтләрен табыгыз.
3) Функцияне дифференциаллагыз:

а) $f(x) = (x + 2)\sin x;$ б) $f(x) = \frac{4}{(9+7x)^5};$

в) $f(x) = x^3 - \frac{2}{x} + \cos 3x;$ г) $f(x) = \frac{x^2}{x+3}.$

4. **1) Нинди функцияне аралыкта өзлексез функция дип атыйлар?**
2) Функциянең өзлексезлек аралыкларын табыгыз:

а) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5}{4 - x^2};$ б) $f(x) = 1 - 2\,\mathrm{tg}\,x;$

в) $f(x) = \frac{x-4}{x^2 - 3x - 10};$ г) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7.$

3) Тигезсезлекне интерваллар методы белән чишегез:

а) $\frac{4}{x+4} + \frac{1}{x+1} > 1;$ б) $x^4 - 15x^2 - 16 \leqslant 0;$

в) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} \leqslant 0;$ г) $(x-1)(x-2)(x+4) \geqslant 0.$

5. 1) Нинди турыны f функциясенең графигына $(x_0; f(x_0))$ ноктасындагы орынмасы дип атыйлар?
2) Чыгарылманың геометрик мәгънәсе нидән гыйбарәт?
3) f функциясе графигының $(x_0; f(x_0))$ ноктасындагы орынмасының тигезләмәсен языгыз:

а) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{2\pi}{3}$; б) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 2$;

в) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \pi$; г) $f(x) = x^2,\ x_0 = -\frac{1}{2}$.

6. 1) x_0 ноктасында дифференциалланучы функциянең якынча кыйммәтен исәпләү өчен кулланылган гомуми формуланы языгыз.
2) Функциянең кыйммәтен якынча исәпләү өчен, формулалар языгыз:

а) $f(x) = x^n$; б) $f(x) = \cos x$;

в) $f(x) = \sqrt{x}$; г) $f(x) = \frac{1}{x}$.

3) Якынча кыйммәтләрне исәпләгез:

а) $\frac{1}{1{,}001^{10}}$; б) $\sin 59°$; в) $\sqrt{9{,}009}$; г) $0{,}999^{15}$.

7. 1) Чыгарылманың механик мәгънәсе нидән гыйбарәт?
2) Җисем туры буйлап $x(t)$ законы буенча хәрәкәт итә. Вакытның t моментында җисемнең тизлеген һәм тизләнешен табу формулаларын языгыз.

3) а) $x(t) = t^3 - 2t^2 + 5,\ t_0 = 4$; б) $x(t) = 3\cos 2t,\ t_0 = \frac{\pi}{3}$;

в) $x(t) = 5t - t^2,\ t_0 = 2$; г) $x(t) = 2t^2 + t - 4,\ t_0 = 4$

булса, ноктаның t моментындагы тизлеген һәм тизләнешен табыгыз.

8. 1) Лагранж формуласын языгыз.
2) Функциянең үсү билгесен (кимү билгесен) әйтегез.
3) Функцияне үсүгә һәм кимүгә тикшерегез:

а) $y = \frac{x}{x^2+9}$; б) $y = 3x - \sin 3x$;

в) $y = x^4 - 4x$; г) $y = x^2 + \frac{16}{x}$.

9. 1) Функциянең критик ноктасы дип нинди ноктаны атыйлар?
2) Функциянең максимумы (минимумы) билгесен әйтегез.
3) Функцияне максимумга һәм минимумга тикшерегез:

а) $y = \frac{x^2}{2} - x^4$; б) $y = 2\sin x + \cos 2x$;

в) $y = x^3 - 3x$; г) $y = x - \operatorname{tg} x$.

10. 1) Функцияне тикшерү схемасын сөйләгез.

2) Функцияне чыгарылма ярдәмендә тикшерегез:

а) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$; б) $f(x) = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$;

в) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$; г) $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$.

3) f функциясен гомуми схема буенча тикшерегез һәм аның графигын төзегез:

а) $f(x) = x^3 - \frac{2}{x}$; б) $f(x) = x^2(x - 2)^2$;

в) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$; г) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$.

11. 1) Функциянең кисемтәдәге иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табу кагыйдәсен әйтегез.

2) Функциянең бирелгән кисемтәдәге иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыгыз:

а) $f(x) = 0{,}8x^5 - 4x^3$, $[-1; -2]$; б) $f(x) = x - \sin 2x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $[-1; 4]$; г) $f(x) = x^2(6 - x)$, $[-1; 5]$.

3) а) Ике санның аермасы 8 гә тигез. Беренче сан кубының икенчесенә тапкырчыгышы иң кечкенә булсын өчен, бу саннар нинди булырга тиеш?

б) Машиналар куеп тору өчен, бер ягы бина стенасы белән туры килә торган турыпочмаклык формасындагы мәйданчык бүлеп бирделәр. Мәйданчыкның өч ягын 200 м озынлыктагы металл челтәр белән тоткач, мәйдан иң зур булып чыккан. Мәйданчыкның үлчәмнәре нинди?

III бүлек

Башлангыч функция һәм интеграл

§ 7.
Башлангыч функция

26. Башлангыч функциянең билгеләмәсе

Механикада кулланылган мисалны искә төшерик. Әгәр вакытның башлангыч $t=0$ моментында җисемнең тизлеге 0, ягъни $v(0)=0$ булса, җисем ирекле төшкәндә, t вакыты моментына

$$s(t)=\frac{gt^2}{2} \qquad (1)$$

юл үтәр иде.

(1) формуланы Галилей эксперименталь юл белән тапкан була. Дифференциаллап тизлекне табабыз:

$$s'(t)=v(t)=gt. \qquad (2)$$

Икенче дифференциаллау тизләнешне бирә:

$$v'(t)=a(t)=g, \qquad (3)$$

ягъни тизләнеш даими зурлык була.

Механика өчен башкача бер фикер урынлы: ноктаның $a(t)$ тизләнеше билгеле (бу очракта ул даими), $v(t)$ тизлегенең үзгәрү законын һәм шулай ук $s(t)$ координатасын табарга кирәк. Башкача әйтсәк, $a(t)$ га тигез булган бирелгән $v'(t)$ чыгарылмасы буенча $v(t)$ ны табарга, ә аннан соң $v(t)$ га тигез булган $s'(t)$ чыгарылмасы буенча $s(t)$ ны табу сорала.

Мондый мәсьәләләрне чишү өчен, дифференциаллауга кире операция *интеграллау* операциясе кулланыла. Без аның белән шушы бүлектә танышырбыз.

> Билгеләмә **Бирелгән аралыкта барлык x лар өчен**
>
> $$F'(x)=f(x)$$
>
> **булса, F функциясе бу аралыкта f функциясенең *башлангыч функциясе* дип атала.**

1 нче мисал. $F(x)=\frac{x^3}{3}$ функциясе $(-\infty;+\infty)$ интервалда $f(x)=x^2$ функциясе өчен башлангыч функция була, чөнки барлык $x\in(-\infty;\infty)$ өчен

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

$\frac{x^3}{3} + 7$ нең дә чыгарылмасы x^2 икәне җиңел аңлашыла һәм шуңа күрә x^2 өчен ул R да шулай ук башлангыч функция була. Билгеле 7 урынына бирелә теләсә нинди даими санны куярга мөмкин. Шулай итеп, без башлангыч функцияне табу мәсьәләсенең чиксез күп чишелешләре булуын белдек. Киләсе пунктта сез бу чишелешләрнең барысын да ничек табарга икәнен күрерсез.

2 нче мисал. $(0; \infty)$ интервалда $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясе өчен $F(x) = 2\sqrt{x}$ функциясе башлангыч функция булыр, чөнки бу интервалдагы барлык x лар өчен

$$F'(x) = \left(2\sqrt{x}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$$

1 нче мисалдагы кебек үк, C теләсә нинди даими зурлык булганда да, $F(x) = 2\sqrt{x} + C$ функциясе шул ук $(0; \infty)$ интервалда $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясе өчен башлангыч функция була.

3 нче мисал. $(-\infty; \infty)$ аралыкта $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ функциясе өчен $F(x) = \frac{1}{x}$ функциясе башлангыч функция түгел, чөнки $F'(x) = f(x)$ тигезлеге 0 ноктасында үтәлми. Шулай да $(-\infty; 0)$ һәм $(0; \infty)$ аралыкларының һәркайсында F функциясе f өчен башлангыч функция була.

Күнегүләр

326.— Күрсәтелгән аралыкта f функциясе өчен F функциясенең башлангыч функция икәнен исбатлагыз:

а) $F(x) = x^5$, $f(x) = 5x^4$, $x \in (-\infty, \infty)$;
б) $F(x) = x^{-3}$, $f(x) = -3x^{-4}$, $x \in (0; \infty)$;
в) $F(x) = \frac{1}{7}x^7$, $f(x) = x^6$, $x \in (-\infty; \infty)$;
г) $F(x) = -\frac{1}{6}x^{-6}$, $f(x) = x^{-7}$, $x \in (0; \infty)$.

327.— Күрсәтелгән аралыкта f функциясе өчен F функциясе башлангыч функция була аламы?

а) $F(x) = 3 - \sin x$, $f(x) = \cos x$, $x \in (-\infty, \infty)$;
б) $F(x) = 5 - x^4$, $f(x) = -4x^3$, $x \in (-\infty, \infty)$;
в) $F(x) = \cos x - 4$, $f(x) = -\sin x$, $x \in (-\infty, \infty)$;
г) $F(x) = x^{-2} + 2$, $f(x) = \frac{1}{2x^3}$, $x \in (0, \infty)$.

f функциясе өчен *R* да башлангыч функцияләрнең берсен табыгыз (328—329).

328. а) $f(x) = 3{,}5$; б) $f(x) = \cos x$;
в) $f(x) = 2x$; г) $f(x) = \sin x$.

329. а) $f(x) = -\sin x$; б) $f(x) = -x$;
в) $f(x) = -4$; г) $f(x) = -\cos x$.

330.— Күрсәтелгән аралыкта *f* функциясе өчен *F* функциясе башлангыч функция икәнен исбатлагыз:

а) $F(x) = \sin^2 x$, $f(x) = \sin 2x$, $x \in R$;

б) $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$, $f(x) = -\sin 2x$, $x \in R$;

в) $F(x) = \sin 3x$, $f(x) = 3\cos 3x$, $x \in R$;

г) $F(x) = 3 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $f(x) = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, $x \in (-\pi; \pi)$.

331.— Күрсәтелгән аралыкта *F* функциясе *f* функциясе өчен башлангыч функция була аламы?

а) $F(x) = 2x + \cos\frac{x}{2}$, $f(x) = 2 - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$, $x \in R$;

б) $F(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, $x \in (-2; 2)$;

в) $F(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = 14 - \frac{1}{x^2}$, $x \in (0; \infty)$;

г) $F(x) = 4x\sqrt{x}$, $f(x) = 6\sqrt{x}$, $x \in (0; \infty)$.

332.— *f* функциясе өчен *R* да башлангыч функцияләрнең берсен табыгыз:

а) $f(x) = x + 2$; б) $f(x) = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$;

в) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$; г) $f(x) = 3x^2 + 1$.

333.— *f* функциясе өчен ике башлангыч функция табыгыз:

а) $f(x) = 2x$; б) $f(x) = 1 - \sin x$;
в) $f(x) = x^2$; г) $f(x) = \cos x + 2$.

334.— Бирелгән өч функция арасыннан башка ике функция тиңдәшле рәвештә аның чыгарылмасы һәм башлангычы булган функцияне күрсәтегез:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$, $h(x) = -\frac{2}{x^3}$;

б) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x$, $g(x) = 1 + \cos x$, $h(x) = x + \sin x$;

в) $f(x) = 1$, $g(x) = x + 2$, $h(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$;

г) $f(x) = 3 - 2\sin x$, $g(x) = 3x + 2\cos x$, $h(x) = -2\cos x$.

27. Башлангыч функциянең төп үзлеге

1. Башлангыч функцияләрнең гомуми рәвеше. Интеграллау операциясе бирелгән функция өчен аның барлык башлангыч функцияләрен табудан гыйбарәт. Бу мәсьәләне чишкәндә, функциянең даимилек билгесе төп рольне уйный.

> Функциянең даимилек билгесе. Әгәр ниндидер I аралыгында $F'(x) = 0$ икән, F функциясе бу аралыкта даими була.

Исбатлау. I аралыгында ниндидер x_0 ноктасы билгеләп куйыйк. Ул вакытта, Лагранж теоремасы буенча, шушы аралыктагы теләсә кайсы x саны өчен

$$F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0)$$

булырлык итеп, x һәм x_0 аралыгында урнашкан c санын күрсәтергә мөмкин. $c \in I$ булганга күрә, шарт буенча $F'(c) = 0$, димәк,

$$F(x) - F(x_0) = 0.$$

Шулай итеп, I аралыгындагы барлык x лар өчен

$$F(x) = F(x_0),$$

ягъни F функциясе даими кыйммәтен саклый.

f функциясенең барлык башлангыч функцияләрен *f функциясе өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвеше* дип аталган бер формула ярдәмендә язарга мөмкин. Түбәндәге теорема дөрес була *(башлангыч функцияләрнең төп үзлекләре)*.

> Теорема ***I аралыгында f функциясе өчен теләсә нинди башлангыч функция***
>
> $$F(x) + C \qquad (1)$$
>
> ***рәвешендә языла ала, биредә $F(x)$ функциясе — I аралыгында $f(x)$ функциясе өчен башлангыч функцияләрнең берсе, ә C — ирекле даими зурлык.***

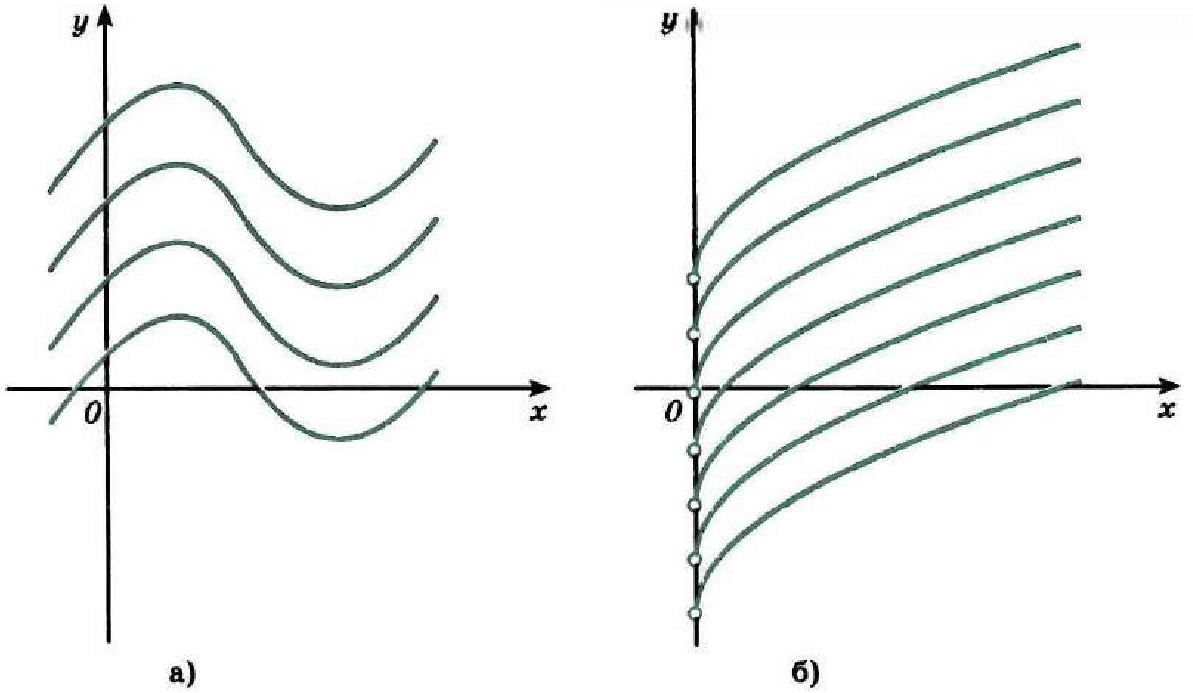
Башлангыч функциянең кыскача әйтелгән ике үзлеге турындагы әлеге фикерне ачыклыйк:

1) (1) аңлатмадагы C урынына нинди генә сан куйсак та, I аралыгында f функциясе өчен башлангыч функция табылыр;

2) I аралыгында f өчен нинди генә Φ башлангыч функциясен алсак та, I аралыгындагы барлык x өчен

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

тигезлеге үтәлерлек C санын сайлап алырга мөмкин.



118 нче рәсем

Исбатлау. 1) Шарт буенча F функциясе — I аралыгында f функциясе өчен башлангыч функция. Димәк, теләсә нинди $x \in I$ өчен $F'(x) = f(x)$, шуңа күрә

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

ягъни f функциясе өчен $F(x) + C$ — башлангыч функция.

2) $\Phi(x)$ — шул ук I аралыгында f функциясе өчен башлангыч функцияләрдән берсе булсын, ягъни барлык $x \in I$ өчен $\Phi'(x) = f(x)$. Ул вакытта

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Моннан күренгәнчә, функциянең даимилек билгесе буенча $\Phi(x) - F(x)$ аермасы I аралыгында берникадәр даими C кыйммәтен кабул итүче функция була.

Шулай итеп, I аралыгындагы барлык x лар өчен $\Phi(x) - F(x) = C$ тигезлеге дөрес була, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Башлангыч функцияләрнең төп үзлегенә геометрик мәгънә бирергә мөмкин:

> *Функция өчен теләсә кайсы ике башлангыч функциянең графиклары берсе икенчесеннән Оу күчәре буйлап параллель күчереп табыла* (118 нче *а* рәсем).

2. Башлангыч функцияләрне табуга мисаллар.

1 нче мисал. $f(x) = -x^3$ функциясе өчен R да башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыйк.

f функциясенең башлангыч функцияләреннән берсе $-\frac{x^4}{4}$ икәнен искәрик, чөнки $\left(-\frac{x^4}{4}\right)' = -x^3$. Исбатланган теорема нигезендә

f функциясе өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвеше түбәндәгечә:

$$F(x) = -\frac{x^{-4}}{4} + C.$$

2 нче мисал. $(0; \infty)$ аралыгында $f(x) = \frac{1}{x^2}$ функциясе өчен $x = 1$ булганда, 1 кыйммәтен кабул итүче башлангыч функция $F(x_0)$ не табыйк.

f функциясенең теләсә кайсы башлангыч функциясе $F(x) = -\frac{1}{x} + C$ рәвешен алуын җиңел тикшерергә була. Чөнки шарт буенча $F(1) = 1$ булганга күрә, $-1 + C = 1$ рәвешендәге тигезләмәне (C га карата) табабыз, моннан $C = 2$, һәм, димәк, $F_0(x) = -\frac{1}{x} + 2$.

3 нче мисал. Нокта даими a тизләнеше белән туры буйлап хәрәкәт итә. $t_0 = 0$ башлангыч моментында ноктаның башлангыч координатасы x_0 һәм башлангыч тизлеге v_0. Ноктаның $x(t)$ координатасын вакытка карата функция буларак табыйк.

$x'(t) = v(t)$ һәм $v'(t) = a(t)$ булганга, $a(t) = a$ шартыннан $v'(t) = a$ икәнлеге килеп чыга. Моннан

$$v(t) = at + C_1. \qquad (2)$$

(2) формулага $t_0 = 0$ не куеп табабыз: $C_1 = v_0$ һәм

$$x'(t) = v(t) = at + v_0.$$

Димәк,

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C_2. \qquad (3)$$

C_2 не табу өчен, (3) тигезлеккә $t_0 = 0$ кыйммәтен куябыз; моннан $C_2 = x_0$. Шулай итеп,

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0. \blacksquare$$

Искәрмә. F ның башлангыч функциясен тапканда, кыскалык өчен f бирелгән аралык, гадәттә, күрсәтелми. Бу вакытта мөмкин кадәр озын булган аралыклар күздә тотыла. Мәсәлән, түбәндәге мисалда $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясе $(0; \infty)$ аралыгында бирелгән дип исәпләү табигый.

4 нче мисал. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясе өчен графигы $M(9; -2)$ ноктасы аша үтә торган башлангыч функцияне табыйк.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясенең теләсә нинди башлангыч функциясе

$$2\sqrt{x} + C$$

рәвешендә языла. Әлеге башлангыч функцияләрнең графиклары 118 нче *б* рәсемдә сурәтләнгән. Эзләнелә торган башлангыч функция графигының $M(9; -2)$ координатасы ноктасы $2\sqrt{9} + C = -2$ тигезләмәсен канәгатьләндерергә тиеш. Моннан $C = -8$ икәнен табабыз. Димәк, $F(x) = 2\sqrt{x} - 8$.

Түбәндә кайбер функцияләрнең башлангыч функцияләре таблицасы китерелгән:

Функция f	k (даими зурлык)	x^n ($n \in Z$, $n \neq -1$)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
f башлангыч функцияләрнен гомуми рәвеше	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$2\sqrt{x} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Таблица дөрес тутырылганмы? Үзегез тикшерегез.

Күнегүләр

f функциясе өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыгыз (335—336).

335. — а) $f(x) = 2 - x^4$; б) $f(x) = x + \cos x$;
в) $f(x) = 4x$; г) $f(x) = -3$.

336. — а) $f(x) = x^6$; б) $f(x) = \frac{1}{x^4} - 2$;
в) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$; г) $f(x) = x^5$.

337. — f функциясе өчен бирелгән кыйммәтне күрсәтелгән ноктада кабул итүче башлангыч функция F ны табыгыз:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = -12$; б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;
в) $f(x) = x^3$, $F(-1) = 2$; г) $f(x) = \sin x$, $F(-\pi) = -1$.

338. — F функциясенең f функциясе өчен башлангыч функция икәнен тикшерегез. Әгәр дә:

а) $F(x) = \sin x - x\cos x$, $f(x) = x\sin x$;

б) $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

в) $F(x) = \cos x + x\sin x$, $f(x) = x\cos x$;

г) $F(x) = x - \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$

булса, f өчен башлангыч функцияләренең гомуми рәвешен табыгыз.

339. — f функциясе өчен графигы бирелгән M ноктасы аша үтүче башлангыч функцияне табыгыз:

а) $f(x) = 2\cos x$, $M\left(-\frac{\pi}{3}; 1\right)$;

б) $f(x) = 1 - x^2$, $M(-3; 9)$;

в) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3}; -1\right)$;

г) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $M\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

340.— f функциясе өчен графикларының тиндәш нокталары (ягъни абсциссалары тигез булган нокталары) арасындагы ераклык a га тигез булган ике башлангыч функцияне табыгыз:

а) $f(x) = 2 - \sin x$, $a = 4$; б) $f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $a = 1$;

в) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$, $a = 0{,}5$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $a = 2$.

341.— Туры буенча $a(t)$ тизләнеше белән нокта хәрәкәт итә. t_0 башлангыч моментында аның координатасы x_0 гә тигез, ә тизлеге v_0. Ноктаның $x(t)$ координатасын вакытка карата функция буларак табыгыз:

а) $a(t) = -2t$, $t_0 = 1$, $x_0 = 4$, $v_0 = 2$;

б) $a(t) = \sin t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_0 = 2$, $v_0 = 1$;

в) $a(t) = 6t$, $t_0 = 0$, $x_0 = 3$, $v_0 = 1$;

г) $a(t) = \cos t$, $t_0 = \pi$, $x_0 = 1$, $v_0 = 0$.

28. Башлангыч функцияләрне табуның өч кагыйдәсе

Әлеге кагыйдәләр дифференциаллауның тиңдәшле кагыйдәләренә охшаш.

> **1 нче кагыйдә.** Әгәр дә f өчен башлангыч функция F, ә g өчен башлангыч функция G икән, ул вакытта $f + g$ өчен башлангыч функция $F + G$ була.

Чыннан да, $F' = a$ һәм $G' = g$ булганга күрә, сумманың чыгарылмасын табу кагыйдәсе буенча:

$$(F + G)' = F' + G' = f + g.$$

> **2 нче кагыйдә.** Әгәр дә f өчен башлангыч функция F, ә k даими зурлык икән, ул вакытта kf өчен башлангыч функция kF була.

Чыннан да, даими тапкырлаучыны чыгарылма тамгасы тышына чыгарырга мөмкин, шуңа күрә

$$(kF)' = kF' = kf.$$

> **3 нче кагыйдә.** Әгәр дә $f(x)$ өчен башлангыч функция $F(x)$, ә k һәм b — даими зурлыклар, өстәвенә $k \neq 0$ икән, $f(kx + b)$ функциясе өчен башлангыч функция $\frac{1}{k} F(kx + b)$ була.

Чыннан да, катлаулы функциянең чыгарылмасын табу кагыйдәсе буенча:

$$\left(\frac{1}{k} F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k} F'(kx + b) \cdot k = f(kx + b).$$

Бу кагыйдәләрне куллануга мисаллар китерик.

1 нче мисал. $f(x)=x^3+\frac{1}{x^2}$ функциясе өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыйк.

x^3 функциясе өчен башлангыч функцияләрнең берсе $\frac{x^4}{4}$, ә $\frac{1}{x^2}$ функциясе өчен башлангыч функцияләрнең берсе $-\frac{1}{x}$ булганга, 1 нче кагыйдә буенча $f(x) = x^3+\frac{1}{x^2}$ функциясе өчен башлангыч функцияләрнең берсе $\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}$ булыр.

Җавап. $F(x) = \frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}+C$.

2 нче мисал. $f(x) = 5\cos x$ функциясе өчен башлангыч функцияләрдән берсен табыйк.

$\cos x$ функциясе өчен башлангыч функцияләрнең берсе $\sin x$, шуңа күрә 2 нче кагыйдәне кулланып җавапны табабыз: $F(x) = 5\sin x$ була.

3 нче мисал. $y = \sin(3x-2)$ функциясе өчен башлангыч функцияләрнең берсен табыйк.

$\sin x$ функциясе өчен башлангыч функцияләрнең берсе — $\cos x$ булганга күрә, 3 нче кагыйдә буенча эзләнелә торган башлангыч функция $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x-2)$ гә тигез.

4 нче мисал. $f(x) = \frac{1}{(7-3x)^5}$ функциясе өчен башлангыч функцияләрнең берсен табыйк.

$\frac{1}{x^5}$ функциясе өчен башлангыч функция $-\frac{1}{4x^4}$ гә тигез, шуңа күрә 3 нче кагыйдә буенча эзләнелә торган башлангыч функция:

$$F(x) = \frac{1}{-3}\cdot\frac{-1}{4(7-3x)^4} = \frac{1}{12(7-3x)^4}.$$

5 нче мисал. Массасы 2 кг булган материаль нокта Ox күчәре буенча бу күчәр буйлап юнәлгән көч тәэсирендә хәрәкәт итә. t вакыты моментында әлеге көч $F(t) = 3t-2$ гә тигез. Әгәр дә, $t = 2$ с булганда, ноктаның тизлеге 3 м/с ка, ә координата 1 гә тигез (F — ньютоннарда алынган көч, t — секундларда алынган вакыт, x — метрларда үлчәнгән юл) икәне билгеле булса, ноктаның хәрәкәт законы $x(t)$ ны табыгыз.

Ньютонның икенче законы буенча $F = ma$, биредә a — тизләнеш. Шуңа күрә

$$a(t) = \frac{F}{m} = \frac{3}{2}t - 1.$$

Ноктаның тизлеге $v(t)$ аның тизләнеше $a(t)$ өчен башлангыч функция була, шуңа күрә

$$v(t) = \frac{3}{4}t^2 - t + C_1.$$

C_1 константасын $v(2) = 3$ шартыннан табабыз:

$\frac{3}{4} \cdot 4 - 2 + C_1 = 3$, ягъни $C_1 = 2$ һәм $v(t) = \frac{3}{4}t^2 - t + 2$.

$x(t)$ координатасы $v(t)$ тизлеге өчен башлангыч функция була, шуңа күрә

$$x(t) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t + C_2.$$

C_2 константасын $x(2) = 1$ шартыннан табабыз:

$$\frac{1}{4} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 + C_2 = 1, \; C_2 = -3.$$

Шулай итеп, ноктаның хәрәкәт законы:

$$x(t) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t - 3.$$

Күнегүләр

f функциясе өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыгыз (342—344).

342. а) $f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^4}$; б) $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x$;

в) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$; г) $f(x) = 5x^2 - 1$.

343. а) $f(x) = (2x - 3)^5$; б) $f(x) = 3\sin 2x$;

в) $f(x) = (4 - 5x)^7$; г) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$.

344. а) $f(x) = \frac{3}{(4 - 15x)^4}$; б) $f(x) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$;

в) $f(x) = \frac{4}{(3x - 1)^2}$; г) $f(x) = -\frac{2}{x^4} + \frac{1}{\cos^2(3x - 1)}$.

345. f функциясе өчен графигы M ноктасы аша үтүче башлангыч функцияне табыгыз:

а) $f(x) = 4x + \frac{1}{x^2}$, $M(-1; 4)$;

б) $f(x) = x^3 + 2$, $M(2; 15)$;

в) $f(x) = 1 - 2x$, $M(3; 2)$;

г) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 10x^4 + 3$, $M(1; 5)$.

346. — Түбәндәге функцияләр өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыгыз:

а) $f(x) = 1 - \cos 3x + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

б) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 4x} + \frac{1}{\sqrt{2-x}} - 3x^2$;

в) $f(x) = \frac{2}{\cos^2(3x+1)} - 3\sin(4-x) + 2x$;

г) $f(x) = \frac{1}{(3-2x)^3} + \frac{3}{\sqrt{5x-2}} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

347. — Әгәр F графигындагы M ноктасының координаталары билгеле булса, f функциясе өчен башлангыч F функциясен формула белән бирегез:

а) $f(x) = 2x + 1$, $M(0;\ 0)$;
б) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $M(1;\ 4)$;
в) $f(x) = x + 2$, $M(1;\ 3)$;
г) $f(x) = -x^2 + 3x$, $M(2;\ -1)$.

348. — Туры сызык буенча хәрәкәт итүче ноктаның тизлеге $v(t) = t^2 + 2t - 1$ тигезләмәсе белән бирелгән. Әгәр вакытның башлангыч моментында ($t = 0$) ноктаның координаталар башында урнашуы билгеле булса, нокта координаталары x ның t вакытына бәйлелек формуласын языгыз.

349. — Туры сызык буенча хәрәкәт итүче ноктаның тизлеге $v(t) = 2\cos\frac{t}{2}$ формуласы белән бирелгән. Әгәр $t = \frac{\pi}{3}$ с моментында ноктаның координаталар башыннан 4 м ераклыкта урнашуы билгеле булса, нокта координаталарының вакытка бәйлелеген аңлаткан формуланы табыгыз.

350. — Нокта туры сызык буенча $a(t) = 12t^2 + 4$ тизләнеше белән хәрәкәт итә. Әгәр $t = 1$ с моментында аның тизлеге 10 м/с ка тигез булып, координатасы 12 гә тигез булса (a ның үлчәү берәмлеге 1 м/с^2 ка тигез), ноктаның хәрәкәт итү законын табыгыз.

351. — m массалы материаль нокта Ox күчәре буенча әлеге күчәргә параллель юнәлгән көч тәэсирендә хәрәкәт итә. t вакыты моментында бу көч $F(t)$ га тигез. Әгәр дә $t = t_0$ булганда, ноктаның тизлеге v_0 гә тигез, ә аның координатасы x_0 гә тигез икәне билгеле булса ($F(t)$ — ньютоннарда, t — секундларда, v — секундка туры килгән метрларда, m — килограммнарда үлчәнә), $x(t)$ ның t вакытына бәйлелек формуласын табыгыз:

а) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$;
б) $F(t) = 14\sin t$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$;
в) $F(t) = 25\cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $v_0 = 2$, $x_0 = 4$, $m = 5$;
г) $F(t) = 8t + 8$, $t_0 = 2$, $v_0 = 9$, $x_0 = 7$, $m = 4$.

352.— f функциясе өчен булган F_1 башлангыч функциясенең графигы M ноктасы аша, ә F_2 башлангыч функциясенеке N ноктасы аша үтә. Әлеге башлангыч функцияләрнең аермасы ничек? Әгәр дә:

а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, $M(-1; 1)$, $N(0; 3)$;

б) $f(x) = 4x - 6x^2 + 1$, $M(0; 2)$, $N(1; 3)$;

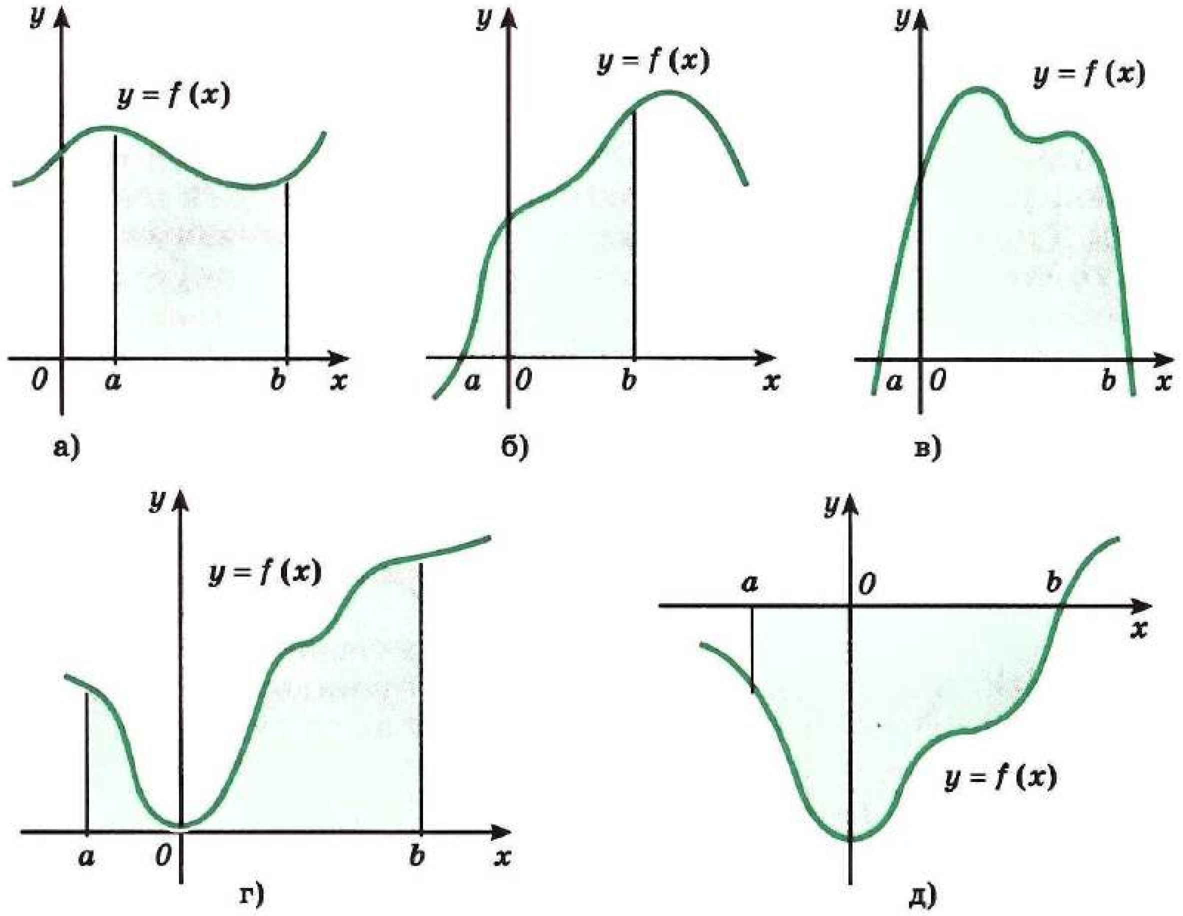
в) $f(x) = 4x - x^3$, $M(2; 1)$, $N(-2; 3)$;

г) $f(x) = (2x + 1)^2$, $M(-3; -1)$, $N\left(1; 6\frac{1}{3}\right)$ булса, F_1 һәм F_2 графикларының кайсысы югарырак урнашыр?

§ 8.
Интеграл

29. Кәкресызыклы трапециянең мәйданы

Ox күчәренең $[a; b]$ кисемтәсендә тамгасын үзгәртми торган өзлексез f функциясе бирелсен, ди. Әлеге функциянең графигы, $[a; b]$ кисемтәсе һәм $x = a$ һәм $x = b$ турылары белән чикләнгән фигураны (119 нчы рәсем) *кәкресызыклы трапеция* дип атыйлар. 119 нчы *а—д* рәсемнәрендә кәкресызыклы трапециягә төрле мисаллар китерелгән.



119 нчы рәсем

Кәкресызыклы трапецияләрнең мәйданнарын исәпләп чыгару өчен, түбәндәге теоремадан файдаланалар.

Теорема ***Әгәр f функциясе — [a; b] кисемтәсендә өзлексез һәм тискәре булмаган функция, ә F шушы кисемтәдә аның башлангыч функциясе булса, ул вакытта кәкресызыклы трапециягә тиңдәш мәйдан*** (120 нче рәсем) ***башлангыч функциянең [a; b] кисемтәсендәге үсемтәсенә, ягъни***

$$S = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

га тигез.

Исбатлау. $[a; b]$ кисемтәсендә билгеләнгән $S(x)$ функциясен тикшерик. Әгәр $a < x \leqslant b$ икән, $S(x)$ мәйданы $M(x; 0)$ ноктасы аша үтүче вертикаль турыдан сулдарак урнашкан кәкресызыклы трапециянең бер өлешенә тигез була (120 нче *а* рәсем). Әгәр $x = a$ булса, $S(a) = 0$ була. Шул ук вакытта $S(b) = S$ икәнен искәрәбез (S — кәкресызыклы трапеция мәйданы).

$$S'(x) = f(x) \qquad (2)$$

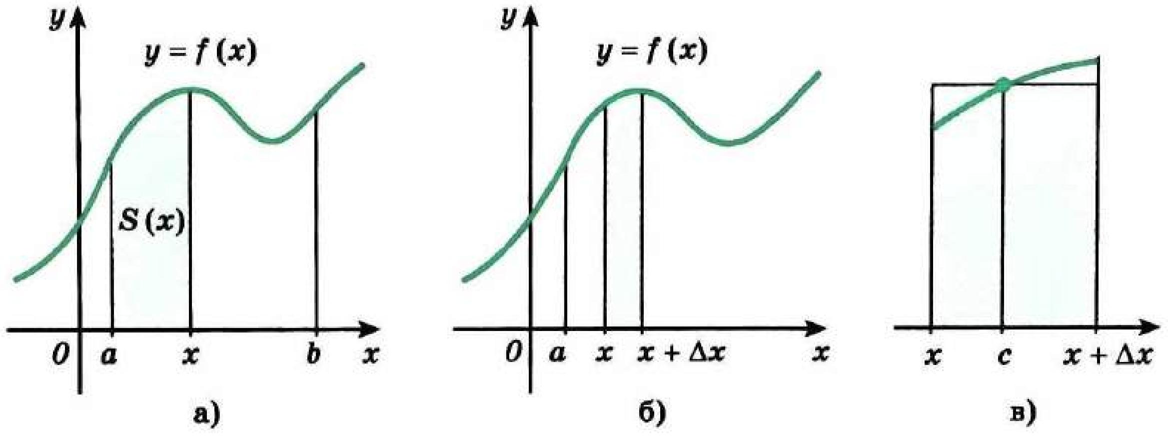
икәнен исбатлыйк.

Чыннан да, чыгарылма билгеләмәсе буенча

$$\Delta x \to 0 \text{ булганда, } \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \to f(x) \qquad (3)$$

икәнен исбатларга кирәк.

$\Delta S(x)$ санаучысының геометрик мәгънәсен ачыклыйк. Гадилек өчен $\Delta x > 0$ очрагын тикшерик. $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$, шуңа күрә $\Delta S(x)$ 120 нче *б* рәсемендә штрихланган фигураның мәйданы булыр. Хәзер шундый ук $\Delta S(x)$ мәйданлы турыпочмаклык алыйк, ул $[x; x + \Delta x]$ кисемтәсенә таянган булсын (120 нче *в* рәсем). Турыпочмаклыкның өске ягы, f функциясенең өзлексез булуы нәтиҗәсендә, аның графигын абсциссасы $c \in [x; x + \Delta x]$ булган ниндидер ноктада кисеп үтә (киресенчә булганда, әлеге турыпочмаклык я кәкресызыклы трапециянең бер өлешендә $[x; x + \Delta x]$ кисемтәсе өстендә була, яисә үзе трапецияне эченә ала; аның мәйданы тиңдәшле рәвештә $\Delta S(x)$ мәйданыннан кечерәк



120 нче рәсем

яки зуррак була). Турыпочмаклыкның биеклеге $f(c)$ ка тигез. Турыпочмаклыкның мәйдан формуласы буенча табабыз: $\Delta S(x) = f(c)\Delta x$, моннан $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(c)$. (Бу формула $\Delta x < 0$ булганда да дөрес.) c ноктасы x һәм $x + \Delta x$ арасында ятканга күрә, $\Delta x \to 0$ булганда, c ноктасы x ка омтыла. f функциясе өзлексез булганлыктан, $\Delta x \to 0$ гә омтылганда, $f(c) \to f(x)$. Шулай итеп, $\Delta x \to 0$ гә омтылганда, $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \to f(x)$.

(2) формула исбатланды.

Без $S(x)$ функциясенең $f(x)$ функциясе өчен башлангыч функция булуын таптык. Шуңа күрә башлангыч функцияләрнең төп үзлеге буенча барлык $x \in [a; b]$ өчен

$$S(x) = F(x) + C$$

икәне табыла, биредә C — ниндидер даими зурлык, ә $F(x)$ исә f функциясе өчен башлангыч функцияләрнең берсе. C ны табу өчен $x = a$ ны куябыз:

$$F(a) + C = S(a) = 0,$$

моннан $C = -F(a)$. Димәк,

$$S(x) = F(x) - F(a). \quad (4)$$

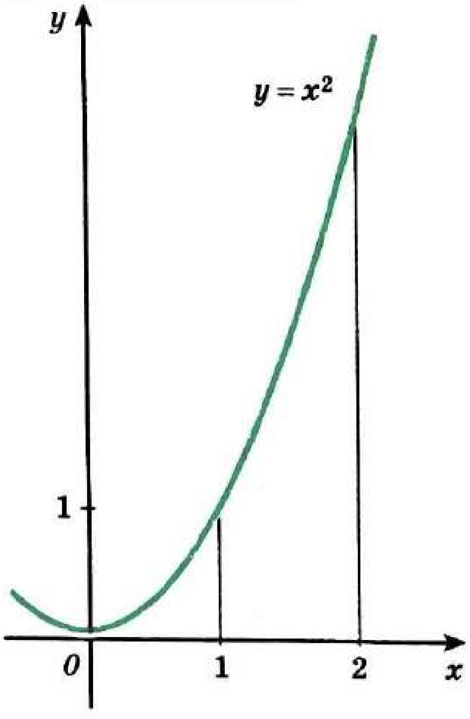
Кәкресызыклы трапециянең мәйданы $S(b)$ га тигез булганлыктан, (4) формулага $x = b$ ны куеп табабыз:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$

Мисал. $f(x) = x^2$ функциясенең графигы һәм $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ турылары белән чикләнгән кәкресызыклы трапециянең мәйданы S ны исәпләп чыгарыйк (121 нче рәсем).

$f(x) = x^2$ функциясе өчен башлангыч функцияләрнең берсе булып $F(x) = \frac{x^3}{3}$ хезмәт итә. Димәк,

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$



121 нче рәсем

Сез функциянең чыгарылмасын табу күпчелек очракта исәпләү характерындагы кыенлыкларга гына бәйле икәнен күрдегез. Башлангыч функцияләрне тапканда исә, эш кыенрак тора.

Мәсәлән, бирелгән функциянең башлангыч функциясе бармы-юкмы икәне башта ук ачык билгеле дә түгел. Шуңа күрә аралыкта өзлексез булган теләсә нинди функциянең бу аралыкта башлангыч функциясе бар икәнен әйтеп китәбез. Югарыда китерелгән (2) формуланың исбатланышы

бу мәсьәләгә ачыклык кертә. Шулай да кайбер шактый гади функцияләрнең дә башлангычын мәктәптә өйрәнелә торган функцияләр ярдәмендә язып булмаска мөмкин. Мәсәлән, $y = \sqrt{x^3 + 1}$ функциясе моңа мисал була ала.

Күнегүләр

Түбәндәге сызыклар белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз (353—354).

353. а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$; б) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;
в) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$;
г) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

354. а) $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
б) $y = 1 + 2\sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;
в) $y = 4 - x^2$, $y = 0$;
г) $y = \frac{1}{2}\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

355. Түбәндәге сызыклар белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз (355—356).
а) $y = (x + 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$;
б) $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
в) $y = 2x - x^2$, $y = 0$; г) $y = -(x - 1)^3$, $y = 0$, $x = 0$.

356. а) $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$, $y = 0$, $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$;
б) $y = 2\cos 2x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$;
в) $y = \sin x - \frac{1}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;
г) $y = 1 - \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

30. Интеграл. Ньютон — Лейбниц формуласы

1. Интеграл турында төшенчә. Кәкресызыклы трапециянең мәйданын икенче төрле юл белән дә исәпләргә мөмкин. Гадилек өчен f функциясен тискәре түгел һәм $[a; b]$ кисемтәсендә өзлексез дип алырбыз; ул вакытта тиңдәшле кәкресызыклы трапециянең S мәйданын якынча түбәндәгечә исәпләргә мөмкин булыр:

$[a; b]$ кисемтәсен $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ нокталары белән бердәй озынлыктагы n кисемтәгә бүлик, һәм $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$ булсын, монда $k = 1, 2 ..., n - 1, n$. Һәр $[x_{k-1}; x_k]$ кисемтәсен

нигез итеп алып, $f(x_{k-1})$ биеклегендәге турыпочмаклык төзибез. Бу турыпочмаклыкның мәйданы:

$$f(x_{k-1})\Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$$

ә барлык мондый турыпочмаклыкларның мәйданнары суммасы (122 нче рәсем):

$$S_n = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))$$

f функциясенең өзлексезлеге нигезендә, n зур булганда, ягъни Δx кечкенә булганда төзелгән турыпочмаклыкларның берләшмәсе безне кызыксындырган трапеция белән «тәңгәл килә диярлек». Шуңа күрә n зур булганда, $S_n \approx S$ дигән фараз барлыкка килә, һәм бу якынча тигезлек теләсә нинди төгәллек белән дә үтәлә. (Кыскача «n чиксезлеккә омтылганда, S_n зурлыгы S ка омтыла» диләр һәм $n \to \infty$ омтылганда, $S_n \to S$ дип язалар.)

Бу фараз дөрес. Моннан да бигрәк $[a; b]$ кисемтәсендә өзлексез булган теләсә нинди f функциясе өчен (тискәре булмау мәҗбүри түгел) S_n ($n \to \infty$ булганда) ниндидер санга омтыла. Бу санны (билгеләмә буенча) *f функциясенең a дан b га кадәр интегралы* дип атыйлар һәм $\int_a^b f(x)\,dx$ дип билгелиләр, ягъни

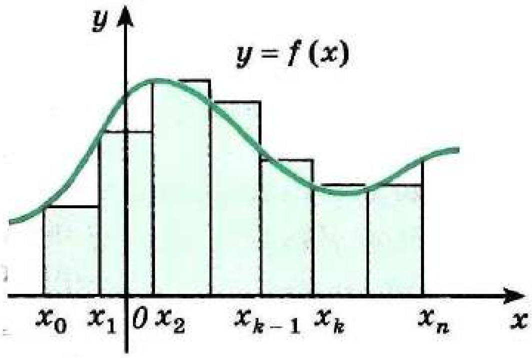
$$n \to \infty \text{ кә омтылганда, } S_n \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

(«эф икс дэ иксның a дан b га кадәр интегралы» дип укыла). a һәм b саннары *интеграллау чикләре* дип атала: a — түбәнге чик, b — югарыгы чик. $\int$ тамгасы — *интеграл тамгасы* дип атала. f функциясе — *интеграл асты функциясе* дип, ә x үзгәрешлесе *интеграллау үзгәрешлесе* дип атала.

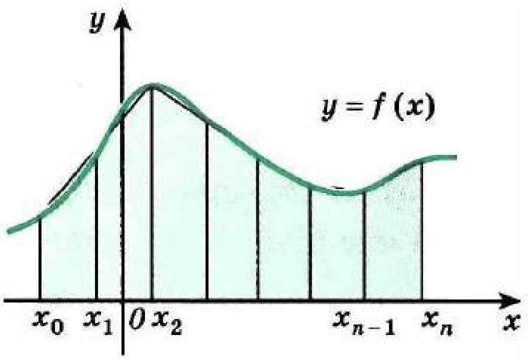
Шулай итеп, әгәр $[a; b]$ кисемтәсендә $f(x) \geq 0$ булса, кәкресызыклы трапециянең мәйданына тиңдәш S мәйданы

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

формуласы белән аңлатыла.



122 нче рәсем



123 нче рәсем

Интегралны якынча исәпләү өчен, S_n суммасын карарга мөмкин. Шулай да f функциясе уңай булган очракта, 123 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, кушылучылары кәкресызыклы трапециягә «камалган» һәм сынык сызыклар белән чикләнгән трапеция мәйданнарына тигез булган

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right)$$

суммасыннан файдалану яхшырак.

Чыннан да, трапеция мәйданы формуласын кулланып табабыз:

$$S_n = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot\frac{b-a}{n} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot\frac{b-a}{n} + \ldots =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right).$$

2. Ньютон — Лейбниц формуласы. Кәкресызыклы трапеция мәйданы өчен булган формулалар

$$S = F(b) - F(a) \text{ һәм } S = \int_a^b f(x)\,dx$$

ны чагыштырып нәтиҗә ясыйбыз.

> Әгәр F $[a; b]$ кисемтәсендә f өчен башлангыч функция булса, ул вакытта
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

(3) формула *Ньютон — Лейбниц формуласы* дип атала. Ул $[a; b]$ кисемтәсендә өзлексез булган теләсә нинди f функциясе өчен дөрес.

Ньютон — Лейбниц формуласын куллануга мисаллар карыйк.

1 нче мисал. $\int_{-1}^{2} x^2dx$ ны исәпләп чыгарыйк. x^2 функциясе өчен $\frac{x^3}{3}$ башлангыч функция булу сәбәпле,

$$\int_{-1}^{2} x^2dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

$F(b) - F(a)$ аермасын ($[a; b]$ кисемтәсендә F функциясенең үсемтәсен) язу җайлы булсын өчен, аны кыскача $F(x)\Big|_a^b$, ягъни

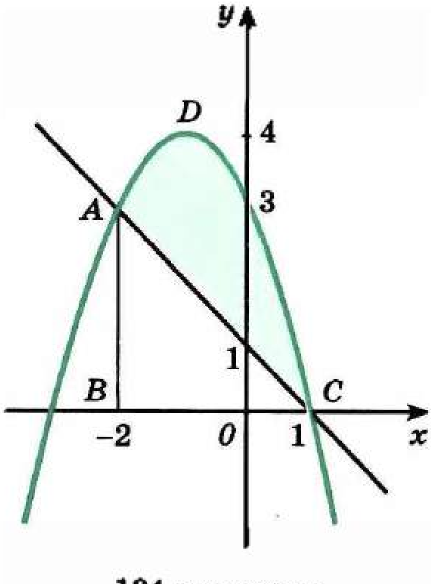
$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

рәвешендә тамгалау кабул ителгән.

Шушы тамгалаулардан файдаланып, Ньютон — Лейбниц формуласын, гадәттә,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \qquad (4)$$

рәвешендә язалар.



124 нче рәсем

2 нче мисал. $\int_0^\pi \sin x\,dx$ ны исәпләп чыгарыйк.

Кабул ителгән тамгалардан файдаланып табабыз:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2.$$

1 нче искәрмә. Интегралга без биргән билгеләмә $\frac{1}{x^2}$ функциясенең −1 дән 2 гә кадәр интегралы турында сөйләргә мөмкинлек бирми әле, чөнки бу функция [−1; 2] кисемтәсендә өзлексез түгел. Шушы ук кисемтәдә $-\frac{1}{x}$ функциясе $\frac{1}{x^2}$ функциясе өчен башлангыч була алмый, чөнки бу кисемтәдәге 0 ноктасы $\frac{1}{x^2}$ функциясенең билгеләнү өлкәсенә керми.

3 нче мисал. $y = 1 - x$ һәм $y = 3 - 2x - x^2$ сызыклары белән чикләнгән фигураның мәйданын исәплик.

Әлеге функцияләрнең графикларын сызабыз (124 нче рәсем) һәм графикларның кисешү нокталарының абсциссаларын $1 - x = 3 - 2x - x^2$ тигезләмәсеннән табабыз. Бу тигезләмәне чишеп, $x = 1$ һәм $x = -2$ икәнен беләбез. Эзләнелә торган мәйданны кәкресызыклы $BADC$ трапециясе һәм BAC өчпочмагы мәйданнарының аермасы буларак табарга мөмкин. (2) формула буенча

$$S_{BADC} = \int_{-2}^{1} (3 - 2x - x^2)\,dx = \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) - \left(3\cdot(-2) - (-2)^2 - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 9.$$

$$S_{\triangle BAC} = \frac{1}{2}AB\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

Димәк, штрихланган фигураның мәйданы:

$$S = S_{BADC} - S_{\triangle BAC} = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

2 нче искәрмә. $a \geqslant b$ булганда, билгеләмә буенча

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

дип алып, интеграл төшенчәсен киңәйтергә җайлы.

Шушындый килешү булганда, Ньютон — Лейбниц формуласы теләсә нинди a һәм b өчен дөрес була (аерым алганда, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$).

Күнегүләр

Интегралны исәпләгез (357—358).

357. а) $\int_1^2 x^4 dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; в) $\int_{-1}^{[illegible]} x^3 dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

358. а) $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$; б) $\int_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}\,dx$; в) $\int_1^{10}$ [illegible]; г) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$.

359. Тигезлекнең дөреслеген исбатлагыз:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$; г) $\int_0^1 (2x+1)\,dx = \int_0^2 (x^3 - 1)\,dx$.

Сызыклар белән чикләнгән фигураның рәсемен ясагыз һәм исәпләп чыгарыгыз (360—361).

360. а) $y = x^4$, $y = 0$, $x = -1$; $x = 1$;
б) $y = x^4$, $y = 1$;
в) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$;
г) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$.

361. а) $y = 1 - x^3$, $y = 0$, $x = 0$;
б) $y = 2 - x^3$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$;
в) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;
г) $y = -x^2 - 4x$, $y = 1$, $x = -3$, $x = -1$.

Интегралларны исәпләп чыгарыгыз (362—363).

362.— а) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$; в) $\int\limits_{0}^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}$; г) $\int\limits_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

363.— а) $\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)^2 dx$; б) $\int\limits_{0}^{2} (1+2x)^3\,dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)\,dx$; г) $\int\limits_{1}^{4} \left(x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx$.

Сызыклар белән чикләнгән фигураның рәсемен ясагыз һәм мәйданын исәпләп чыгарыгыз (364—366).

364.— а) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 1$;
б) $y = 2\cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$;
в) $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 3$, $x = -1$;
г) $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$.

365.— а) $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$; б) $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 4$;
в) $y = x^2$; $y = 2x$; г) $y = 6 - 2x$, $y = 6 + x - x^2$.

366.— а) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 4 - x^2$;
б) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 6x - x^2$;
в) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$;
г) $y = x^2$, $y = x^3$.

367.— $y = 8x - 2x^2$ функциясенең графигы белән һәм шул параболаның түбәсеннән үткәрелгән орынма һәм $x = 0$ турысы белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

368.— $f(x) = 8 - 0{,}5x^2$ функциясенең графигы, аңа $x = -2$ абсциссалы ноктадан үткәрелгән орынма һәм $x = 1$ турысы белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

369.— Тигезлекне исбатлагыз:

а) $\int\limits_{a}^{b} (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{b} g(x)\,dx$;

б) $\int\limits_{a}^{b} kf(x)\,dx = k\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ (биредә k — даими).

31. Интегралны куллану

1. Җисемнәрнең күләмнәрен исәпләү. V күләмле җисем бирелсен, ди, өстәвенә шундый бер туры бар (125 нче рәсем), бу турыга перпендикуляр итеп нинди генә яссылык алсак та, ул яссылык белән җисемнең кисешү мәйданы S безгә билгеле була. Ләкин Ox күчәренә перпендикуляр яссылык күчәрне нинди дә x ноктасында кисеп үтә. Димәк, һәрбер x санына ($[a; b]$ кисемтәсеннән, 125 нче рәсемне карагыз) бердәнбер $S(x)$ саны — җисемнең әлеге яссылык белән кисешү мәйданы тиңдәш була. Шуның белән $[a; b]$ кисемтәсендә $S(x)$ функциясе бирелә. Әгәр $S(x)$ функциясе $[a; b]$ кисемтәсендә өзлексез булса,

$$V = \int_a^b S(x)\,dx \qquad (1)$$

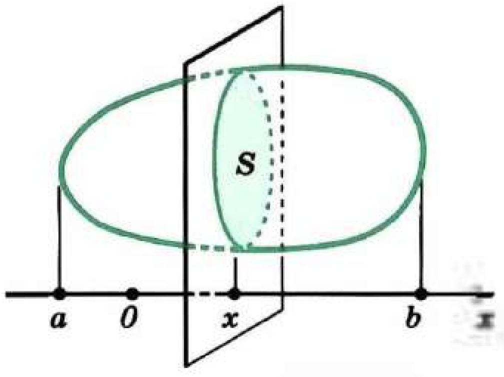
формуласы дөрес була. Бу формуланың тулысынча исбатланышы математик анализ курсларында бирелә, ә биредә бу формулага китерә торган күргәзмәле фикерләүләргә тукталыйк.

$[a; b]$ кисемтәсен $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$ нокталары белән тигез озынлыктагы n кисемтәгә бүлеп чыгыйк,

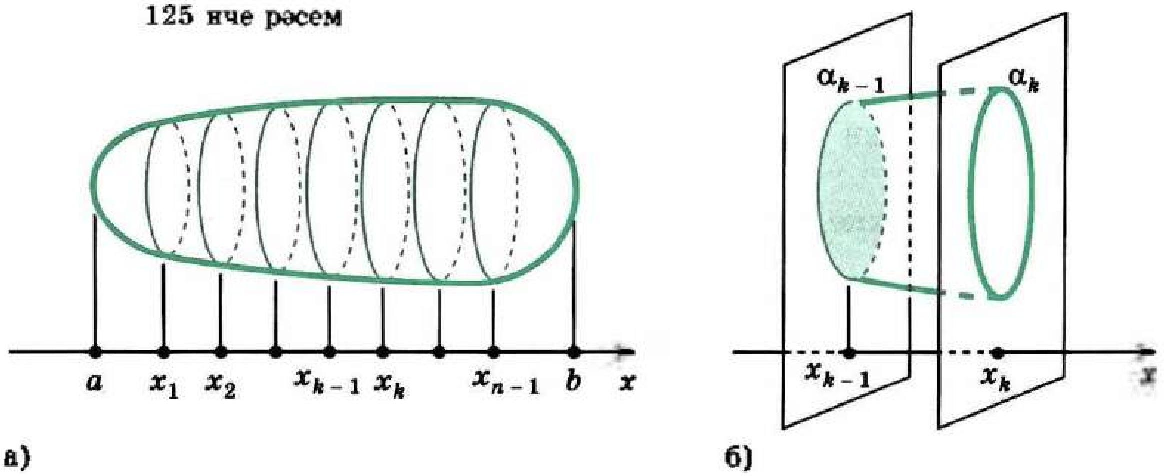
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, n$$

булсын (30 нчы пунктны карагыз). Һәрбер x_k ноктасы аша Ox күчәренә перпендикуляр яссылык үткәрәбез. Бу яссылыклар бирелгән җисемне катлауларга бүләләр (126 нчы *а*, *б* рәсемнәр). α_{k-1} һәм α_k яссылыклары арасындагы катлауның күләме n җитәрлек кадәр зур булганда, $S(x_{k-1})$ кисеменең мәйданын «катлау калынлыгы» Δx ка тапкырлаганга якынча тигез була һәм шуңа күрә

$$V \approx S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + \ldots + S(x_{n-1})\Delta x = V_n.$$



125 нче рәсем

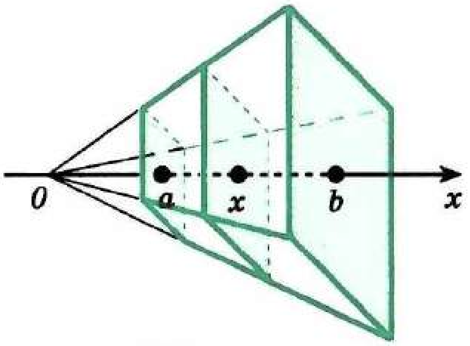


а) б)

126 нчы рәсем

Җисем никадәр юкарак катлауларга киселсә, ягъни n никадәр зур булса, әлеге якынча тигезлекнең тәгаллеге шулкадәр югары була. Шуңа күрә $n \to \infty$ омтылганда, $V_n \to V$. Интегралның билгеләмәсе буенча

$n \to \infty$ кә омтылганда, $V_n \to \int\limits_a^b S(x)\,dx$.



127 нче рәсем

1 нче мисал. Биеклеге H һәм нигезләренең мәйданнары S һәм s булган кисек пирамиданың күләме $\frac{1}{3}H(S + s + \sqrt{Ss})$ ка тигез икәнен исбатлыйк.

O ноктасы «тулы» пирамиданың түбәсе булсын (127 нче рәсем). O ноктасы аша, пирамиданың нигезенә перпендикуляр итеп, Ox күчәрен үткәрәбез. Кисек пирамиданың нигезләре Ox күчәрен a һәм b нокталарында кисеп үтә. Ox күчәренә перпендикуляр һәм әлеге күчәрдәге $[a; b]$ кисемтәсен x ноктасында кисеп үтүче һәр яссылык кисемдә пирамиданың нигезенә охшаш күппочмак бирә. Шуңа күрә кисем мәйданы $S(x) = kx^2$ ка тигез, ә аерым алганда,

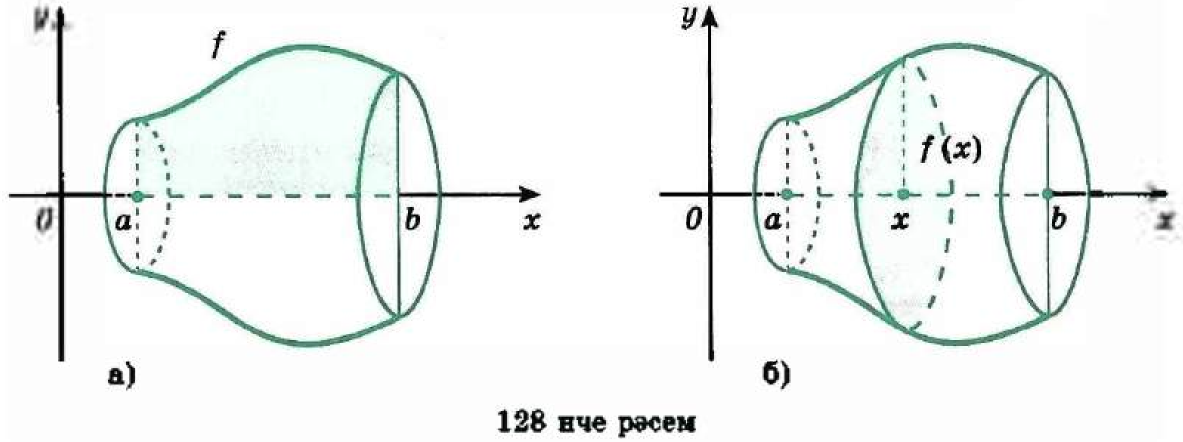
$$s = S(a) = ka^2 \text{ һәм } S = S(b) = kb^2.$$

Кисек пирамиданың күләмен (1) формула буенча исәпләп чыгарабыз:

$$V = \int\limits_a^b kx^2dx = \frac{kx^3}{3}\Big|_a^b = \frac{k}{3}(b^3 - a^3) = \frac{b-a}{3}(kb^2 + kab + ka^2) =$$

$$= \frac{H}{3}(S + \sqrt{Ss} + s).$$

2 нче мисал. Кәкресызыклы трапеция Ox күчәренең $[a; b]$ кисемтәсенә таяна һәм өске яктан $[a; b]$ кисемтәсендә тискәре булмаган, өзлексез f функциясенең графигы белән чикләнә. Бу кәкресызыклы трапецияне Ox күчәре тирәсендә әйләндергәндә, күләме



128 нче рәсем

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx \qquad (2)$$

формуласы буенча табыла торган җисем табабыз (128 нче *а* рәсем).

Чыннан да, Ox күчәренә перпендикуляр һәм бу күчәрнең $[a; b]$ кисемтәсен x ноктасында кисеп үтә торган һәрбер яссылык, җисем белән кисешкәндә, $f(x)$ радиуслы һәм $S(x) = \pi f^2(x)$ мәйданлы түгәрәк бирә (128 нче *б* рәсем). Моннан (1) формуласы буенча (2) формула табыла.

2. Үзгәрешле (алмаш) көчнең эше. P көче тәэсирендә туры сызык буенча хәрәкәт итүче материаль ноктаны тикшерәбез. Әгәр тәэсир итүче көч даими булып туры буенча юнәлсә, ә күчеш s ка тигез булса, физикадан билгеле булганча, әлеге көчнең эше Ps тапкырчыгышына тигез булыр. Хәзер үзгәрешле көч башкарган эшне исәпләү өчен формула чыгарабыз.

Нокта Ox күчәре буенча проекциясе Ox күчәренә x тан f функциясе булган көч тәэсирендә хәрәкәт итсен, ди. Бу вакытта без f ны өзлексез функция дип фараз итәрбез. Әлеге көч тәэсирендә материаль нокта $M(a)$ ноктасыннан $M(b)$ ноктасына күчә (129 нчы *а* рәсем). Бу очракта A эшенең

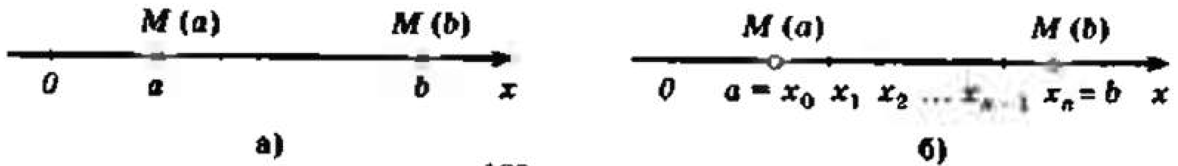
$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

формуласы буенча исәпләнүен күрсәтербез.

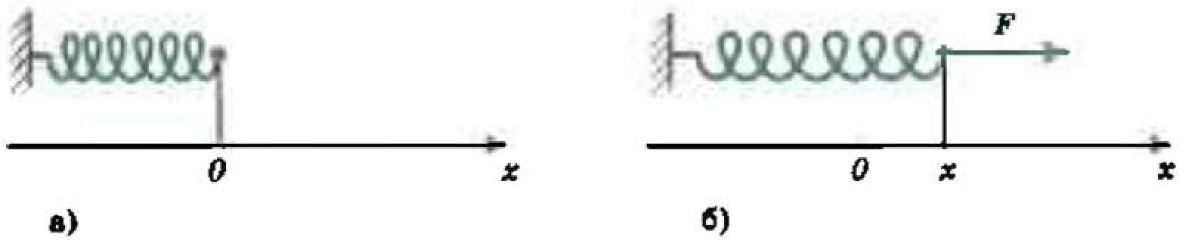
$[a; b]$ кисемтәсен бердәй $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ озынлыгындагы n кисемтәгә бүләбез. Әлеге кисемтәләр $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$ ..., $[x_{n-1}; b]$ була (129 нчы *б* рәсем). Барлык $[a; b]$ кисемтәсендә көчнең эше әлеге көчнең табылган кисемтәләрдәге эшләр суммасына тигез. f функциясе x тан өзлексез функция булганлыктан, җитәрлек кадәр кечкенә $[a; x_1]$ кисемтәсендә көчнең эше якынча $f(a)(x_1 - a)$ га тигез (без f ның кисемтәдә үзгәрүен исәпкә алмыйбыз). Шуның охшаш рәвештә икенче $[x_1; x_2]$ кисемтәсендә көчнең эше $f(x_1)(x_2 - x_1)$ гә тигез һ.б.; n нчы кисемтәдә көчнең эше якынча $f(x_{n-1})(b - x_{n-1})$ гә тигез. Димәк, барлык $[a; b]$ кисемтәсендә көчнең эше якынча

$$A \approx A_n = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x =$$
$$= \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right)$$

гә тигез һәм $[a; b]$ кисемтәсе никадәр кыскарак кисемтәләргә бүлгәләнсә, якынча тигезлекнең төгәллеге шулкадәр югары була.



129 нчы рәсем



130 нчы рәсем

Әгәр дә $n \to \infty$ дип исәпләсәк, әлеге якынча тигезлекнең төгәл тигезлеккә күчүе табигый:

$$A_n = \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) \to A.$$

$n \to \infty$ кә омтылганда, A_n тикшерелә торган функциянең a дан b га кадәрге интегралына омтылганга күрә (30 нчы пунктны карагыз), (3) формула чыгарылды.

3 нче мисал. 5 см га сузылган пружинаның эластиклык көче 3 Н га тигез. Пружинаны 5 см га сузар өчен, күпме эш башкарырга кирәк?

Гук законы буенча пружинаны x зурлыгына суза торган F көче $F = kx$ формуласы буенча исәпләп чыгарыла, биредә k — даими пропорциональлек коэффициенты (130 нчы рәсем), O ноктасы пружинаның иректә торышына туры килә. Мәсьәлә шартыннан $3 = k \cdot 0{,}05$ икәне чыга. Димәк, $k = 60$ һәм көч $F = 60x$, ә (3) формула буенча

$$A = \int_0^{0,05} 60x\,dx = 30x^2\Big|_0^{0,05}; \quad A = 0,075 \text{ Дж.}$$

3. Массалар үзәге. Массалар үзәген тапканда, түбәндәге кагыйдәләрдән файдаланалар.

1) Туры өстендә $x_1, x_2, \ldots, x_n$ координаталы нокталарда урнашкан $m_1, m_2, \ldots, m_n$ массалы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ материаль нокталары системасының массалар үзәге координатасы x'

$$x' = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad (4)$$

формуласы буенча табыла.

2) Массалар үзәге координатасын исәпләгәндә, фигураның теләсә кайсы өлешен материаль нокта белән алыштырырга мөмкин, бу ноктаны әлеге өлешнең массалар үзәгенә урнаштырып, ә массасын фигураның тикшерелә торган өлешендәге массасына тигез дип алалар.

4 нче мисал. Таяк буенча, ягъни Ox күчәренең $[a; b]$ кисемтәсе буенча, $\rho(x)$ тыгызлыгындагы масса бүленеп урнашсын, биредә $\rho(x)$ — өзлексез функция.

а) Таякның суммар массасы Mның $\int_a^b \rho(x)\,dx$ ка тигез икәнен;

б) массалар үзәге координатасы x' ның $\frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)\,dx$ ка тигез икәнен күрсәтик.

$[a; b]$ кисемтәсен $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... x_n = b$ нокталары белән тигез n өлешкә бүләбез (129 нчы *б* рәсем). n зур булганда, әлеге n кисемтәнең һәркайсында тыгызлыкны даими һәм k нчы кисемтәдә якынча $\rho(x_{k-1})$ гә тигез дип әйтергә ($\rho(x)$ ның өзлексез булуы сәбәпле) була. Ул вакытта k нчы кисемтәнең массасы $m_k = \frac{b-a}{n}\rho(x_{k-1})$ гә якынча тигез, ә таякның барлык массасы $\frac{b-a}{n}(\rho(x_0) + \rho(x_1) + ... + \rho(x_{n-1}))$ гә тигез. n кечкенә кисемтәләрнең һәркайсын x_{k-1} ноктасында урнашкан m_k массалы материаль нокта дип санап һәм (4) формула буенча массалар үзәгенең координатасын якынча табабыз:

$$x'_n = \frac{\frac{b-a}{n}(x_0\rho(x_0) + x_1\rho(x_1) + ... + x_{n-1}\rho(x_{n-1}))}{\frac{b-a}{n}(\rho(x_0) + \rho(x_1) + ... + \rho(x_{n-1}))}.$$

Хәзер инде $n \to \infty$ кә омтылганда, санаучының $\int_a^b x\rho(x)\,dx$ интегралына, ә ваклаучы таякның (барлык массасын аңлатучы зурлык) $\int_a^b \rho(x)\,dx$ интегралына омтылуын игътибарга алыйк.

Яссылыктагы яки пространстводагы материаль нокталар системасының массалар үзәге координаталарын табу өчен дә, (4) формуладан файдаланалар.

Күнегүләр

370. а) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$;
б) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
в) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $y = 0$;
г) $y = 1 - x^2$, $y = 0$
сызыклары белән чикләнгән кәкресызыклы трапециянe абсциссалар күчәре тирәсендә әйләндергәндә табылган җисемнең күләмен табыгыз.

371. а) $y = x^2$; $y = x$; б) $y = 2x$, $y = x + 3$, $x = 0$, $x = 1$;
в) $y = x + 2$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$; г) $y = \sqrt{x}$, $y = x$
сызыклары белән чикләнгән фигураны абсциссалар күчәре тирәсендә әйләндергәндә барлыкка килгән җисемнең күләмен табыгыз.

372. а) Радиусы R һәм биеклеге H булган шар сегментының күләмен табыгыз.
б) Биеклеге H, нигез радиуслары R һәм r булган кисек конусның күләме өчен формула чыгарыгыз.

373.— Әгәр 2 Н көч пружинаны 1 см га кысса, пружина 4 см га кысылсын өчен, күпме эш башкарырга кирәк?

374.— 4 Н көч пружинаны 8 см га суза. Пружинаны 8 см га сузу өчен, күпме эш башкарырга кирәк?

375.— q зурлыгындагы электр корылмасы тәэсирендә электрон туры буенча a ераклыгыннан b ераклыгына кадәр күчә. Корылмаларның үзара тәэсир итешү көче башкарган эшен табыгыз. (Ике очракны тикшерегез: 1) $a < b$, $q < 0$; 2) $b < a$, $q > 0$. Кулон законын аңлаткан формуладагы пропорциональлек коэффициентын γ га тигез дип алыгыз.)

376.— Каналның киселеше тигезьянлы трапеция формасында: аның биеклеге h, нигезләре a һәм b. Каналны тотыручы суның плотинага ясаган басым көчен табыгыз ($a > b$, a — трапециянең өске нигезе).

377.— Нигез яссылыгыннан төбендәге тишем аша цилиндрсыман мичкәгә бирелә торган су мичкәне тутыра. Бу вакытта сарыф ителгән эшне табыгыз. Мичкәнең биеклеге h ка, нигезенең радиусы r га тигез.

378.— Шарны суга батырганда этеп чыгару көченә каршы башкарылган эшне табыгыз.

379.— $l = 20$ см озынлыгындагы бериш металл таяк горизонталь яссылыкта әлеге таяк очыннан үткән вертикаль күчәр тирәсендә әйләнә. Әйләнүнең почмакча тизлеге $\omega = 10\pi c^{-1}$. Таякның аркылы кисем мәйданы $S = 4$ см^2, таякның ясалган материалының тыгызлыгы $\rho = 7{,}8$ г/см^3. Таякның кинетик энергиясен табыгыз.

380.— Бериш туры түгәрәк конусның массалар үзәген табыгыз.

Тарихтан мәгълүматлар

1. Терминнар һәм тамгаланышларның килеп чыгуы турында. Интеграл төшенчәсенең тарихы квадратуралар табу мәсьәләләре белән тыгыз бәйләнгән. Хәзерге вакытта без *мәйданнарны исәпләү мәсьәләләре* дип караган мәсьәләләрне Борынгы Греция һәм Рим математиклары теге яки бу яссы фигураның *квадратурасы турындагы мәсьәләләр* дип атаганнар. Латин сүзе quadratura «квадрат формасы бирү» дип тәрҗемә ителә. Махсус термин кирәклеге безнең өчен гадәти саналган реаль саннар турындагы күзаллауларның борынгы греклар һәм римлылар яшәгән заманда (һәм соңрак, XVIII йөзгә кадәр) җитәрлек дәрәҗәдә үсеш алмаган булуы белән аңлатыла. Математиклар аларның геометрик аналоглары белән

яки үзара тапкырлап булмый торган скаляр зурлыклар белән эш иткәннәр. Шуңа күрә мәйданнарны табу мәсьәләләрен түбәндәгечә әйткәннәр: «Бирелгән түгәрәккә тигез зурлыкта итеп квадрат төзергә». («Түгәрәкнең квадратурасы турында»гы әлеге классик мәсьәлә, билгеле булганча, циркуль һәм линейка ярдәмендә чишелә алмый.)

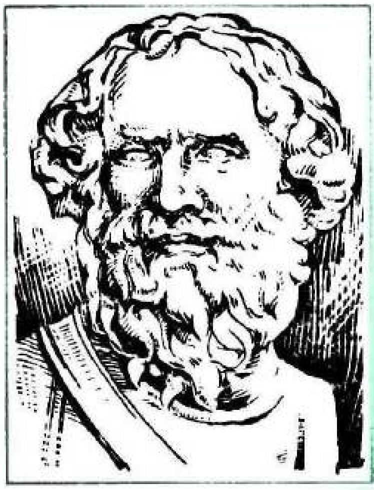
$\int$ символы Лейбниц тарафыннан 1675 елда кертелә. Әлеге тамга латин хәрефе S ны үзгәртеп алынган (summa сүзенең беренче хәрефе). *Интеграл* сүзен Я. Бернулли (1690 елда) уйлап тапкан. Ихтимал, ул *баштагы халәтенә китерергә, кире кайтарырга* дип тәрҗемә ителә торган латин сүзе integro дан алынгандыр. (Чыннан да, интеграллау гамәле дифференциаллау юлы белән табылган интеграл асты функциясен яңадан «баштагы халәтенә кайтара».) Бәлки, *интеграл* термины башкача килеп чыккандыр: integer сүзе *бөтен* дигәнне аңлата.

Үзара хат язышулар барышында И. Бернулли һәм Г. Лейбниц Я. Бернулли тәкъдиме белән килешәләр. Шул ук 1696 елда математиканың яңа тармагының исеме — *интеграль исәпләү* (calculus integralis) барлыкка килә, аны И. Бернулли кертә.

Сезгә билгеле интеграль исәпләүләргә караган башка терминнар шактый соң барлыкка килә. Хәзерге көндә кулланыла торган *башлангыч функция* моннан шактый элегрәк Лагранж (1797 ел) тарафыннан кертелгән «примитив функция»не алыштырды. Латин сүзе primitivus «башлангыч» дип тәрҗемә ителә: $F(x) = \int f(x)\,dx$ $f(x)$ өчен башлангыч функция, ул $F(x)$ ны дифференциаллау юлы белән табыла.

Хәзерге әдәбиятта $f(x)$ функциясе өчен барлык башлангыч функцияләр күплеге шулай ук *аныклык булмаган интеграл* дип атала. Бу төшенчәне Лейбниц кертә, ул барлык башлангыч функцияләрнең бер-берсеннән ирекле константалары белән аерылып торуларын күреп ала. Ә $\int_a^b f(x)\,dx$ ны *аныклык интеграл* дип атыйлар (тамгаланышын К. Фурье (1768—1830) керткән, ә инде интеграллау чикләрен Эйлер күрсәткән).

2. Интегралны исәпләү тарихыннан. Борынгы Греция математикларының яссы фигураларның *квадратураларын* (ягъни мәйданнарын исәпләү) һәм шулай ук җисемнәрнең *кубатураларын* (күләмнәрен исәпләү) табуга бирелгән мәсьәләләрне чишүдә шактый зур уңышлары Евдокс Книдский (б. э. кадәр якынча 408—355 еллар) тарафыннан кертелгән *тәмамлау методы* куллануга бәйле. Әлеге метод ярдәмендә Евдокс, мәсәлән, ике түгәрәкнең мәйданнары чагыштырмасы аларның диаметрларының квадратлары чагыштырмасы кебек, ә конусның күләме нигезе һәм биеклеге шундый ук булган цилиндр күләменең $\frac{1}{3}$ енә тигез икәнен исбатлаган.



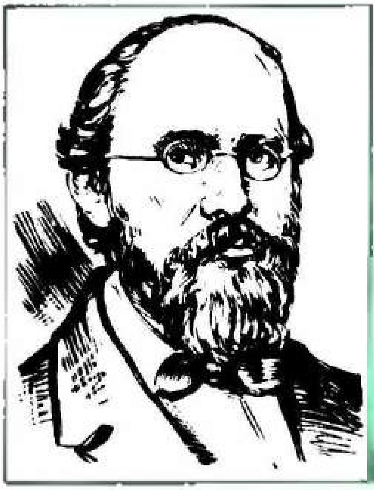
Архимед
(б. э. кадәр якынча 287—212 еллар)
Бөек галим. Математика һәм механикада күп кенә фактларны һәм методларны беренче булып ачучы, күренекле инженер. Архимедның мәйдан һәм күләмнәрне исәпләп чыгаруга, механика мәсьәләләрен чишүгә бәйле тирән һәм үткен идеяләре, асылда, 2000 елдан соң диярлек эшләнгән математик анализ ачышларына караганда алдан уйлап табыла.

Евдоксның методы Архимед тарафыннан камилләштерелә. Бу үзгәрешләр сезгә билгеле: геометрия курсында тәкъдим ителгән түгәрәк мәйданының формуласын чыгару Архимед идеяләренә нигезләнгән. Архимед методын чагылдырган төп этапларны исегезгә төшерик: 1) түгәрәк мәйданы аны камаган теләсә нинди төзек күппочмак мәйданыннан кечерәк, ә теләсә нинди камалган күппочмак мәйданыннан зуррак булуы исбатлана; 2) яклары саны чиксез икеләткәндә, әлеге күппочмакларның мәйданнары аермасы нульгә омтылуы исбатланды; 3) түгәрәкнең мәйданын исәпләп чыгару өчен, төзек күппочмакның яклары санын чиксез икеләткәндә, мәйданы чагыштырмасы омтылган кыйммәтне табасы кала.

Архимед тәмамлау методы һәм барлык башка тапкыр фикерләр (шул исәптән механика модельләрен дә кертеп) ярдәмендә күп кенә мәсьәләләрне чиште. Ул π санының кыйммәтен бәяләде $\left(3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}\right)$, шар һәм эллипсоид күләмен, парабола сегментының мәйданын һ. б. тапты. Бу нәтиҗәләрне Архимед үзе үк югары бәяли; аның теләге буенча кабер ташына цилиндрга камалган шар чокып ясала (Архимед мондый шарның күләме цилиндр күләменең $\frac{2}{3}$ сенә тигез икәнен күрсәткән).

Архимед интеграль исәпләүнең күп кенә төшенчәләрен алдан уйлап таба. (Өстәвенә чикләмәләр турындагы беренче теоремалар да гомумән аның тарафыннан исбатланган.) Ләкин әлеге төшенчәләр ачык аңлаешлы аңлатма булып исәпләү дәрәҗәсенә кадәр җиткерелсен өчен мең ярым елдан да артыграк вакыт кирәк була.

Күп кенә яңа нәтиҗәләр тапкан XVII гасыр математиклары Архимед хезмәтләреннән өйрәнәләр. Борынгы Грециядә туган башка метод — *бүленми торган зурлыклар методы* да — шулай ук киң кулланыла (бу метод беренче чиратта Демокритның атомистик карашларына бәйләнгән). Мәсәлән, кәкресызыклы трапецияне (131 нче *а* рәсем) алар $f(x)$ озынлыгындагы вертикаль кисемтәләрдән төзелгән дип күз алдына китергәннәр һәм *чиксез кечкенә* $f(x)dx$ зурлыгына тигез мәйдан биргәннәр. Шуннан чыгып,



Риман Георг Фридрих Бернхард (1826—1866)

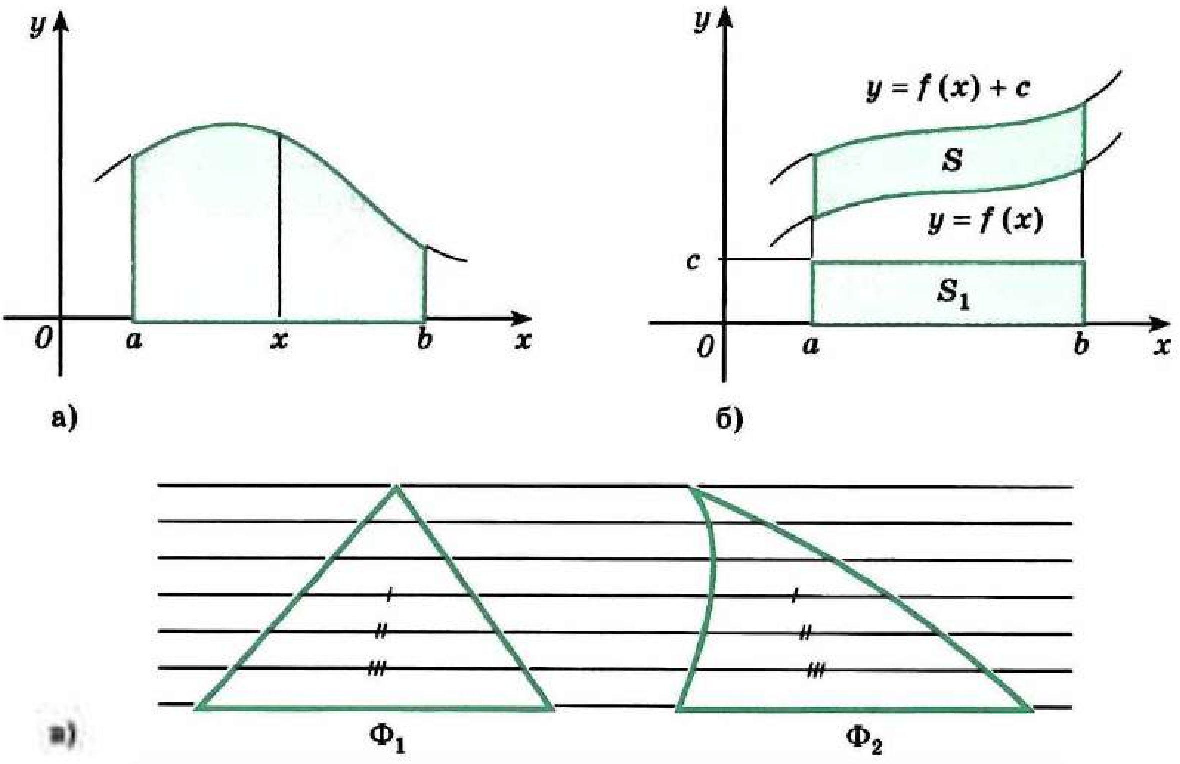
Немец галиме, XIX гасырның иң күренекле математикларыннан берсе. Саннар теориясендә һәм комплекслы үзгәрешле функцияләр теориясендә искиткеч ачышлар ясый. Евклидча булмаган яңа геометриягә нигез салган, соңыннан ул Риман исемен алган. Коши нәтиҗәләрен гомумиләштерүче интеграл теориясен барлыкка китергән

эзләнелә торган мәйдан чиксез күп сандагы чиксез кечкенә мәйданнарның суммасына

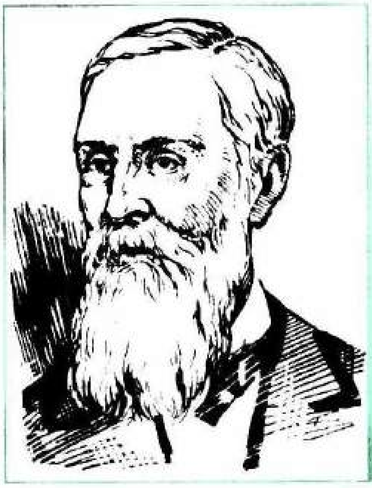
$$S = \sum_{a<x<b} f(x)\,dx$$

ка тигез дип исәпләнгән. Кайчак хәтта бу суммадагы һәр кушылучының аерым төрдәге нульләр булуы һәм чиксез күп кушылучыларның суммасы тулысынча билгеле булган уңай сумманы бирүе турында басым ясап әйтелгән.

И. Кеплер (1571—1630), хәзерге көндә шикле булып күренгән алымга нигезләнеп, үзенең «Яңа астрономия» (1609) һәм «Сыра мичкәләре стереометриясе» (1615) исемле әсәрләрендә күп кенә мәйданнарны (мәсәлән, эллипс белән чикләнгән фигураның



131 нче рәсем



Чебышев Пафнутий Львович (1821–1894)

Рус математигы һәм механигы. Аның дөнья күләмендә танылган тикшеренүләре күпбуынлы функциянең якынлашу теориясенә («Чебышев күпбуыннарының» иң яхшы якынлашуы), интеграль исәпләүгә, ихтималлылык теориясенә, механизмнар теориясенә карый.

мәйданын) һәм күләмнәрне (җисемнәрне чиксез юка пластинкаларга кискәләп) дөрес исәпләп чыгарган. Бу тикшеренүләрне Италия математиклары Б. Кавальери (1598—1647) һәм Э. Торричелли (1608—1647) дәвам иткән. Б. Кавальери тарафыннан әйтелгән принцип үзенең әһәмиятен безнең көннәргә кадәр югалтмаган. Аның бу принцибы берникадәр өстәмә фаразлар ярдәмендә бирелгән.

131 нче *б* рәсемдә сурәтләнгән фигураның мәйданын табарга кирәк булсын, ди. Бу фигураны югарыдан һәм түбәннән чикләүче кәкреләр $y = f(x)$ һәм $y = f(x) + c$ тигезләмәләре белән бирелгән.

Әлеге фигураны Кавальери терминологиясе буенча «бүленми торган» чиксез нәзек баганачыклардан тора дип күз алдына китерсәң, аларның барысы өчен дә уртак озынлык c булыр. Аларны вертикаль юнәлештә күчерә барып, нигезе $b - a$ һәм биеклеге c булган турыпочмаклык төзи алабыз. Шуңа күрә эзләнелә торган мәйдан табылган турыпочмаклыкның мәйданына, ягъни $S = S_1 = c(b - a)$ га тигез.

Яссы фигураларның мәйданнары өчен Кавальериның гомуми принцибы түбәндәгечә әйтелә.

> **Параллельләрнең кайбер бәйләмендәге турылары Φ_1 һәм Φ_2 фигураларын тигез озынлыктагы кисемтәләр буйлап кисеп үтсен, ди (131 нче *в* рәсем). Ул вакытта Φ_1 һәм Φ_2 фигураларының мәйданнары тигез.**

Моңа охшаш принцип стереометриядә дә бар, ул күләмнәрне тапканда уңайлы. Кавальери принцибының гади нәтиҗәләрен сез үзегез чыгара аласыз. Мәсәлән, нигезләре һәм биеклекләре уртак булган туры һәм авыш цилиндрларның күләмнәре тигез икәнен исбатлагыз.

XVII гасырда интеграль исәпләүгә каралган күп кенә ачышлар ясала. Мәсәлән, П. Ферма 1629 елда ук теләсә нинди $y = x^n$ (бередә n — бөтен сан) кәкресенең квадратурасы мәсьәләсен чишә (ягъни, асылда, $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ формуласын чыгара), шуның нәтиҗәсендә

Лебег Анри
(1875—1941)
Француз математигы. Үлчәү (мәйдан һәм күләм төшенчәсен гомумиләштерү) теориясен барлыкка китерә һәм шуның нигезендә интегралның яңа теориясен эшкәртә.

дә авырлык үзәкләрен табуга күп кенә мәсьәләләрне чишә. И. Кеплер үзенең атаклы планеталар хәрәкәте законнарын чыгарганда, асылда, якынча интеграллау идеясенә таяна. Ньютонның укытучысы И. Барроу (1630—1677) интеграллау һәм дифференциаллау арасындагы бәйләнешне аңлауга якынрак килә. Функцияләрне дәрәҗәле рәтләр рәвешендә күрсәтү буенча башкарылган эшләр зур әһәмияткә ия була.

Шулай да XVII гасырның күп кенә көчле уйлап табучы математиклары тапкан нәтиҗәләр шактый зур булса да, исәпләү эшләре әле башкарылмаган була. Күп кенә аерым мәсьәләләрне чишүнең нигезендә яткан уртак идеяләрне аера белергә һәм шулай ук җитәрлек дәрәҗәдә уртак алгоритм бирүче дифференциаллау операцияләре арасында бәйләнеш булдыру кирәк була. Болар бер-берсенә бәйсез рәвештә Ньютон һәм Лейбниц тарафыннан эшләнә, һәм ул сезгә таныш Ньютон — Лейбниц формуласы исемен йөртә. Шушының белән гомуми метод тәмам формалаша. Ләкин күп кенә функцияләрнең башлангыч функцияләрен табарга өйрәнәсе, яңа исәпләүне логик яктан нигезлисе һ.б. эшлисе кала әле. Ләкин иң әһәмиятлесе эшләнә: дифференциаль һәм интеграль исәпләүләр барлыкка килә.

Киләсе йөз елда математик анализ методлары актив үсә (беренче чиратта элементар функцияләрне интеграллауны системалы рәвештә тикшерүне төгәлләгән Л. Эйлер һәм И. Бернулли исемнәрен әйтергә кирәк). Интеграль исәпләүне үстерүдә рус математиклары М. В. Остроградский (1801—1862), В. Я. Буняковский (1804—1889), П. Л. Чебышев (1821—1894) катнашалар. Аерым алганда, Чебышев нәтиҗәләре принципиаль әһәмияткә ия була. Ул элементар функция аша аңлатып булмый торган интегралларның барлыгын исбат итә.

Интеграл теориясенең төгәл язылышы узган гасырда гына барлыкка килә. Бу мәсьәләнең чишелеше О. Коши, зур математикларның берсеннән саналган немец галиме Б. Риман (1826—1866),

француз математигы Г. Дарбу (1842—1917) исемнәре белән бәйле.

Фигураларның мәйданнары һәм күләмнәре барлыгына бәйле күп кенә сорауларга җаваплар К. Жордан (1838—1922) тарафыннан үлчәү бәрәмлекләре теориясе эшләнгәч табыла.

Безнең гасыр башында интеграл төшенчәсенең төрлечә гомумиләштерелүе француз математиклары А. Лебег (1875—1941) һәм А. Данжуа (1884—1974), совет математигы А. Я. Хинчин (1894—1959) тарафыннан башкарыла.

Кабатлау өчен сораулар һәм мәсьәләләр

1. 1) Башлангыч функциянең билгеләмәсен әйтегез.

2) F функциясенең R да f функциясе өчен башлангыч функция икәнен исбатлагыз:

а) $f(x) = 2x + 3$, $F(x) = x^2 + 3x + 1$;

б) $f(x) = \sin 2x + 3$, $F(x) = -\frac{\cos 2x}{2} + 3x$;

в) $f(x) = -x^3 + 5$, $F(x) = -\frac{x^4}{4} + 5x + 2$;

г) $f(x) = -\cos\frac{x}{2} + 1$, $F(x) = -2\sin\frac{x}{2} + x$.

3) Бирелгән аралыкта F функциясе f функциясе өчен башлангыч функция була аламы?

а) $F(x) = x^2 - x$, $f(x) = 2x - 1$ R да;

б) $F(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$, $f(x) = -\frac{1}{x^3} - \cos x$ R да;

в) $F(x) = x^3 + 1$, $f(x) = \frac{x^4}{4} + x$ R да;

г) $F(x) = x + \cos x$, $f(x) = 1 - \sin x$ R да.

2. 1) Бирелгән аралыкта функциянең даимилек билгесен әйтегез. Башлангыч функциянең төп үзлекләрен әйтегез.

2) Түбәндәге функцияләр өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен языгыз:

а) $f(x) = kx + b$ (k һәм b — даими); б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$;

в) $f(x) = x^n$ (n — бөтен сан, $n \neq -1$); г) $f(x) = \cos x$.

3) f функциясе өчен бирелгән ноктада бирелгән кыйммәтне кабул итүче башлангыч F функциясен табыгыз:

а) $f(x) = \sin x - \cos x$, $F(\pi) = 1$; б) $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{x^2}$, $F(3) = 5$;

в) $f(x) = 2x - 5$, $F(1) = -2$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, $F(6) = 10$.

3. **1) Башлангыч функцияләрне табуның өч кагыйдәсен әйтегез.**

2) Түбәндәге функцияләр өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыгыз:

а) $f(x) = \sin 3x - \frac{2}{\cos^2 \frac{x}{2}}$; б) $f(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $f(x) = (4-5x)^3 - \frac{1}{(2x-1)^4}$; г) $f(x) = x - 10\cos 2x$.

3) $f(x)$ функциясе өчен графигы M ноктасы аша үтүче башлангыч функцияне табыгыз:

а) $f(x) = (2-3x)^2$, $M(1; 2)$; б) $f(x) = \sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{4}; -2\right)$;

в) $f(x) = \sqrt{2}\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$; г) $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $M(0; 3)$.

4. **1) Нинди фигураны кәкресызыклы трапеция дип атыйлар? Кәкресызыклы трапециянең мәйданын исәпләү өчен, формула языгыз.**

2) Кәкресызыклы трапециягә мисаллар китерегез.

3) Бирелгән сызыклар белән чикләнгән кәкресызыклы трапецияне сурәтләгез һәм аның мәйданын табыгыз:

а) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$; б) $y = -x^3$, $y = 0$, $x = -2$;

в) $y = (x-1)^2$, $y = 0$, $x = 3$;

г) $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$.

5. **1) Интегралның нәрсә икәнен аңлатыгыз.**

2) Ньютон — Лейбниц формуласын языгыз. Интегралны исәпләгез:

а) $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{(x+10)^2}$; б) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; в) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\, dx$; г) $\int_{0}^{3} x^2 dx$.

3) Түбәндәге сызыклар белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз:

а) $y = x^2$, $y = 3x$; б) $y = x^2 - 4x + 6$, $y = 1$, $x = 1$, $x = 3$;

в) $y = 4 - x^2$, $y = 3$; г) $y = \cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

IV бүлек

Күрсәткечле һәм логарифмик функцияләр

§ 9. Дәрәҗә төшенчәсен гомумиләштерү

32. n нчы дәрәҗә тамыр һәм аның үзлекләре

1. Тамырны билгеләү. a санынная квадрат тамыр төшенчәсе сезгә таныш инде: бу — квадраты a га тигез сан. a санынная n нчы дәрәҗә тамыр да моңа охшаш рәвештә билгеләнә, биредә n саны — ирекле натураль сан.

> Билгеләмә. **n нчы дәрәҗәсе a га тигез булган сан a санынная n нчы *дәрәҗә тамыр* дип атала.**

1 нче мисал. 27 санынная өченче дәрәҗә тамыр 3 кә тигез, чөнки $3^3 = 27$. 2 һәм −2 саннары 64 санынная алтынчы дәрәҗә тамыр була, чөнки $2^6 = 64$ һәм $(-2)^6 = 64$.

Әлеге билгеләмә буенча a санынная n нчы дәрәҗә тамыр — $x^n = a$ тигезләмәсенең ирекле чишелеше. Бу тигезләмәнең тамырлары саны n һәм a га бәйле. $f(x) = x^n$ функциясен тикшерик. Билгеле булганча, $[0; \infty)$ аралыкта бу функция теләсә нинди n өчен үсә һәм $[0; \infty)$ аралыктагы барлык кыйммәтләрне ала. Тамыр турындагы теорема буенча (8 нче пункт), теләсә нинди $a \in [0; \infty)$ өчен $x^n = a$ тигезләмәсенең тискәре булмаган, өстәвенә *бердәнбер* тамыры була. Аны *a санынная n нчы дәрәҗә арифметик тамыр* дип атыйлар һәм $\sqrt[n]{a}$ дип тамгалыйлар; n санын *тамыр күрсәткече* дип, a санын *тамырасты аңлатмасы* дип атыйлар. Тамыр тамгасы $\sqrt{\ }$ *радикал* дип атала.

> Билгеләмә. **n нчы дәрәҗәсе a га тигез тискәре булмаган сан a санынная n нчы *дәрәҗә арифметик тамыр* дип атала.**

2 нче мисал. а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$ кыйммәтен табабыз.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, чөнки $2^3 = 8$ һәм $2 > 0$;

б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2}$, чөнки $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$ һәм $\frac{3}{2} > 0$.

n җөп булганда, $f(x) = x^n$ функциясе җөп була. Моннан, әгәр $a > 0$ булса, ул вакытта $x^n = a$ тигезләмәсенең $x_1 = \sqrt[n]{a}$ тамырыннан тыш, $x_2 = -\sqrt[n]{a}$ тамыры була. Әгәр $a = 0$ булса, бер тамыр: $x = 0$; әгәр $a < 0$ булса, бу тигезләмәнең тамырлары булмый, чөнки теләсә нинди санның җөп дәрәҗәсе — тискәре булмаган сан.

Шулай итеп, n җөп булмаганда, теләсә нинди уңай a саныннан n нчы дәрәҗә ике тамыр бар; 0 саныннан n нчы дәрәҗә тамыр нульгә тигез; тискәре саннан җөп дәрәҗә тамыр булмый.

3 нче мисал. $x^4 = 81$ тигезләмәсенең ике тамыры бар: бу 3 һәм -3 саннары. Шулай итеп, 81 дән дүртенче дәрәҗә ике тамыр бар. Бу вакытта $\sqrt[4]{81}$ — тискәре булмаган сан, ягъни $\sqrt[4]{81} = 3$, ә $-3 = -\sqrt[4]{81}$.

4 нче мисал. $x^4 = 3$ тигезләмәсенең уңай тамыры $\sqrt[4]{3}$ саны. Бу — иррациональ сан ($-\sqrt[4]{3}$ саны кебек). Аның унарлы тамгаларын бер-бер артлы исәпләп чыгарырга мөмкин:

$$1 < \sqrt[4]{3} < 2, \text{ чөнки } 1^4 < 3 < 2^4;$$

$$1{,}3 < \sqrt[4]{3} < 1{,}4, \text{ чөнки } 1{,}3^4 < 3 < 1{,}4^4 \text{ һ.б.}$$

($\sqrt[4]{3} = 1{,}31607...$ икәненә ышаныгыз).

n ның так кыйммәтләре өчен $f(x) = x^n$ функциясе барлык санлы турыда үсә; барлык реаль саннар күплеге — аның кыйммәтләре өлкәсе. Тамыр турындагы теореманы кулланып, $x^n = a$ тигезләмәсе a теләсә нинди һәм, аерым алганда, $a < 0$ булганда да, төгәл бер тамырга ия була. Бу тамырны a ның теләсә нинди кыйммәте өчен (шул исәптән һәм тискәре a өчен) $\sqrt[n]{a}$ дип тамгалыйлар.

Шулай итеп, n так булганда, теләсә нинди a саныннан n нчы дәрәҗә тамыр бар, һәм ул бердәнбер.

Так дәрәҗәдәге тамырлар өчен

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

тигезлеге дөрес.

Чынлыкта исә

$$(-\sqrt[n]{a})^n = (-1)^n \cdot (\sqrt[n]{a})^n = -1 \cdot a = -a,$$

ягъни $-\sqrt[n]{a}$ саны $-a$ саныннан n нчы дәрәҗә тамыр ул. n так булганда, мондый тамыр бердәнбер. Димәк, $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ (n так булганда) тигезлеге тискәре саннан так дәрәҗәдәге тамырны шул ук дәрәҗәдәге арифметик тамыр аша аңлатырга мөмкинлек бирә. Мәсәлән, $\sqrt[5]{-71} = -\sqrt[5]{71}$, $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$.

1 нче искәрмә. Теләсә нинди x өчен

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} n \text{ җөп булса, } |x|; \\ n \text{ так булса, } x \text{ була.} \end{cases}$$

(Бу үзлекне үзегез исбатлагыз.)

2 нче искәрмә. a санынннан беренче дәрәҗә тамыр a га тигез дип әйтү җайлы. Белгәнегезчә, саннан икенче дәрәҗә тамырны *квадрат тамыр* дип атыйлар, ә язган вакытта тамыр күрсәткече 2 не төшереп калдыралар (мәсәлән, 7 дән квадрат тамырны гади генә $\sqrt{7}$ дип тамгалыйлар). Өченче дәрәҗә тамырны *куб тамыр* дип атыйлар.

5 нче мисал. а) $x^5 = -11$; б) $x^8 = 7$ тигезләмәләрен чишәбез.

а) n нчы дәрәҗә тамырның билгеләмәсе буенча x саны -11 дән бишенче дәрәҗә тамыр. Тамыр күрсәткече — так 5 саны, шуңа күрә мондый тамыр бар, һәм ул бердәнбер: $\sqrt[5]{-11}$.

Җавапны болай язалар: $x = -\sqrt[5]{11}$.

б) n нчы дәрәҗә тамыр билгеләмәсе буенча $x^8 = 7$ тигезләмәсенең чишелеше $\sqrt[8]{7}$ саны була. 8 саны җөп булганга күрә, $-\sqrt[8]{7}$ шулай ук бирелгән тигезләмәнең чишелеше була. Шулай итеп, $x_1 = \sqrt[8]{7}$, $x_2 = -\sqrt[8]{7}$. **Җавапны** болай язарга мөмкин: $x = \pm\sqrt[8]{7}$.

2. Тамырларның төп үзлекләре. n нчы дәрәҗә арифметик тамырларның сезгә билгеле үзлекләрен исегезгә төшерик.

Теләсә нинди натураль сан n, бөтен k өчен һәм теләсә нинди тискәре булмаган a һәм b саннары өчен түбәндәге тигезлекләр үтәлә:

1°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

2°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$.

3°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ $(k > 0)$.

4°. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ $(k > 0)$.

5°. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ (әгәр $k \leqslant 0$ булса, ул вакытта $a \neq 0$).

1° үзлеген исбатлыйк. Билгеләмә буенча $\sqrt[n]{ab}$ — n нчы дәрәҗәсе ab га тигез булган тискәре булмаган сан.

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ саны — тискәре булмаган сан. Шуңа күрә натураль күрсәткечле дәрәҗә үзлегеннән һәм n нчы дәрәҗә тамыр билгеләмә-

сеннән $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n = ab$ тигезлегенең дөреслеген тикшерү дә җитә: $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n = ab$.

Түбәндәге өч үзлек моңа охшаш рәвештә исбатлана:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geqslant 0 \text{ һәм } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0 \text{ һәм } \left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = (\sqrt[k]{a})^k = a;$$

$$\sqrt[n]{a} \geqslant 0 \text{ һәм } (\sqrt[n]{a})^{nk} = ((\sqrt[n]{a})^n)^k = a^k.$$

Хәзер 5° үзлеген исбатлыйк. $(\sqrt[n]{a})^k$ санының n нчы дәрәҗәсе a^k га тигез икәнен искәртик:

$$((\sqrt[n]{a})^k)^n = (\sqrt[n]{a})^{nk} = ((\sqrt[n]{a})^n)^k = a^k.$$

Арифметик тамырның билгеләмәсе буенча $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$ (чөнки $(\sqrt[n]{a})^k \geqslant 0$).

Тамырлар кергән санлы аңлатмаларның рәвешләрен үзгәртүгә мәсьәләләр чишкәндә, 1°—5° үзлекләрен куллануга мисаллар китерик.

6 нчы мисал. Аңлатмаларның рәвешләрен үзгәртик:

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$; г) $\sqrt[21]{128}$; д) $\sqrt[7]{128^3}$.

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8\cdot 4} = \sqrt[5]{32} = 2$ (1° үзлек);

б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$ (2° үзлек);

в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$ (3° үзлек);

г) $\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[3]{2}$ (4° үзлек);

д) 5° үзлекне кулланып табабыз: $\sqrt[7]{128^3} = (\sqrt[7]{128})^3 = 2^3 = 8$.

Арифметик тамырның түбәндәге үзлеген исбатлыйк.

> 6°. $0 \leqslant a < b$ булган теләсә нинди a һәм b саннары өчен
> $$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$
> тигезсезлеге үтәлә.

Исбатлауны киресеннән чыгып башкарабыз. $\sqrt[n]{a} \geqslant \sqrt[n]{b}$ булсын. Ул вакытта натураль күрсәткечле дәрәҗәләрнең үзлеге буенча $(\sqrt[n]{a})^n \geqslant (\sqrt[n]{b})^n$, ягъни $a \geqslant b$ була. Бу $a < b$ шартына каршы килә.

7 нче мисал. $\sqrt[3]{2}$ һәм $\sqrt[5]{3}$ саннарын чагыштырыйк.

$\sqrt[3]{2}$ һәм $\sqrt[5]{3}$ не бердәй күрсәткечле тамырлар рәвешенә китерик: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{32}$, ә $\sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{27}$ (бу вакытта без 4° үзлектән файдаландык). $32 > 27$ тигезсезлегеннән һәм 6° үзлектән $\sqrt[15]{32} > \sqrt[15]{27}$ икәне күренә, һәм, димәк, $\sqrt[3]{2} > \sqrt[5]{3}$ була.

8 нче мисал. $x^6 > 20$ тигезсезлеген чишик.

Бу тигезсезлек $x^6 - 20 > 0$ тигезсезлегенә тамырдаш. $f(x) = x^6 - 20$ функциясе өзлексез булганлыктан, интерваллар методыннан файдаланырга мөмкин. $x^6 - 20 = 0$ тигезләмәсенең ике тамыры бар: $\sqrt[6]{20}$ һәм $-\sqrt[6]{20}$. Бу саннар турыны өч аралыкка бүләләр. Бирелгән тигезсезлекнең чишелеше — аларның икесенең берләшмәсе: $(-\infty; -\sqrt[6]{20})$ һәм $(\sqrt[6]{20}; \infty)$.

Күнегүләр

Тигезлекнең дөреслеген тикшерегез (381—382).

381. а) $\sqrt[4]{16} = 2$; б) $\sqrt[7]{-1} = -1$;

в) $\sqrt[10]{1024} = 2$; г) $\sqrt[5]{-243} = -3$.

382. а) $\sqrt[17]{1} = 1$; б) $\sqrt[6]{64} = 2$; в) $\sqrt[3]{-343} = -7$; г) $\sqrt[19]{0} = 0$.

Исәпләп чыгарыгыз (383—384).

383. а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{-32}$; г) $\sqrt[3]{64}$.

384. а) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$; в) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$.

Тигезләмәләрне чишегез (385—388).

385. а) $x^3 + 4 = 0$; б) $x^6 = 5$; в) $x^3 = 4$; г) $x^4 = 10$.

386. а) $x^{10} - 15 = 0$; б) $x^7 + 128 = 0$; в) $x^6 - 64 = 0$; г) $x^5 = 3$.

387. а) $16x^4 - 1 = 0$; б) $0{,}01x^3 + 10 = 0$;

в) $0{,}02x^6 - 1{,}28 = 0$; г) $12\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0$.

388. а) $\sqrt[3]{x} = -0{,}6$; б) $\sqrt[4]{x} = 3$; в) $\sqrt{x} = 5$; г) $\sqrt[7]{x} = -1$.

Санлы аңлатманың кыйммәтен табыгыз (389—394).

389. а) $(-\sqrt[4]{11})^4$; б) $(2\sqrt[5]{-2})^5$; в) $(\sqrt[3]{7})^3$; г) $(-\sqrt[6]{2})^6$.

390. а) $\sqrt[4]{16\cdot625}$; б) $\sqrt[5]{32\cdot243}$; в) $\sqrt[3]{8\cdot343}$; г) $\sqrt[4]{0{,}0001\cdot16}$.

391. а) $\sqrt[5]{160\cdot625}$; б) $\sqrt[3]{24\cdot9}$; в) $\sqrt[4]{48\cdot27}$; г) $\sqrt[3]{75\cdot45}$.

392. а) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}$; б) $\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[7]{-8}$; в) $\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}$; г) $\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[6]{25}$.

393. а) $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$; г) $\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}}$.

394. а) $\sqrt[6]{\frac{64}{100000000}}\cdot\sqrt[4]{39\frac{1}{16}}:\sqrt[3]{-3\frac{19}{27}}$;

б) $\sqrt[5]{1\frac{11}{16}\cdot4{,}5}-\frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}}$; в) $\sqrt[5]{-\frac{243}{1024}}\cdot\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$;

г) $\sqrt[4]{3\frac{3}{8}\cdot1\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}$.

395. Түбәндәге саннарның беренче ике унынчы тамгасын (өтердән соң) табыгыз:

а) $\sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt[3]{3}$.

Таблицалардан яки калькулятордан файдаланып, 0,01 гә кадәр төгәллек белән тамырның якынча кыйммәтен табыгыз (396—397).

396. а) $\sqrt[3]{10{,}17}$; б) $\sqrt{71}$; в) $\sqrt{13{,}21}$; г) $\sqrt[3]{11}$.

397. а) $\sqrt[4]{13{,}7}$; б) $\sqrt[5]{10}$; в) $\sqrt[4]{2{,}8}$; г) $\sqrt[5]{13}$.

Саннарны чагыштырыгыз (398—401).

398. а) $\sqrt[5]{0{,}2}$ һәм 0; б) $\sqrt[10]{0{,}4}$ һәм $\sqrt[10]{\frac{5}{12}}$;

в) $\sqrt[7]{1{,}8}$ һәм 1; г) $\sqrt[4]{0{,}2}$ һәм $\sqrt[4]{0{,}3}$.

399. а) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ һәм $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2$; б) $\sqrt[10]{\frac{3}{7}}$ һәм $\sqrt[15]{0{,}43}$;

в) $\sqrt[3]{2}$ һәм $\sqrt[5]{3}$; г) $\sqrt[10]{0{,}8}$ һәм 1.

400. а) $\sqrt{0{,}3}$ һәм $\sqrt[3]{0{,}05}$; б) $\sqrt[5]{4}$ һәм $\sqrt[6]{8}$;

в) $\sqrt[3]{7}$ һәм $\sqrt[6]{40}$; г) $\sqrt{5}$ һәм $\sqrt[6]{500}$.

401. а) $\sqrt[3]{-0,4}$ həм $\sqrt[5]{-0,3}$; б) $\sqrt[5]{-5}$ həм $\sqrt[3]{-3}$;

в) $\sqrt[3]{-2}$ həм $\sqrt[5]{-4}$; г) $\sqrt[3]{-5}$ həм $\sqrt[5]{-3}$.

402. Тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгарыгыз ($a > 0$, $b > 0$):

а) $\sqrt[6]{64a^8b^{13}}$; б) $\sqrt[5]{-128a^7}$; в) $\sqrt[4]{6a^{12}b^6}$; г) $\sqrt[3]{54a^{10}}$.

403. Тапкырлаучыны тамыр тамгасы эченə кертегез ($a > 0$, $b > 0$):

а) $-b\sqrt[4]{3}$; б) $ab\sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}}$; в) $a\sqrt[4]{7}$; г) $-ab\sqrt[3]{-4}$.

a ның кыйммəтлəре нинди булганда тигезлек дөрес (404—405)?

404. а) $\sqrt{a^2} = -a$; б) $\sqrt[3]{a^3} = a$; в) $\sqrt[8]{a^8} = |a|$; г) $\sqrt[4]{a^4} = a$.

405. а) $\sqrt[5]{a^5} = -a$; б) $\sqrt[6]{a^6} = -a$; в) $\sqrt[4]{a^4} = |a|$; г) $\sqrt[7]{a^7} = a$.

Аңлатманы ваклаучысында тамыр тамгасы булмаган рəвешкə китерегез (406—407).

406. а) $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; б) $\frac{a-\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}$.

407. а) $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; в) $\frac{4}{x\sqrt[4]{4}}$; г) $\frac{5}{3\sqrt[5]{5}}$.

Санлы аңлатманы $a\sqrt[n]{b}$ рəвешенə китерегез, биредə a — рациональ сан, ə b — натураль сан (408—409).

408. а) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; б) $\frac{6}{\sqrt[3]{27\cdot 25}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[4]{12}}$; г) $\frac{10}{\sqrt[5]{8}}$.

409. а) $\sqrt[12]{25^3}$; б) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{2}}$; в) $\sqrt[8]{\frac{16^3}{81}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{1}{4}\sqrt[3]{5}}$.

410. Тигезлəмəне алмаштырып кую юлы белəн чишегез $t = \sqrt[3]{x}$ яки $t = \sqrt[6]{x}$:

а) $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$; б) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 2$;

в) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0$; г) $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} = 6$.

Тигезсезлекне чишегез (411—412).

411. а) $x^4 < 3$; б) $x^{11} \geqslant 7$; в) $x^{10} > 2$; г) $x^3 \leqslant 5$.

412. а) $\sqrt[11]{x} < -7$; б) $\sqrt[6]{x} \geqslant 2$; в) $\sqrt[3]{x} > 2$; г) $\sqrt[4]{x} \leqslant 3$.

Аңлатманы гадиләштерегез (413—414).

413.— а) $\sqrt[6]{a^6}$, биредә $a \leqslant 0$; б) $\sqrt[4]{a^4}$, биредә $a \geqslant 0$; в) $\sqrt[5]{a^5}$.

414.— а) $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt{a^2}$, биредә $a \leqslant 0$; б) $\sqrt[4]{a^4} + 2\sqrt[7]{a^7}$, биредә $a \geqslant 0$;

в) $\sqrt[5]{a^5} - \sqrt[6]{a^6}$, биредә $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[8]{a^8} + 3\sqrt[5]{a^5}$, биредә $a \leqslant 0$;

415.— Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10-\sqrt{73}}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}} + \sqrt{17}$;

в) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$; г) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}$.

416.— Аңлатманы ваклаучысында радикал булмаган вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$; б) $\dfrac{2}{a-\sqrt[3]{b}}$; в) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}$; г) $\dfrac{3a}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

33. Иррациональ тигезләмәләр

Үзгәрешлесе тамыр тамгасы астында булган тигезләмәләрне *иррациональ тигезләмәләр* дип атыйлар. Мәсәлән, $\sqrt[3]{x} - 2 = 0$. Иррациональ тигезләмәләрне чишүгә мисаллар китерик.

1 нче мисал. $\sqrt{x^2 - 5} = 2$ тигезләмәсен чишик.

Бу тигезләмәнең ике кисәген дә квадратка күтәреп, $x^2 - 5 = 4$ не табабыз.

Моннан $x^2 = 9$, ягъни $x = 3$ яки $x = -3$ табылыр.

Табылган саннар (1) тигезләмәнең чишелешләре буламы икәнен тикшерик. Чыннан да, ул саннарны тигезләмәгә куйганда, дөрес тигезлекләр килеп чыга:

$$\sqrt{3^2 - 5} = 2 \text{ һәм } \sqrt{(-3)^2 - 5} = 2.$$

Димәк, $x = 3$ һәм $x = -3$ тигезләмәнең чишелеше икән.

2 нче мисал. $\sqrt{x} = x - 2$ тигезләмәсен чишик.

Тигезләмәнең ике кисәген дә квадратка күтәреп табабыз: $x = x^2 - 4x + 4$. Гадиләштерүдән соң $x^2 - 5x + 4 = 0$ квадрат тигезләмәсе килеп чыга, аның тамырлары $x = 1$ һәм $x = 4$. Табылган саннар бирелгән тигезләмәнең чишелешеме икәнен тикшерик. 4 санын тигезләмәгә куйганда, $\sqrt{4} = 4 - 2$ дөрес тигезлеген табабыз, ягъни 4 — бирелгән тигезләмәнең чишелеше була. 1 санын куйганда исә, уң кисәктә -1, ә сул кисәктә 1 саны килеп чыга. Димәк, 1 саны тигезләмәнең чишелеше була алмый, аны бирелгән тигезләмәне әлеге ысул белән чишү нәтиҗәсендә табылган *чит тамыр* дип әйтү кабул ителгән. **Җавап:** $x = 4$.

Күргәнебезчә, иррациональ тигезләмәләрне чишкәндә табылган чишелешләрне тикшерү таләп ителә, мәсәлән, дөрес булмаган тигезлекне квадратка күтәрү дөрес тигезлек бирергә мөмкин. Чыннан да, дөрес булмаган $1 = -1$ тигезлеген квадратка күтәрү дөрес тигезлек бирә: $1^2 = (-1)^2$.

3 нче мисал. $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x}$ тигезләмәсен чишик. Бу тигезләмәнең ике кисәген дә квадратка күтәрик: $x^2 - 2 = x$. Гадиләштерүләрдән соң $x^2 - x - 2 = 0$ тигезләмәсен табабыз, аның тамырлары $x = -1$ һәм $x = 2$. -1 саны тигезләмәнең тамыры түгеллеге үзеннән-үзе аңлашыла, чөнки $x = -1$ булганда, бу тигезләмәнең ике кисәге дә билгеләнми. Тигезләмәгә 2 санын куйганда, $\sqrt{2^2 - 2} = \sqrt{2}$ дөрес тигезлеген табабыз. Шулай булгач, бары тик 2 саны гына бирелгән тигезләмәнең чишелеше була.

4 нче мисал. $\sqrt{x - 6} = \sqrt{4 - x}$ тигезләмәсен чишик.

Бу тигезләмәнең ике кисәген дә квадратка күтәреп, $x - 6 = 4 - x$, $2x = 10$ һәм $x = 5$ не табабыз. Куеп карау юлы белән 5 санының бирелгән тигезләмәнең тамыры түгеллегенә ышанабыз. Шуңа күрә аның чишелешләре юк.

Кайвакыт иррациональ тигезләмәләрне тигезкөчле күчешләрдән файдаланып чишү уңайрак була.

5 нче мисал. $\sqrt{x - 2} = x - 8$ тигезләмәсен чишәбез.

Билгеләмә буенча $\sqrt{x - 2}$ — квадраты тамырасты аңлатмасына тигез булган тискәре булмаган сан. Башка сүзләр белән әйткәндә, $\sqrt{x - 2} = x - 8$ тигезләмәсе

$$\begin{cases} x - 2 = (x - 8)^2, \\ x - 8 \geqslant 0 \end{cases}$$

системасына тигезкөчле. Системаның $x^2 - 17x + 66 = 0$ тигезләмәсенә тигезкөчле беренче тигезләмәсен чишеп, 11 һәм 6 тамырларын табабыз, әмма $x - 8 \geqslant 0$ шарты бары тик $x = 11$ өчен генә үтәлә. Шуңа күрә бирелгән тигезләмәнең бер тамыры бар: $x = 11$.

6 нчы мисал. $x - 1 = \sqrt[3]{x^2 - x - 1}$ тигезләмәсен чишәбез.

Моннан алда тикшерелгән мисаллардан аермалы буларак, әлеге иррациональ тигезләмәдә квадрат тамыр түгел, ә өченче дәрәҗә тамыр. Шуңа күрә, «радикалдан котылу өчен», тигезләмәнең ике кисәген дә квадратка түгел, ә кубка күтәрергә кирәк: $(x - 1)^3 = x^2 - x - 1$. Рәвешүзгәртүләрдән соң табабыз:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - x - 1,$$
$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0,$$
$$x(x - 2)^2 = 0.$$

Шулай итеп, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

7 нче мисал. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28 \end{cases}$ тигезләмәләр системасын чишәбез.

$u = \sqrt[3]{x}$ һәм $v = \sqrt[3]{y}$ дип алып,

$$\begin{cases} u + v = 4, \\ u^3 + v^3 = 28 \end{cases}$$

системасын табабыз.

Икенче тигезләмәнең сул кисәген тапкырлаучыларга таркатабыз: $u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$ һәм аңа беренче тигезләмәдән $u + v = 4$ не куябыз. Ул вакытта икенче тигезләмәгә тигезкөчле

$$\begin{cases} u + v = 4, \\ u^2 - uv + v^2 = 7 \end{cases}$$

системасын табабыз.

Беренче тигезләмәдән табылган v ның ($v = 4 - u$) кыйммәтен икенче тигезләмәгә куеп,

$$u^2 - u(4 - u) + (4 - u)^2 = 7, \text{ ягъни } u^2 - 4u + 3 = 0$$

тигезләмәсен табабыз.

Табылган квадрат тигезләмәнең ике тамыры бар: $u_1 = 1$ һәм $u_2 = 3$. v ның тиңдәш кыйммәтләре: $v_1 = 3$ һәм $v_2 = 1$. x һәм y үзгәрешлеләренә күчеп табабыз:

$\sqrt[3]{x} = u_1$, ягъни $x_1 = u_1^3 = 1$; $y_1 = v_1^3 = 27$; $x_2 = u_2^3 = 27$; $y_2 = v_2^3 = 1$.

Җавап: (1; 27); (27; 1).

Күнегүләр

Тигезләмәне чишегез (417—420).

417. а) $\sqrt{x^4 + 19} = 10$; б) $\sqrt[3]{x^2 - 28} = 2$;
в) $\sqrt{61 - x^2} = 5$; г) $\sqrt[3]{x - 9} = -3$.

418. а) $\sqrt{x + 1} = x - 5$; б) $x + \sqrt{2x + 3} = 6$;
в) $\sqrt{2x - 1} = x - 2$; г) $3 + \sqrt{3x + 1} = x$.

419. а) $\sqrt{2x + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$; б) $\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - x - 3}$;
в) $\sqrt{x + 2} = \sqrt{2x - 3}$; г) $\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{x + 9}$.

420. а) $x = \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 6x + 8}$; б) $x - 2 = \sqrt[3]{x^2 - 8}$;
в) $x = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - 8x + 20}$; г) $x + 1 = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}$.

421.— Тигезләмәләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{y} = 1, \\ 3\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 2\sqrt{2}, \\ 2\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[4]{y} = 8\sqrt{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 7, \\ 4\sqrt[4]{y} - 3\sqrt[4]{x} = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5\sqrt{5}, \\ 5\sqrt{y} - 2\sqrt{x} = \sqrt{5}. \end{cases}$

Тигезләмәләрне чишегез (422—425).

422.— а) $\sqrt{x+1}\,\sqrt{x+6} = 6;$ б) $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{x-1};$

в) $\frac{x+6}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{3x+2};$ г) $\sqrt{x}\,\sqrt{2-x} = 2x.$

423.— а) $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x+3}} = 3;$ б) $\sqrt{\sqrt{x^2-16} + x} = 2;$

в) $\sqrt{18 - \sqrt[3]{x+10}} = 4;$ г) $\sqrt{x - \sqrt{x^2-5}} = 1.$

424.— а) $\sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-4};$ б) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2;$

в) $2 + \sqrt{10-x} = \sqrt{22-x};$ г) $\sqrt{1-2x} - 3 = \sqrt{16+x}.$

425.— а) $\sqrt{x-3} - 6 = \sqrt[4]{x-3};$ б) $\sqrt[3]{x+1} + 2\sqrt[6]{x+1} = 3;$

в) $\sqrt[4]{x-5} = 30 - \sqrt{x-5};$ г) $3\sqrt[10]{x^2-3} + \sqrt[5]{x^2-3} = 4.$

Тигезләмәләр системасын чишегез (426—427).

426.— а) $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{x}\,\sqrt{y} = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{6+x} - 3\sqrt{3y+4} = -10, \\ 4\sqrt{3y+4} - 5\sqrt{6+x} = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 10, \\ \sqrt{x}\,\sqrt{y} = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2} + \sqrt{5y+1} = 8, \\ 3\sqrt{x-2} - 2\sqrt{5y+1} = -2. \end{cases}$

427.— а) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ x - y = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ xy = 216; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ x - y = 32; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27. \end{cases}$

34. Рациональ күрсәткечле дәрәҗә

Сезгә бөтен күрсәткечле дәрәҗә төшенчәсе таныш инде. a^n аңлатмасы, $n \leq 0$ булганда, $a = 0$ очрагыннан тыш, барлык a һәм n өчен билгеләнгән. Мондый дәрәҗәләрнең үзлекләрен исегезгә төшерәбез.

Теләсә нинди a, b саннары һәм теләсә нинди бөтен m һәм n саннары өчен түбәндәге тигезлекләр дөрес:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ a^m : a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0);$$
$$(a^m)^n = a^{mn};$$
$$(ab)^n = a^n \cdot b^n;\ (b \neq 0);$$
$$a^1 = a;\ \ a^0 = 1\ (a \neq 0).$$

Шулай ук түбәндәге үзлекне дә билгеләп үтик.

Әгәр $m > n$ булса, $a > 1$ булганда, $a^m > a^n$ була, һәм, $0 < a < 1$ булганда, $a^m < a^n$ була.

Әлеге пунктта без, $2^{0,3}$, $8^{\frac{5}{7}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$ һ.б. төрдәге аңлатмаларга мәгънә биреп, санның дәрәҗәсе төшенчәсен гомумиләштерербез. Бу вакытта рациональ күрсәткечле дәрәҗәләр бөтен күрсәткечле дәрәҗә үзлекләренә (я булмаса аларның кайберләренә) ия булырлык билгеләмә бирү табигый. Ул вакытта, аерым алганда, $a^{\frac{m}{n}}$ санының n нчы дәрәҗәсе a^m нчы дәрәҗәсенә тигез булырга тиеш. Чыннан да, әгәр $(a^p)^q = a^{pq}$ үзлеге үтәлсә,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m$$

үзлеге дә үтәлә.

Соңгы тигезлек (n нчы дәрәҗә тамырның билгеләмәсе буенча) $a^{\frac{m}{n}}$ санының a^m саныннан n нчы дәрәҗә тамыр икәнен аңлата. Шулай итеп, түбәндәге билгеләмәгә киләбез.

Билгеләмә. *$\sqrt[n]{a^m}$ саны $r = \frac{m}{n}$ рациональ күрсәткечле $a > 0$ санының дәрәҗәсе* дип атала, биредә m — бөтен сан, ә n — натураль сан ($n > 1$).

Шулай итеп, билгеләмә буенча

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

0 санының дәрәҗәсе бары тик уңай күрсәткечләр өчен генә билгеләнә: теләсә нинди $r > 0$ өчен билгеләмә буенча $0^r = 0$.

1 нче мисал. Рациональ күрсәткечле дәрәҗәнең билгеләмәсе буенча

$$7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}; \ 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}; \ a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}}.$$

2 нче мисал. $7^{\frac{1}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$ һәм $128^{-\frac{2}{7}}$ санлы аңлатмаларының кыйммәтләрен табабыз.

Күрсәткечле дәрәҗә билгеләмәсеннән һәм тамыр үзлекләреннән файдаланып табабыз: $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$, $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$, $128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = (\sqrt[7]{128})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

1 нче искәрмә. Күрсәткечле дәрәҗә билгеләмәсеннән теләсә нинди уңай a өчен һәм теләсә нинди рациональ r өчен a^r саны уңай икәне шунда ук килеп чыга.

2 нче искәрмә. Теләсә нинди рациональ санны вакланма рәвешендә төрлечә язарга мөмкин, чөнки теләсә нинди натураль k өчен $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$. a^r нең кыйммәте шулай ук рациональ r санын язу формасына бәйле түгел. Чынлыкта исә тамырлар үзлегеннән $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ икәне килеп чыга.

3 нче искәрмә. $a < 0$ булганда, a санының рациональ дәрәҗәсе билгеләнми, бу очраклы түгел. Әгәр дә без (1) формуланы $a < 0$ өчен дә дөрес дип уйласак, ул вакытта, мәсәлән, $(-8)^{\frac{1}{3}}$ нең кыйммәте $\sqrt[3]{-8}$ гә, ягъни -2 гә тигез булыр иде. Ә икенче яктан, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, һәм шуңа күрә $-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = 2$ тигезлеге үтәлергә тиеш. Хәзер югарыда рациональ күрсәткечле дәрәҗә өчен әйтелгән билгеләмәдә бөтен күрсәткечләр өчен дөрес булган дәрәҗәнең төп үзлекләре саклана (аерма бары тик шунда: моннан соң китерелә торган үзлекләр уңай нигезләр өчен генә дөрес).

Теләсә нинди рациональ сан r һәм s өчен һәм теләсә нинди уңай a һәм b өчен түбәндәге тигезлекләр дөрес:

1°. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.
2°. $a^r : a^s = a^{r-s}$.
3°. $(a^r)^s = a^{rs}$.
4°. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$.
5°. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Бу үзлекләрне исбатлау өчен, рациональ күрсәткечле дәрәҗә билгеләмәсеннән һәм 32 нче пунктта исбатланган тамыр үзлекләреннән файдаланырга кирәк. Әйтик, 1^0, 3^0 һәм 4^0 үзлекләрен исбатлыйк. $r = \frac{m}{n}$ һәм $s = \frac{p}{q}$ булсын, биредә n һәм q — натураль саннар, ә m һәм p — бөтен саннар. Ул вакытта:

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{r+s};$$

$$(a^r)^s = \sqrt[q]{(a^r)^p} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{rs};$$

$$(ab)^r = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^r \cdot b^r.$$

2^0 һәм 5^0 үзлекләр моңа охшаш рәвештә исбатлана (мөстәкыйль рәвештә фикер йөртегез).

3 нче мисал. $\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}}$ аңлатмасының кыйммәтен табабыз. Ул вакытта:

$$\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 5} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 2^1 \cdot 5^1 = 10.$$

4 нче мисал. а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{a^{1,2} - b^{2,1}}{a^{0,8} + a^{0,4}b^{0,7} + b^{1,4}}$ аңлатмаларының рәвешен үзгәртәбез.

Табабыз:

а) $$\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}};$$

б) $$\frac{a^{1,2} - b^{2,1}}{a^{0,8} + a^{0,4}b^{0,7} + b^{1,4}} = \frac{(a^{0,4})^3 - (b^{0,7})^3}{(a^{0,4})^2 + a^{0,4}b^{0,7} + (b^{0,7})^2} = a^{0,4} - b^{0,7}.$$

Рациональ күрсәткечле дәрәҗәнең түбәндәге ике үзлеген билгеләп үтик.

> 6^0. r — рациональ сан һәм $0 < a < b$ булсын. Ул вакытта
>
> $r > 0$ булганда, $a^r < b^r$,
> $r < 0$ булганда, $a^r > b^r$ була.
>
> 7^0. Теләсә нинди r һәм s рациональ саннары өчен $r > s$ тигезсезлегеннән
>
> $a > 1$ булганда, $a^r > a^s$,
> $0 < a < 1$ булганда, $a^r < a^s$ икәне чыга.

6^0 үзлекне исбатлыйк. Әгәр $r > 0$ булса, ул вакытта r ны $r = \frac{m}{n}$ рәвешендә язарга мөмкин, биредә m һәм n — натураль саннар. $0 < a < b$ тигезсезлегеннән һәм бөтен күрсәткечле дәрәҗә

үзлегеннән $a^m < b^m$ икәне чыга. Тамырлар үзлеге буенча (32 нче пункт, 6° үзлек) бу тигезсезлектән табабыз: $\sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{b^m}$, ягъни $a^r < b^r$.

$r < 0$ очрагында шушыңа охшаш фикер йөртәбез.

7° үзлекне исбатлау өчен, башта r һәм s рациональ саннарын уртак ваклаучыга китерәбез: $r = \frac{m}{n}$ һәм $s = \frac{p}{n}$, биредә n — натураль сан, ә m һәм p — бөтен саннар. $r > s$ тигезсезлегеннән $m > p$ икәне килеп чыга. Әгәр $a > 1$ булса, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} > 1$ була һәм бөтен күрсәткечле дәрәҗә үзлеге буенча $(a^{\frac{1}{n}})^m > (a^{\frac{1}{n}})^p$.

$(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = a^r$ һәм $(a^{\frac{1}{n}})^p = a^{\frac{p}{n}} = a^s$ икәне аңлашыла.

$0 < a < 1$ очрагы моңа охшаш рәвештә тикшерелә.

5 нче мисал. $\sqrt[5]{8}$ һәм $2^{\frac{2}{3}}$ саннарын чагыштырыйк.

$\sqrt[5]{8}$ ны рациональ күрсәткечле дәрәҗә рәвешендә язабыз: $\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}$. 7° үзлек буенча $2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{3}{5}}$ була, чөнки $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.

6 нчы мисал. 2^{300} һәм 3^{200} саннарын чагыштырыйк.

Бу саннарны бердәй күрсәткечле дәрәҗәләр рәвешендә языйк:

$$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100};\ 3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}.$$

$8 < 9$ булганлыктан, 6° үзлек буенча табабыз:

$$8^{100} < 9^{100},\ \text{ягъни}\ 2^{300} < 3^{200}.$$

Күнегүләр

428. Аңлатманы саннан тамыр алу рәвешендә күрсәтегез:

а) $3^{1,2}$; б) $5^{-\frac{2}{3}}$; в) $4^{1,25}$; г) $6^{-1\frac{1}{2}}$.

429. Аңлатманы рациональ күрсәткечле дәрәҗә рәвешендә күрсәтегез:

а) $\sqrt[3]{a^{-2}}$; б) $\sqrt[7]{3b}$; в) [illegible]; г) $\sqrt[8]{4^5}$.

Санлы аңлатманың кыйммәтен табыгыз (430—431).

430. а) $243^{0,4}$; б) $\left(\frac{64^4}{3^6}\right)^{-\frac{1}{6}}$; в) $16^{\frac{1}{4}}$; г) $\left(\frac{27^2}{125^6}\right)^{\frac{5}{9}}$.

431. а) $8^{\frac{1}{2}}:(8^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{2}})$; б) $\sqrt[3]{100}\cdot(\sqrt{2})^{\frac{8}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$;

в) $8^{2\frac{1}{3}}:81^{0,75}$; г) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5}\cdot\left(4\frac{17}{25}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Тапкырлаучыларга таркатыгыз (432—433).

432. а) $(ax)^{\frac{1}{3}}+(ay)^{\frac{1}{3}}$; б) $a-a^{\frac{1}{2}}$; в) $3+3^{\frac{1}{2}}$; г) $(3x)^{\frac{1}{2}}-(5x)^{\frac{1}{2}}$.

433. а) $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}+1$; б) $c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}$;

в) $4-4^{\frac{1}{3}}$; г) $a+b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$.

Аңлатманы гадиләштерегез (434—435).

434. а) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{z-8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}$; в) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$; г) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

435. а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; в) $\dfrac{a-1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{3}{2}}-1}+2a^{\frac{1}{2}}$;

в) $\left(\dfrac{1}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$;

г) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

436. Саннарны чагыштырыгыз:

а) $\sqrt[4]{3^3}$ һәм $3^{\frac{10}{8}}$; б) $0,4^{-2,7}$ һәм $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{11}{4}}$;

в) $\sqrt[3]{6^5}$ һәм $6^{1,7}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$ һәм $\sqrt[8]{\frac{1}{32}}$.

437. Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $81^{-0,75}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

б) $0,001^{-\frac{1}{3}}-(-2)^{-2}64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}+(9^0)^2$;

в) $27^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}-25^{0,5}$;

г) $(-0,5)^{-4}-625^{0,25}-\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19(-3)^{-3}$.

438. — **Аңлатманы гадиләштерегез:**

а) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1;$

б) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}};$

в) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-27a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-\sqrt[3]{a^2};$

г) $\left(\dfrac{1}{m+\sqrt{2}}-\dfrac{m^2+4}{m^3+2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{m}\right).$

439. — **Аңлатманы рациональ күрсәткечле дәрәҗә рәвешендә күрсәтегез:**

а) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{2^5\cdot ax^3};$ б) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}};$

в) $\sqrt[3]{b^6}\cdot\sqrt[4]{b};$ г) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{27\sqrt[3]{x}}.$

440. — **Аңлатманы тамыр рәвешендә күрсәтегез:**

а) $3\cdot 2^{-\frac{3}{5}};$ б) $a^{\frac{3}{4}}:b^{\frac{2}{5}};$ в) $2b^{-\frac{3}{8}};$ г) $b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{7}}.$

441. — **Саннарны чагыштырыгыз:**

а) $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}}$ һәм $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}};$ б) 3^{600} һәм $5^{400};$

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ һәм $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{14}};$ г) 7^{30} һәм $4^{40}.$

442. — **Аңлатманың мәгънәсе бармы?**

а) $(-3)^{-\frac{1}{4}};$ б) $(-2)^{-4};$ в) $5^{\frac{2}{3}};$ г) $0^{-\frac{4}{7}}.$

443. — **Аңлатманың билгеләнү өлкәсен табыгыз:**

а) $(x+1)^{-\frac{2}{7}};$ б) $x^{\frac{3}{5}};$ в) $x^{-\frac{3}{4}};$ г) $(x-5)^{\frac{2}{3}}.$

444. — **Үзгәрешленең кыйммәтләре нинди булганда тигезлек дөрес?**

а) $\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^6=a;$ б) $(a^4)^{\frac{1}{4}}=-a;$

в) $(a^8)^{\frac{1}{8}}=\frac{1}{|a|};$ г) $(a^{0,7})^{1\frac{3}{7}}=-a.$

§ 10.

Күрсәткечле һәм логарифмик функция

35. Күрсәткечле функция

1. Иррациональ күрсәткечле дәрәҗә. Уңай a санын билгелибез дә һәр $\frac{m}{n}$ санына $a^{\frac{m}{n}}$ санын тиңдәшле рәвештә куябыз. Шуның белән рациональ саннар күплеге Q да билгеләнгән һәм 34 нче пунктта санап үткән үзлекләргә ия булган $f(x) = a^x$ санлы функциясен табабыз. $a = 1$ булганда, a^x функциясе даими, чөнки теләсә нинди рациональ x өчен $1^x = 1$.

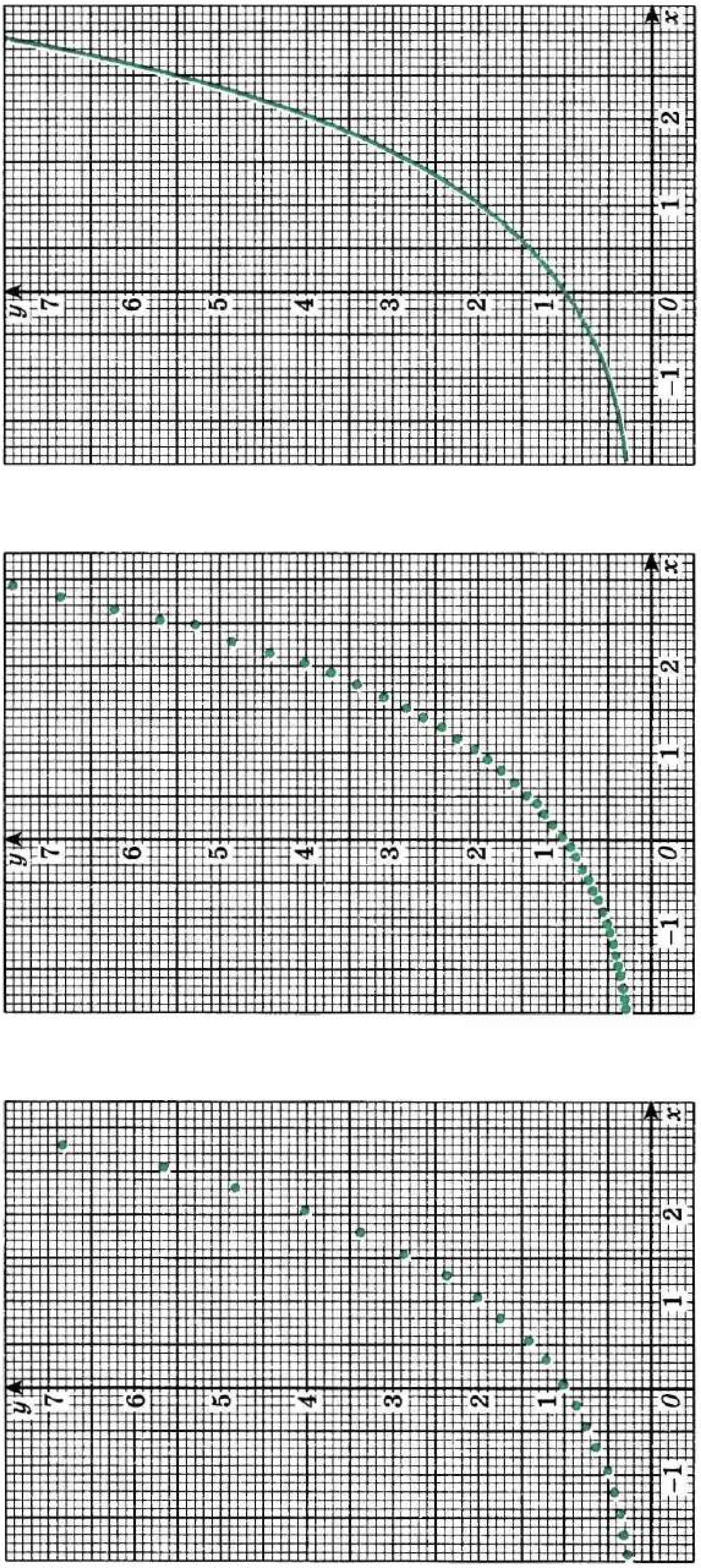
Башта калькулятор ярдәмендә 2^x кыйммәтен $[-2; 3]$ кисемтәсендә $\frac{1}{4}$ адымы белән (132 нче *а* рәсем), ә аннан соң $\frac{1}{8}$ адымы белән (132 нче *б* рәсем) исәпләп, 2^x функциясе графигының берничә ноктасын билгелик. Шундый ук төзүләрне $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ һәм башка шундый адымнар белән күңелдә дәвам итеп табылган нокталарны салмак кәкре белән тоташтырсак, бу кәкрене барлык санлы турыда билгеләнгән һәм үсә баручы рациональ $x = \frac{m}{n}$ нокталарында $2^{\frac{m}{n}}$ кыйммәтен кабул итүче кайбер функциянең графигы итеп кабул итү табигый булыр (132 нче *в* рәсем). $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциясе графигында җитәрлек санда нокталар төзегәннән соң, без әлеге функциянең дә аналогик үзлекләргә ия булуын күрәбез (аерымлык шунда: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциясе R да кими).

Әлеге күзәтүләрдән күренгәнчә, һәр иррациональ α өчен 2^α һәм $\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$ саннарын $y = 2^x$ һәм $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ формулалары белән бирелгән функцияләр өзлексез булырлык итеп билгеләргә мөмкин, өстәвенә $y = 2^x$ функциясе барлык саннар турысында үсә, ә $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциясе кими.

$a > 1$ булганда, иррациональ α өчен a^α санының ничек билгеләнүен гомуми рәвештә әйтеп китик.

Без $y = a^x$ функциясенең үсә баручы функция булуын телибез. Ул вакытта $r_1 < \alpha < r_2$ булырлык теләсә нинди рациональ r_1 һәм r_2 өчен a^α ның кыйммәте $a^{r_1} < a^\alpha < a^{r_2}$ тигезсезлекләрен канәгатьләндерергә тиеш.

x ка якынлашучы r_1 һәм r_2 кыйммәтләрен сайлаганда, a^{r_1} һәм a^{r_2} гә тиңдәш кыйммәтләрнең дә бер-берсеннән бик аз аерылганын искәрербез. Барлык рациональ r_1 саннарына туры килгән барлык



а) б) в)

132 нче рәсем

a^{r_1} дән зур, ә барлык r_2 рациональ саннарына туры килгән барлык a^{r_2} дән кечкенә булган бер генә һәм бары тик бер генә y саны барлыгын исбатларга мөмкин. Әлеге y саны — билгеләмә буенча a^{α} ул.

Мәсәлән, 2^x функциясенең x_n һәм x'_n нокталарындагы кыйммәтен, биредә x_n һәм x'_n $x = \sqrt{3}$ санының унарлы якынлашуы, калькулятор ярдәмендә исәпләгәннән соң, x_n һәм x'_n $\sqrt{3}$ кә никадәр якын булсалар, 2^{x_n} ның $2^{x'_n}$ тан шулкадәр азрак аерылганын күрәбез.

$1 < \sqrt{3} < 2$ булганга күрә,

$$2^1 = 2 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2 = 4.$$

$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ һәм, димәк,

$$2^{1,7} \approx 3{,}2490096 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8} \approx 3{,}4822022.$$

$\sqrt{3}$ ның киме һәм артыгы белән алынган түбәндәге унарлы якынлашуларын моңа охшаш рәвештә тикшереп, тигезсезлекләр язабыз:

$$2^{1,73} \approx 3{,}3172782 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74} \approx 3{,}3403517;$$
$$2^{1,732} \approx 3{,}3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733} \approx 3{,}3241834;$$
$$2^{1,7320} \approx 3{,}321801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7321} \approx 3{,}3221104;$$
$$2^{1,73205} \approx 3{,}3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,73206} \approx 3{,}3220182;$$
$$2^{1,732050} \approx 3{,}3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,732051} \approx 3{,}3219975.$$

$2^{\sqrt{3}}$ нең калькуляторда исәпләнгән кыйммәте түбәндәгечә:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997.$$

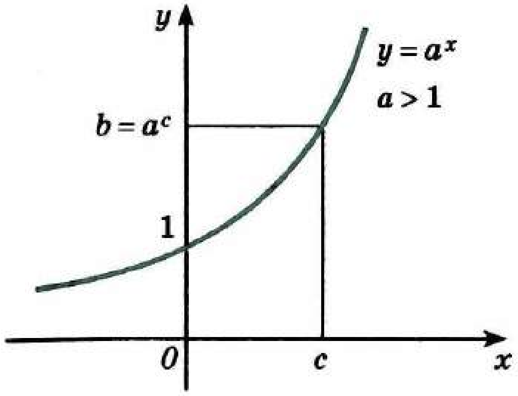
$0 < \alpha < 1$ өчен a^{α} саны шушыңа охшаш рәвештә билгеләнә. Моннан тыш, теләсә нинди α өчен $1^{\alpha} = 1$ һәм $\alpha > 0$ өчен $0^{\alpha} = 0$ дип алалар.

2. Күрсәткечле функциянең үзлекләре

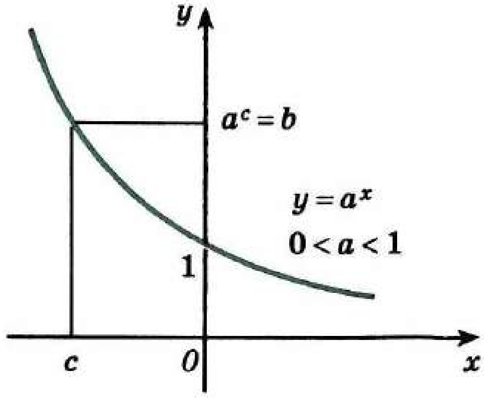
> Билгеләмә. **$y = a^x$ формуласы белән бирелгән функция (биредә $a > 0$, $a \neq 1$) *a нигезле күрсәткечле функция* дип атала.**

Күрсәткечле функциянең төп үзлекләрен санап чыгыйк (алар мәктәп курсында исбатланылмый).

1. a^x функциясенең билгеләнү өлкәсе реаль саннар күплеге R була.
2. a^x функциясенең кыйммәтләре өлкәсе барлык уңай реаль саннар күплеге R_+ була.
3. $a > 1$ булганда, a^x функциясе барлык санлы турыда үсә, $0 < a < 1$ булганда, a^x функциясе R күплегендә кими.



133 нче рәсем



134 нче рәсем

$a > 1$ һәм $0 < a < 1$ очраклары өчен күрсәткечле функцияләрнең графиклары 133—134 нче рәсемнәрдә сурәтләнгән.

4. x һәм y ның теләсә нинди реаль кыйммәтләре өчен

$$a^x a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

тигезлекләре дөрес.

Бу формулаларны *дәрәҗәләрнең төп үзлекләре* дип атыйлар.

3 нче һәм 4 нче үзлекләр башта бары тик рациональ x лар өчен генә билгеләнгән a^x функциясенең үзлекләре барлык саннар турысында билгеләнгән a^x функциясе өчен дә дөрес булуын аңлаталар (34 нче пункттагы 1^0—7^0 үзлекләрен карагыз).

Күнегүләр

445.— Функциянең үзлекләрен санап чыгыгыз һәм аның графигын төзегез:

а) $y = 4^x$; б) $y = 0{,}2^x$; в) $y = 0{,}7^x$; г) $y = 2{,}5^x$.

446.- Функциянең кыйммәтләре өлкәсен табыгыз:

а) $y = -2^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$; в) $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$; г) $y = 5^x - 2$.

447.- Саннарны чагыштырыгыз:

а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ һәм 1; б) $3^{-\sqrt{12}}$ һәм $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,6}$;

в) $2{,}5^{-\sqrt{2}}$ һәм 1; г) $0{,}3^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ һәм $0{,}3^{\frac{1}{3}}$.

448.— Исәпләп чыгарыгыз:

а) $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; б) $3^{1-2\sqrt{3}}\cdot 9^{1+\sqrt{3}}$; в) $8^{\sqrt{2}}:2^{3\sqrt{2}}$; г) $(3^{\sqrt[3]{6}})^{\sqrt[3]{4}}$.

Аңлатманы гадиләштерегез (449—450).

449. а) $a^{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$; б) $x^{\pi}\cdot\sqrt[\pi]{x^{2}:x^{4\pi}}$;

в) $(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; г) $y^{\sqrt{2}}\cdot y^{1,3}:\sqrt[5]{y^{2\sqrt{2}}}$.

450.— а) $\frac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}})^{2}}+1$; б) $\frac{(a^{2\sqrt{3}}-1)(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}})}{a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}}$;

в) $\frac{a^{\sqrt{8}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{8}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{8}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$; г) $\sqrt[\pi]{(x^{\pi}+y^{\pi})^{2}-(4^{\frac{1}{\pi}}xy)^{\pi}}$.

451.— Түбәндәге кыйммәтләрне (таблицалар яки калькулятордан файдаланып) 0,1 гә кадәр төгәллек белән исәпләп чыгарыгыз:

а) $10^{1,41}$ һәм $10^{1,42}$; б) $10^{1,414}$ һәм $10^{1,415}$;
в) $10^{2,23}$ һәм $10^{2,24}$; г) $10^{2,236}$ һәм $10^{2,237}$.

452.— 451 нче мәсьәләдә табылган нәтиҗәләрдән файдаланып, $10^{\sqrt{2}}$ һәм $10^{\sqrt{5}}$ кыйммәтләрен 0,2 гә кадәр төгәллек белән табыгыз.

453.— Бирелгән функцияләрнең кайсылары *R* күплегендә үсә баручы, кайсылары кими баручы икәнен күрсәтегез:

а) $y=(\sqrt{2})^{x}$, $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x}$; б) $y=(\sqrt{5}-2)^{x}$, $y=\frac{1}{(\sqrt{5}-2)^{x}}$;

в) $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^{x}$, $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^{x}$; г) $y=(3-\sqrt{7})^{x}$, $y=\frac{1}{(3-\sqrt{7})^{x}}$.

454.— Функциянең кыйммәтләре өлкәсен табыгыз:

а) $y=3^{x+1}-3$; б) $y=|2^{x}-2|$;

в) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$; г) $y=4^{|x|}$.

455.— Функциянең *R* да иң зур һәм кечкенә кыйммәтен табыгыз:

а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$; б) $y=5+3^{|\cos x|}$;

в) $y=4^{\cos x}$; г) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|}-2$.

456.— Тигезләмәнең тамыр тамгасын табыгыз:

а) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x}=10$; б) $0,3^{x}=0,1$; в) $10^{x}=4$; г) $0,7^{x}=5$.

Тигезләмәләрне график юл белән чишегез (457—458).

457.— а) $3^x = 4 - x$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$; г) $4^x = 5 - x$.

458.— а) $3^{1-x} = 2x - 1$; б) $4^x + 1 = 6 - x$;

в) $2^x - 2 = 1 - x$; г) $3^{-x} = -\frac{3}{x}$.

459.— $f(x) = a^x$ күрсәткечле функциясенең:

а) экстремумнары булуы;

б) ниндидер x_0 ноктасында иң зур кыйммәт кабул итүе;

в) ниндидер ноктада нульгә тигез кыйммәт алуы;

г) җөп (так) булуы дөресме?

36. Күрсәткечле тигезләмәләрне һәм тигезсезлекләрне чишү

1. Тигезләмәләр. Иң гади күрсәткечле тигезләмәне тикшерик

$$a^x = b, \qquad (1)$$

биредә $a > 0$ һәм $a \neq 1$.

$y = a^x$ функциясенең кыйммәтләре өлкәсе — уңай саннар күплеге. Шул сәбәпле $b < 0$ яки $b = 0$ очрагында (1) тигезләмәнең чишелешләре булмый.

$b > 0$ булсын, $a > 1$ булганда, $y = a^x$ функциясе $(-\infty; \infty)$ аралыгында үсә ($0 < a < 1$ булганда кими) һәм барлык уңай кыйммәтләрне ала. Тамыр турындагы теореманы кулланып (8 нче пункт), 1 дән башка теләсә нинди уңай a һәм $b > 0$ өчен (1) тигезләмәнең бердәнбер тамыры булганын табабыз. Бу тамырны табу өчен, b ны $b = a^c$ рәвешенә китерергә кирәк, c ның $a^x = a^c$ тигезләмәсе чишелеше икәне үзеннән-үзе аңлашыла (134 нче рәсем).

1 нче мисал. $7^{x-2} = \sqrt[3]{49}$ тигезләмәсен чишик.

$49 = 7^2$, ә $\sqrt[3]{49} = 7^{\frac{2}{3}}$ икәнен искәрик. Шуңа күрә бирелгән тигезләмәне $7^{x-2} = 7^{\frac{2}{3}}$ рәвешендә язарга мөмкин. Димәк, бирелгән тигезләмәнең тамыры $x - 2 = \frac{2}{3}$ тигезлеге үтәлерлек x саны, ягъни $x = 2\frac{2}{3}$ була. Җавап: $x = 2\frac{2}{3}$.

2 нче мисал. $5^{x^2-2x-1} = 25$ тигезләмәсен чишик. Аны $5^{x^2-2x-1} = 5^2$ рәвешендә языйк. Бу тигезләмәнең тамырлары булып $x^2 - 2x - 1 = 2$ тигезлеге үтәлә торган x саннары тора. Моннан тамырлары 3 һәм -1 саннары булган квадрат тигезләмәне чишәбез. Җавап: 3; -1.

3 нче мисал. $6^{x+1} + 35\cdot 6^{x-1} = 71$ тигезләмәсен чишик.

$6^{x+1} = 36\cdot 6^{x-1}$ икәнен искәрик. Шуңа күрә бирелгән тигезләмәне $36\cdot 6^{x-1} + 35\cdot 6^{x-1} = 71$, ягъни $71\cdot 6^{x-1} = 71$ рәвешендә язарга мөмкин, моннан $6^{x-1} = 6^0$, $x-1=0$ һәм $x=1$. Җавап: 1.

4 нче мисал. $4^x - 5\cdot 2^x + 4 = 0$ тигезләмәсен чишик. $t = 2^x$ үзгәрешлесе белән алмаштырабыз. Биредә $4^x = (2^x)^2 = t^2$ була. Шуңа күрә бирелгән тигезләмә $t^2 - 5t + 4 = 0$ рәвешен ала. Әлеге квадрат тигезләмәнең чишелешен табабыз: $t_1 = 1$ һәм $t_2 = 4$. $2^x = 1$ һәм $2^x = 4$ тигезләмәләрен чишеп табабыз: $x = 0$ һәм $x = 2$. Җавап: 0; 2.

2. Тигезсезлекләр һәм тигезләмәләр системасы. Иң гади күрсәткечле тигезсезлекләрне чишү $y = a^x$ функциясенең билгеле үзлегенә нигезләнгән: бу функция $a > 1$ булганда үсә һәм $0 < a < 1$ булганда кими.

5 нче мисал. $0{,}5^{7-3x} < 4$ тигезсезлеген чишик.

$0{,}5^{-2} = 4$ икәненнән файдаланып, бирелгән тигезсезлекне $0{,}5^{7-3x} < 0{,}5^{-2}$ рәвешендә күчереп язийк.

$y = 0{,}5^x$ күрсәткечле функция кими (чөнки 0,5 нигезе 1 дән ким). Шуңа күрә бирелгән тигезсезлек $7 - 3x > -2$ тигезсезлегенә тамырдаш, моннан $x < 3$. Җавап: $(-\infty; 3)$.

6 нчы мисал. $6^{x^2+2x} > 6^3$ тигезсезлеген чишик.

$y = 6^x$ күрсәткечле функция үсә. Шуңа күрә бирелгән тигезсезлек $x^2 + 2x > 3$ тигезсезлегенә тамырдаш. Әлеге тигезсезлекне чишеп, җавапны табабыз: $(-\infty; -3)$ һәм $(1; \infty)$.

7 нче мисал. $\left(\frac{1}{9}\right)^x - \frac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0$ тигезсезлеген чишик.

$t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ алыштыруны кулланабыз, ул вакытта $\left(\frac{1}{9}\right)^x = t^2$ һәм тигезсезлек $t^2 - \frac{28}{3}t + 3 < 0$ рәвешендә языла, моннан $\frac{1}{3} < t < 9$.

Димәк, бирелгән тигезсезлекнең чишелеше булып $\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче x саннары һәм бары тик шундый саннар гына хезмәт итә. Әмма $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$, $9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, ә $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функциясе кими, чөнки $\frac{1}{3} < 1$. Шуңа күрә $\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$ тигезсезлегенең чишелеше булып $-2 < x < 1$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче x саннары була. Җавап: $(-2; 1)$.

8 нче мисал. Тигезләмәләр системасын чишик:

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ 3^{2x-y} = 3. \end{cases}$$

Системаның икенче тигезләмәсеннән $2x - y = 1$ не табабыз, моннан $y = 2x - 1$. Беренче тигезләмәгә y урынына $2x - 1$ аңлатмасын куеп, $2^x + 2^{2x-1} = 12$ не табабыз, моннан $2^x + \frac{1}{2}\cdot 2^{2x} = 12$. 2^x не t аша

билгеләп, $t^2 + 2t - 24 = 0$ квадрат тигезләмәсен табабыз, моннан $t_1 = -6$, $t_2 = 4$. $2^x = -6$ тигезләмәсенең чишелешләре юк. $2^x = 4$ тигезләмәсенең тамыры $x = 2$ саны. y ның моңа тиңдәш кыйммәте 3 кә тигез. **Җавап:** (2; 3).

Күнегүләр

Тигезләмәләрне чишегез (460—464).

460. а) $4^x = 64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$; в) $3^x = 81$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64}$.

461. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; б) $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$;
в) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$; г) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$.

462. а) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$; б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$;
в) $\sqrt{3^x} = 9$; г) $2^{x^2+2x-0,5} = 4\sqrt{2}$.

463. а) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$; б) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$;
в) $4^{x+1} + 4^x = 320$; г) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$.

464. а) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$; б) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$;
в) $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$; г) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.

465. **Тигезләмәләр системасын чишегез:**

а) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 4^{x+2y-1} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6^{3x-y} = \sqrt{6}, \\ 2^{y-3x} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^{2x-y} = \frac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2} = 27; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-y} = 25, \\ 7^{9x-y} = \sqrt{7}. \end{cases}$

Тигезсезлекләрне чишегез (466—467):

466. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 27$; б) $(\sqrt{6})^x \leqslant \frac{1}{36}$;
в) $0,2^x \leqslant \frac{1}{25}$; г) $1,5^x < 2,25$.

467. а) $4^{5-2x} \leqslant 0,25$; б) $0,3^{7+4x} > 0,027$;
в) $0,4^{2x+1} > 0,16$; г) $3^{2-x} < 27$.

Тигезләмәләрне чишегез (468—470).

468. а) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 4,8$;
в) $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 162$; г) $5 \cdot 9^x + 9^{x-2} = 406$.

469. — а) $5^{x+1} = 8^{x+1}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}$; в) $7^{x-2} = 4^{2-x}$.

470. — а) $3^x + 3^{3-x} = 12$; б) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$;

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x} - \left(\frac{1}{5}\right)^x = 4,96$; г) $4^x - 0,25^{x-2} = 15$.

471. — Тигезләмәләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} 5^{x+y} = 125, \\ 4^{(x-y)^2-1} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 4^x + 4^y = 80; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 6^{x+y} = 216; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1. \end{cases}$

Тигезсезлекләрне чишегез (472—474).

472. — а) $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$; б) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+3,75}$;

в) $3^{4x+2} \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}}$; г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10x} > 64^{2\frac{2}{3}-x^2}$.

473. — а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > 2,5$; б) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} < 448$;

в) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16}$; г) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$.

474. — а) $\pi^x - \pi^{2x} \geqslant 0$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$;

в) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$; г) $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leqslant 0$.

475. — Тигезсезлекләрне график юл белән чишегез:

а) $2^x \leqslant 3 - x$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 2x + 5$;

в) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant 2x + 1$; г) $3^x \geqslant 4 - x$.

37. Логарифмнар һәм аларның үзлекләре

1. Логарифм. $a^x = b$ тигезләмәсенә кайтыйк, биредә $a > 0$ һәм $a \neq 1$. Моннан алдагы пунктта әйтелгәнчә, $b \leqslant 0$ булганда, әлеге тигезләмәнең чишелешләре юк һәм $b > 0$ очрагында бердәнбер тамыры була. Бу тамырны *a* нигезе буенча *b* ның логарифмы дип атыйлар һәм $\log_a b$ дип тамгалыйлар, ягъни

$$a^{\log_a b} = b.$$

> Билгеләмә. *b* санын табу өчен, *a* нигезен күтәрергә тиешле дәрәҗә күрсәткече ***a* буенча *b* санының логарифмы** дип атала.

$a^{\log_a b} = b$ формуласын (биредә $b > 0$, $a > 0$ һәм $a \neq 1$) *төп логарифмик бердәйлек* дип атыйлар.

1 нче мисал. а) $\log_2 32$; б) $\log_5 0{,}04$ нең кыйммәтен табабыз:

а) $32 = 2^5$ икәнен күрәбез, ягъни, 32 санын табу өчен, 2 не бишенче дәрәҗәгә күтәрергә кирәк. Димәк, $\log_2 32 = 5$.

б) $0{,}04 = \frac{1}{25} = 5^{-2}$ икәнен искәрик, шуңа күрә $\log_5 0{,}04 = -2$ була.

2 нче мисал. Нигезе $\sqrt{3}$ буенча $\frac{1}{9}$ санының логарифмын табыйк.

$(\sqrt{3})^{-4} = \frac{1}{9}$ икәнен искәрик. Шуңа күрә логарифм билгеләмәсе буенча $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = -4$.

3 нче мисал. а) $\log_8 x = \frac{1}{3}$; б) $\log_x 8 = -\frac{3}{4}$ булырлык x санын табыйк.

Төп логарифмик бердәйлектән файдаланабыз:

а) $x = 8^{\log_8 x} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$;

б) $x^{\log_x 8} = 8$, ягъни $x^{-\frac{3}{4}} = 8$, моннан $x = 8^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{16}$.

2. Логарифмнарның төп үзлекләре. Логарифмнар белән эшләгәндә, күрсәткечле функция үзлекләреннән чыга торган аларның түбәндәге үзлекләре кулланыла.

> **Теләсә нинди $a > 0$ булганда ($a \neq 1$) һәм теләсә нинди уңай x һәм y өчен түбәндәге тигезлекләр үтәлә:**
> **1°. $\log_a 1 = 0$.**
> **2°. $\log_a a = 1$.**
> **3°. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.**
> **4°. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.**
> **5°. Теләсә нинди реаль p өчен $\log_a x^p = p \log_a x$.**

3° нче кагыйдәне исбатлау өчен, төп логарифмик бердәйлектән файдаланабыз:

$$x = a^{\log_a x}, \quad y = a^{\log_a y}. \qquad (1)$$

Бу тигезләмәләрне буынлап тапкырлап табабыз:

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y},$$

ягъни $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$. Димәк, логарифмның билгеләмәсе буенча $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

> Тапкырчыгышның логарифмы логарифмнар суммасына тигез.

4^0 нче кагыйдәне яңадан (1) тигезлек ярдәмендә исбатлыйк:

$$\frac{x}{y}=\frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}}=a^{\log_a x-\log_a y},$$

димәк, билгеләмә буенча $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$.

> Өлешнең логарифмы логарифмнар аермасына тигез.

5^0 нче кагыйдәне исбатлау өчен, $x=a^{\log_a x}$ бердәйлегеннән файдаланабыз, моннан $x^p=(a^{\log_a x})^p$. Димәк, билгеләмә буенча $\log_a x^p = p\log_a x$.

> Дәрәҗәнең логарифмы әлеге дәрәҗәнең күрсәткече белән шул ук дәрәҗәнең нигезе логарифмы тапкырчыгышына тигез.

Логарифмнарның төп үзлекләре логарифмнарны эченә алган аңлатмаларның рәвешен үзгәртү барышында киң кулланылалар. Мәсәлән, логарифмның бер нигезеннән икенче нигезенә *күчү формуласын* исбатлыйк:

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

(Әгәр бу формуланың ике кисәгенең дә мәгънәсе булса, ягъни $x>0$, $a>0$ һәм $a\neq 1$, $b>0$ һәм $b\neq 1$ булса, бу формула дөрес була.)

Дәрәҗәне логарифмлау кагыйдәсе буенча һәм төп логарифмик бердәйлек буенча язабыз:

$$\log_b x=\log_b (a^{\log_a x}),$$

моннан

$$\log_b x=\log_a x\cdot\log_b a.$$

Әлеге тигезлекнең ике кисәген дә $\log_b a$ га бүлеп кирәкле формуланы табабыз.

Ниндидер бер b нигезгә төзелгән логарифмнар таблицасы булганда, күчү формуласы ярдәмендә ирекле a нигезле логарифмның кыйммәтен табарга мөмкин. Унарлы һәм натураль логарифмнар таблицалары аеруча киң кулланыла (нигезе 10 булган логарифмнарны *унарлы* логарифмнар дип атыйлар һәм lg дип тамгалыйлар, ә натураль логарифмнар белән сез 41 нче пунктта танышырсыз).

4 нче мисал. $\log_{0,3} 7$ не табабыз.

Калькулятордан (яки таблицалардан) файдаланып табабыз: $\lg 7\approx 0{,}8451$ һәм $\lg 0{,}3\approx 0{,}4771-1=-0{,}5229$. Димәк, күчү формуласы буенча $\log_{0,3} 7\approx\frac{0{,}8451}{-0{,}5229}\approx -1{,}6162$.

5 нче мисал. $\log_2 5 = a$ һәм $\log_2 3 = b$ икәне билгеле. $\log_2 300$ не a һәм b аша күрсәтик.

Логарифмнарның төп үзлекләреннән файдаланып табабыз: $\log_2 300 = \log_2(3 \cdot 5^2 \cdot 2^2) = \log_2 3 + 2\log_2 5 + 2\log_2 2 = b + 2a + 2.$

6 нчы мисал. $8a^3\sqrt[7]{b^4}$ аңлатмасының логарифмын $\log_2 a$ һәм $\log_2 b$ аша аңлатыйк. (Кыскача болай әйтәләр: бирелгән аңлатманы 2 нигезе буенча логарифмлыйбыз.)

Логарифмнарның төп үзлекләреннән файдаланып табабыз:

$$\log_2(8a^3\sqrt[7]{b^4}) = \log_2(2^3 \cdot a^3 \cdot b^{\frac{4}{7}}) = 3\log_2 2 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b =$$

$$= 3 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b.$$

7 нче мисал. Әгәр $\log_5 x = \log_5 7 + 2\log_5 3 - 3\log_5 2$ булса, x ны табыйк. Башта логарифмнарның төп үзлекләреннән файдаланып, бирелгән тигезлекнең уң кисәгенең рәвешен үзгәртәбез:

$$\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^2 - \log_5 2^3 = \log_5 \frac{7 \cdot 9}{8} = \log_5 \frac{63}{8},$$

ягъни $\log_5 x = \log_5 \frac{63}{8}$ һәм шуңа күрә $x = \frac{63}{8} = 7{,}875.$

8 нче мисал. $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$ аңлатмасының кыйммәтен табыйк.

Логарифмнарның төп үзлекләреннән файдаланып, әлеге вакланманың санаучысының һәм ваклаучысының рәвешен үзгәртәбез:

$$\lg 72 - \lg 9 = \lg\frac{72}{9} = \lg 8 = 3\lg 2;\ \lg 28 - \lg 7 = \lg\frac{28}{7} = \lg 4 = 2\lg 2.$$

Димәк,

$$\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7} = \frac{3\lg 2}{2\lg 2} = \frac{3}{2}.$$

Күнегүләр

***a* нигезле дәрәҗә рәвешендәге санның *a* нигезе буенча логарифмын табыгыз (476—478).**

476. а) $3^2 = 9$; б) $2^{-3} = \frac{1}{8}$; в) $4^2 = 16$; г) $5^{-2} = \frac{1}{25}$.

477. а) $9^{\frac{1}{2}} = 3$; б) $7^0 = 1$; в) $32^{\frac{1}{5}} = 2$; г) $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

478. а) $27^{\frac{2}{3}} = 9$; б) $32^{\frac{3}{5}} = 8$; в) $81^{\frac{3}{4}} = 27$; г) $125^{\frac{2}{3}} = 25$.

Тигезлекләрнең дөреслеген тикшерегез (479—482).

479. а) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; б) $\log_{16} 1 = 0$;

в) $\log_4 16 = 2$; г) $\log_5 125 = 3$.

480. а) $\log_5 0{,}04 = -2$; б) $\log_7 343 = 3$;

в) $\lg 0{,}01 = -2$; г) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$.

481. а) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$; б) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27 = -6$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$; г) $\log_{0,5} 4 = -2$.

482. а) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3}$; б) $\log_{0,2} 0{,}008 = 3$;

в) $\log_{\sqrt{5}} 0{,}2 = -2$; г) $\log_{0,2} 125 = -3$.

483. Бирелгән саннарның логарифмнарын a нигезе буенча табыгыз:

а) $a = 5$ булганда 25, $\frac{1}{5}$, $\sqrt{5}$; б) $a = 8$ булганда 64, $\frac{1}{8}$, 2;

в) $a = 2$ булганда 16, $\frac{1}{4}$, $\sqrt{2}$; г) $a = 3$ булганда 27, $\frac{1}{9}$, $\sqrt{3}$.

x санын табыгыз (484—486).

484. а) $\log_3 x = -1$; б) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$;

в) $\log_5 x = 2$; г) $\log_7 x = -2$.

485. а) $\log_4 x = -3$; б) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$;

в) $\log_{\frac{1}{7}} x = 1$; г) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$.

486. а) $\log_x 81 = 4$; б) $\log_x \frac{1}{16} = 2$; в) $\log_x \frac{1}{4} = -2$; г) $\log_x 27 = 3$.

487. Санны a нигезле логарифм рәвешендә языгыз:

а) $a = 4$ булганда 2; $\frac{1}{2}$; 1; 0;

б) $a = 3$ булганда 3; -1; -3; 1;

в) $a = 2$ булганда 3; $\frac{1}{2}$; 0; -1;

г) $a = 5$ булганда 1; -2; 0; 3.

Төп логарифмик бердәйлектән файдаланып, аңлатманы гадиләштерегез (488—490).

488. а) $1{,}7^{\log_{1,7} 2}$; б) $\pi^{\log_\pi 6,2}$; в) $2^{\log_2 5}$; г) $3{,}8^{\log_{3,8} 11}$.

489. а) $5^{1+\log_5 3}$; б) $10^{1-\lg 2}$; в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+\log_{\frac{1}{7}} 2}$; г) $3^{2-\log_3 18}$.

490. а) $4^{2\log_4 3}$; б) $5^{3\log_5 \frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4\log_{\frac{1}{2}} 3}$; г) $6^{2\log_6 5}$.

491. 3 нигезе буенча логарифмлагыз ($a > 0$, $b > 0$):

а) $\left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[5]{b^4}}\right)^{-0,2}$; в) $9a^4\sqrt[5]{b}$; г) $\frac{b^2}{27a^7}$.

10 нигезе буенча логарифмлагыз, биредә $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ (492—493).

492. а) $100\sqrt{ab^3c}$; б) $\frac{a^3}{0,1c^2\sqrt{b}}$; в) $\sqrt[3]{10}\,a^{\frac{1}{3}}b^4c^{-\frac{1}{2}}$; г) $\frac{0,01c^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}b^3}$.

493. а) $10^3a^4b^{\frac{1}{2}}c^{-3}$; б) $\frac{b^{\frac{2}{3}}}{10^4a^4c^4}$; в) $10^{-4}a^2b^5c^{\frac{2}{3}}$; г) $\frac{c^{\frac{1}{3}}}{10^7a^{\frac{1}{3}}b^6}$.

494. $\log_5 2 = a$ һәм $\log_5 3 = b$ икәне билгеле: a һәм b аша аңлатыгыз:

а) $\log_5 72$; б) $\log_5 15$; в) $\log_5 12$; г) $\log_5 30$.

Исәпләп чыгарыгыз (495—496).

495. а) $\lg 8 + \lg 125$; б) $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16}$;

в) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$; г) $\lg 13 - \lg 130$.

496. а) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$; б) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$;

в) $\log_2 11 - \log_2 44$; г) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$.

497. а) $\log_6 x = 3\log_6 2 + 0,5\log_6 25 - 2\log_6 3$;

б) $\lg x = \frac{1}{2}\lg 5a - 3\lg b + 4\lg c$;

в) $\lg x = 5\lg m + \frac{2}{3}\lg n - \frac{1}{4}\lg p$;

г) $\log_4 x = \frac{1}{3}\log_4 216 - 2\log_4 10 + 4\log_4 3$ булса, x ны табыгыз.

498. Исбатлагыз:

а) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$; б) $4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4}$;

в) $\log_3 7 + \log_7 3 > 2$; г) $3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$.

38. Логарифмик функция

a саны 1 гә тигез булмаган уңай сан булсын.

Билгеләмә.

$$y = \log_a x \qquad (1)$$

формуласы белән бирелгән функцияне *a* *нигезле логарифмик функция* дип атыйлар.

Логарифмик функциянең төп үзлекләрен санап китик.

1. Логарифмик функциянең билгеләнү өлкәсе — барлык уңай саннар күплеге R_+, ягъни $D(\log_a) = R_+$.

Чыннан да, моннан алдагы пунктта әйтелгәнчә, һәрбер уңай x санының a нигезе буенча логарифмы бар.

2. Логарифмик функциянең кыйммәтләре өлкәсе — барлык реаль саннар күплеге.

Чынлыкта логарифм билгеләмәсе буенча теләсә нинди реаль y өчен

$$\log_a(a^y) = y \qquad (2)$$

тигезлеге дөрес, ягъни $y = \log_a x$ функциясе $x_0 = a^{y_0}$ ноктасында y_0 кыйммәтен кабул итә.

3. Логарифмик функция барлык билгеләнү өлкәсендә үсә ($a > 1$ булганда) яки кими ($0 < a < 1$ булганда).

Мәсәлән, $a > 1$ булганда, функциянең үсүен исбатлыйк ($0 < a < 1$ очрагында да шушыңа охшаш фикер йөртелә).

x_1 һәм x_2 — ирекле уңай сан, һәм $x_2 > x_1$ булсын. $\log_a x_2 > \log_a x_1$ икәнен исбатларга кирәк. Киресеннән чыгып исбатлыйбыз, ягъни

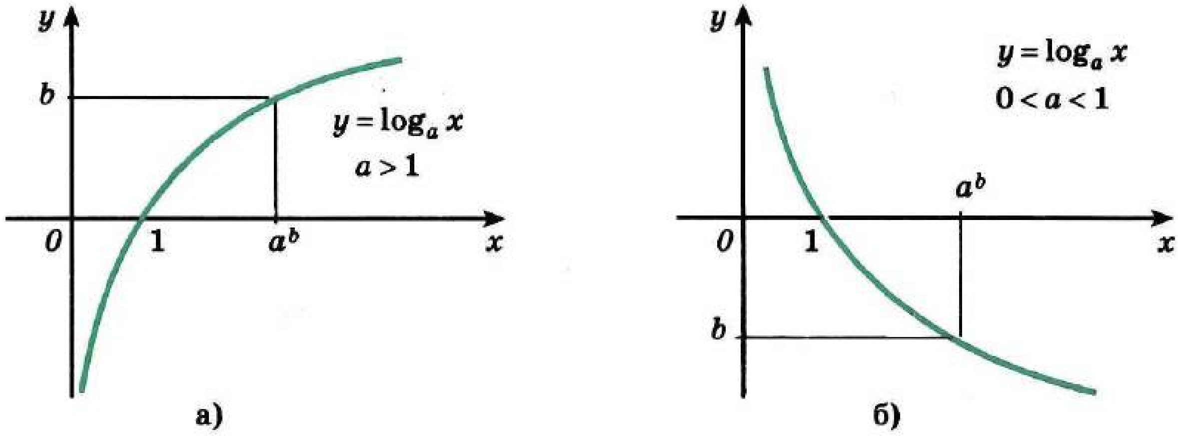
$$\log_a x_2 \leqslant \log_a x_1. \qquad (3)$$

$a > 1$ булганда, күрсәткечле функция $y = a^x$ үсә, шуңа күрә (3) тигезсезлектән

$$a^{\log_a x_2} \leqslant a^{\log_a x_1} \qquad (4)$$

чыга. Ләкин $a^{\log_a x_2} = x_2$, $a^{\log_a x_1} = x_1$ (логарифмның билгеләмәсе буенча), ягъни (4) тигезсезлек $x_2 \leqslant x_1$ икәнен аңлата. Бу исә $x_2 > x_1$ дип фараз итүгә каршы килә.

График төзү өчен, логарифмик функциянең 0 кыйммәтен 1 ноктасында кабул итүен искәрик: теләсә нинди $a > 0$ булганда, $\log_a 1 = 0$, чөнки $a^0 = 1$.



135 нче рәсем

$a > 1$ булганда, функциянең үсүе нәтиҗәсендә $x > 1$ булганда, логарифмик функция — уңай кыйммәтләр, ә $0 < x < 1$ булганда, тискәре кыйммәтләр ала.

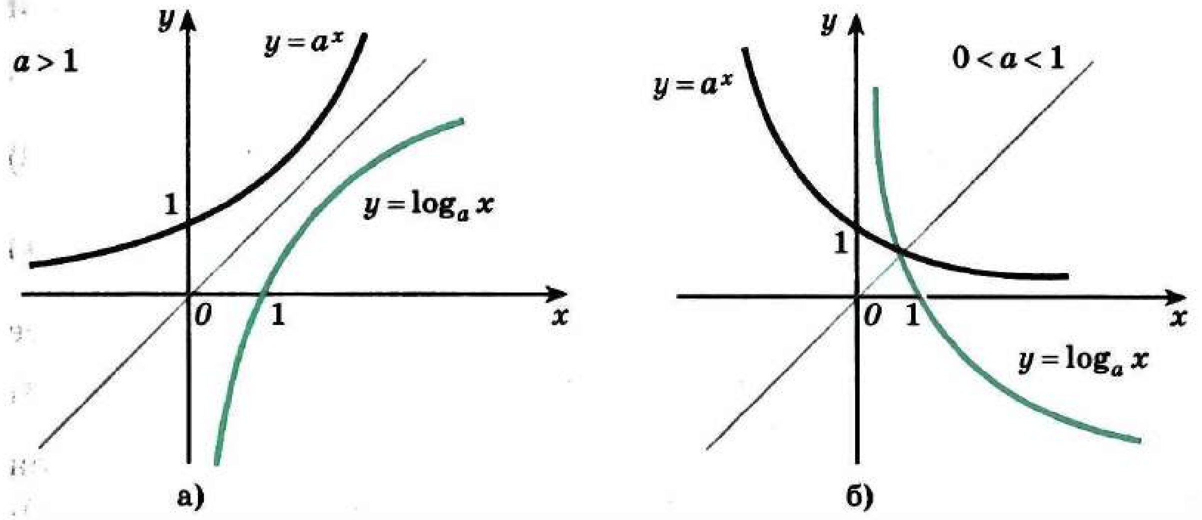
Әгәр $0 < a < 1$ булса, ул вакытта $y = \log_a x$ R_+ да кими, шуңа күрә $0 < x < 1$ булганда $\log_a x > 0$ һәм $x > 1$ булганда $\log_a x < 0$ була.

Исбатланган үзлекләргә таянып, $a > 1$ (135 нче *а* рәсем) һәм $0 < a < 1$ булганда (135 нче *б* рәсем) $y = \log_a x$ функциясенең графигын төзү кыен түгел.

Түбәндәге раслау дөрес (исбатлануны 40 нчы пункттан карагыз).

> **Нигезләре бердәй булган күрсәткечле һәм логарифмик функцияләрнең графиклары $y = x$ турысына карата симметрик була (136 нчы рәсем).**

Логарифмик функциянең үзлекләрен куллануга мисаллар тикшерик.



136 нчы рәсем

137 нче рәсем

1 нче мисал. $f(x) = \log_8(4 - 5x)$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табыйк.

Логарифмик функциянең билгеләнү өлкәсе — R_+ күплеге. Шуңа күрә бирелгән функция x ның бары тик $4 - 5x > 0$ була торган, ягъни $x < 0{,}8$ булгандагы кыйммәтләре өчен генә билгеләнә. Димәк, бирелгән функциянең билгеләнү өлкәсе булып $(-\infty;\ 0{,}8)$ интервалы хезмәт итә.

2 нче мисал. $f(x) = \log_2(x^2 - 3x - 4)$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табыйк.

Моннан алдагы мисалдагы кебек f функциясе x ның $x^2 - 3x - 4 > 0$ булырлык кыйммәтләре өчен билгеләнә. Әлеге квадрат тигезсезлекне чишеп, $D(f)$ ның $(-\infty;\ -1)$ һәм $(4;\ \infty)$ интерваллары берләшмәсе икәнен табабыз.

3 нче мисал. $f(x) = \log_7 \frac{2x+3}{5-7x}$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табабыз.

$\frac{2x+3}{5-7x} > 0$ тигезсезлеген интерваллар методы белән чишеп, $D(f) = \left(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{7}\right)$ икәнен табабыз (137 нче рәсем).

4 нче мисал. Саннарны чагыштырыйк: а) $\log_3 5$ һәм $\log_3 7$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ һәм $\log_{\frac{1}{3}} 7$; в) $\log_3 10$ һәм $\log_4 12$.

а) Нигезе 1 дән зур булган логарифмик функция барлык санлы турыда үсә. $7 > 5$ булганлыктан, $\log_3 7 > \log_3 5$ була.

б) Әлеге очракта логарифмның нигезе 1 дән кечкенә, шуңа күрә $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ функциясе кими һәм, димәк, $\log_{\frac{1}{3}} 7 < \log_{\frac{1}{3}} 5$.

в) $10 > 9 = 3^2$ икәнен искәрик, шул сәбәпле $\log_3 10 > 2$. икенче яктан $12 < 16 = 4^2$ һәм, димәк, $\log_4 12 < 2$. Шулай итеп, $\log_3 10 > \log_4 12$.

5 нче мисал. Кайсысы зуррак: $\log_2 3 + \log_2 7$ ме, әллә $\log_2(3 + 7)$ ме?

Логарифмнарның төп үзлекләре буенча $\log_2 3 + \log_2 7 = \log_2 21$. $\log_2(3 + 7) = \log_2 10$ һәм $10 < 21$ булганлыктан, ә логарифмның нигезе 2 саны 1 дән зур булу сәбәпле, $\log_2 10 < \log_2 21$, димәк, $\log_2 3 + \log_2 7 > \log_2(3 + 7)$.

Күнегүләр

Аңлатманың билгеләнү өлкәсен табыгыз (499—500).

499.— а) $\log_x(10-5x)$; б) $\log_5(9-x^2)$;

в) $\log_3(x-4)$; г) $\log_{0,3}(x^2-16)$.

500.— а) $\log_{\sqrt{10}}(6+x-x^2)$; б) $\lg\frac{3x+5}{x-1}$;

в) $\log_{0.9}\frac{2+3x}{5-2x}$; г) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$.

Саннарны чагыштырыгыз (501—503).

501.— а) $\log_2 3,8$ һәм $\log_2 4,7$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 0,15$ һәм $\log_{\frac{1}{3}} 0,2$;

в) $\log_3 5,1$ һәм $\log_3 4,9$; г) $\log_{0,2} 1,8$ һәм $\log_{0,2} 2,1$.

502.— а) $\log_{\sqrt{2}} 3$ һәм 1; б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 1,9$ һәм $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2,5$;

в) $\log_{\pi} 2,9$ һәм 1; г) $\log_{0,7}\sqrt{2}$ һәм $\log_{0,7} 0,3$.

503.— а) $\log_2 10$ һәм $\log_5 30$; б) $\log_{0,3} 2$ һәм $\log_5 3$;

в) $\log_3 5$ һәм $\log_7 4$; г) $\log_3 10$ һәм $\log_8 57$.

504.— Функциянең төп үзлекләрен санап чыгыгыз һәм аның графигын төзегез:

а) $y=\log_3 x$; б) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$;

в) $y=\log_4 x$; г) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

505.— Аңлатманың билгеләнү өлкәсен табыгыз:

а) $\log_2 \sin x$; б) $\log_3(2^x-1)$; в) $\log_{\frac{1}{2}}\cos x$; г) $\lg(1-3^x)$.

506.— Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\log_2 2\sin\frac{\pi}{15}+\log_2\cos\frac{\pi}{15}$;

б) $\log_4(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3})+\log_4(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9})$;

в) $\lg \operatorname{tg} 4+\lg \operatorname{ctg} 4$;

г) $\log_{\pi}(5+2\sqrt{6})+\log_{\pi}(5-2\sqrt{6})$.

507.— Функциянең графигын төзегез:

а) $y=\log_3(x-2)$; б) $y=-\log_{\frac{1}{2}} x$;

в) $y=\log_2(x+1)$; г) $y=\log_{\frac{1}{3}} x+2$.

508. — Тигезләмәне чишегез:

а) $\log_3 x = 2\log_9 6 - \log_9 12$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} x = \log_{0,2} 35 - 2\log_{0,2} 25\sqrt{7}$;

в) $\log_5 x = \frac{1}{2}\log_3 144 + \log_3 0,75$;

г) $\log_\pi x = 3\log_{0,1} 4 + 2\log_{0,1} 1\frac{1}{4}$.

509. — Тигезләмәне график юл белән чишегез:

а) $\lg x = 1 - x$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$;

в) $\log_{\frac{1}{6}} x = x - 6$; г) $\log_2 x = 3 - x$.

510. — Логарифмик функциянең

а) экстремумнары булуы; б) так булуы;

в) периодик булуы; г) җөп булуы дөресме?

511. — f аралыгында f функциясенең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыгыз:

а) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, $I = [1; 4]$; б) $f(x) = \log_9 x$, $I = \left[\frac{1}{9}; 9\right]$;

в) $f(x) = \log_5 x$, $I = \left[\frac{1}{5}; 1\right]$; г) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $I = \left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

39. Логарифмик тигезләмәләр һәм тигезсезлекләрне чишү

Иң гади

$$\log_a x = b$$

логарифмик тигезләмәсен тикшерик. $(0; \infty)$ аралыкта логарифмик функция үсә (яки кими) һәм шул ук аралыкта барлык реаль кыйммәтләрне ала (135 нче рәсем). Тамыр турындагы теоремадан күренгәнчә (8 нче пункт), теләсә нинди b өчен бирелгән тигезләмәнең чишелеше бар һәм бары тик бердәнбер. Санның логарифмы билгеләмәсеннән шунда ук a^b нең шундый чишелеш икәнлеге күренә.

1 нче мисал. $\log_a(x^2 + 4x + 3) = 3$ тигезләмәсен чишик.

x ның $x^2 + 4x + 3 = 2^3$ тигезлеге үтәлерлек кыйммәтләре генә бирелгән тигезләмәне канәгатьләндерә. Без $x^2 + 4x - 5 = 0$ квадрат тигезләмәсен таптык. Аның тамырлары 1 һәм −5 саннары. Димәк, бирелгән тигезләмәнең тамыры ике сан: 1 һәм −5.

2 нче мисал. $\log_5(2x + 3) = \log_5(x + 1)$ тигезләмәсен чишәбез.

Бу тигезләмә x ның бары тик $2x + 3 > 0$ һәм $x + 1 > 0$ тигезсезлекләре үтәлердәй кыйммәтләре өчен генә билгеләнә, x ның мондый кыйммәтләре өчен бирелгән тигезләмә $2x + 3 = x + 1$

тигезләмәсенә тамырдаш була. Моннан $x = -2$ не табабыз, x ның мондый кыйммәтләре өчен бирелгән тигезләмә $2x + 3 = x + 1$ тигезләмәсенә тамырдаш була. Моннан $x = -2$ не табабыз, $x = -2$ саны $x + 1 > 0$ тигезсезлеген канәгатьләндерми. Димәк, бирелгән тигезләмәнең тамырлары юк.

Шушы ук тигезләмәне башкача да чишәргә була. Бирелгән тигезләмәнең нәтиҗәсе $2x + 3 = x + 1$ тигезләмәсен тикшергәндә, $x = -2$ икәнен табабыз. Һәрвакытта тигезләмәләрне тамырдаш булмаган үзгәртүләр вакытында табылган кыйммәтне баштагы тигезләмәгә куеп карап тикшерү таләп ителә. Әлеге очракта $\log_5(-1) = \log_5(-1)$ тигезлеге дөрес түгел (аның мәгънәсе юк).

3 нче мисал. $\log_x(x^2 - 2x + 2) = 1$ тигезләмәсен чишәбез.

Бу тигезләмәне x ның $x > 0$ һәм $x \neq 1$ тигезсезлекләре (x — логарифмик функциянең нигезе) һәм $x^2 - 2x + 2 = x$, ягъни $x^2 - 3x + 2 = 0$ тигезлеге үтәлерлек кыйммәтләре генә канәгатьләндерә. Табылган квадрат тигезләмәнең тамырлары 1 һәм 2. Ләкин $x = 1$ бирелгән тигезләмәнең чишелеше була алмый. Димәк, бары тик 2 саны гына бирелгән тигезләмәнең чишелеше була ала.

4 нче мисал. $\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > -2$ тигезсезлеген чишәбез.

-2 саны $\log_{\frac{1}{3}} 9$ га тигез. Шуңа күрә бирелгән тигезсезлекне $\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9$ рәвешендә күчереп язарга мөмкин. Нигезе $\frac{1}{3}$ булган логарифмик функция билгеләнгән һәм, $\frac{1}{3} < 1$ булганга күрә, R_+ да кими. Димәк, икенче тигезсезлекне бары тик $0 < 5 - 2x < 9$ шарты үтәлә торган x саннары гына канәгатьләндерә, моннан $-2 < x < 2{,}5$.

Шулай итеп, $(-2;\ 2{,}5)$ интервалы бирелгән тигезсезлекнең чишелеше була.

5 нче мисал. $\log_5^2 x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0$ тигезләмәсен чишегез.

Икенче кушылучыда 5 нигезенә күчәбез һәм, $t = \log_5 x$ дип алып, алыштыру ясыйбыз, ул вакытта

$$\log_{\sqrt{5}} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 \sqrt{5}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t.$$

Хәзер бирелгән тигезләмәне $t^2 - 2t - 3 = 0$ рәвешендә язабыз. Әлеге квадрат тигезләмәнең тамырлары 3 һәм -1. Алыштырылган $\log_5 x = 3$ һәм $\log_5 x = -1$ тигезләмәләрен чишеп табабыз: $x = 5^3 = 125$ һәм $x = 5^{-1} = 0{,}2$.

6 нчы мисал. Тигезләмәләр системасын чишәбез:

$$\begin{cases} \lg(y - x) = \lg 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$$

Системаның беренче тигезләмәсе $y - x = 2$ тигезләмәсенә, ә икенчесе $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$ тигезләмәсенә тигезкөчле, өстәвенә $x > 0$ һәм $y > 0$. $y = x + 2$ не $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$ тигезләмәсенә куеп, $x(x + 2) = 48$ не табабыз, моннан $x^2 + 2x - 48 = 0$, ягъни $x = -8$, яки $x = 6$.

$x > 0$ булганлыктан, $x = 6$ һәм ул вакытта $y = 8$ була. Шулай итеп, бирелгән тигезләмәләр системасының бер чишелеше бар: $x = 6$, $y = 8$.

Тагы шуны искәрик: логарифмнар ярдәмендә теләсә нинди $a^x = b$ рәвешендәге күрсәткечле тигезләмәнең тамырын язарга мөмкин (36 нчы пункттагы мисалларны чишкәндә, без моны эшли алмый идек әле). $x = \log_a b$ саны әлеге тамыр була.

7 нче мисал. $5^{1-3x} = 7$ тигезләмәсен чишәбез.

Логарифмның билгеләмәсе буенча $1 - 3x = \log_5 7$ һәм $x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\log_5 7$. ■

Күнегүләр

Тигезләмәләрне чишегез (512—515).

512. а) $9^x = 0,7$; б) $(0,3)^x = 7$; в) $2^x = 10$; г) $10^x = \pi$.

513. а) $\log_5 x = 2$; б) $\log_{0,4} x = -1$; в) $\log_9 x = -\frac{1}{2}$; г) $\lg x = 2$.

514. а) $\log_{\frac{1}{?}}(2x - 4) = -2$; б) $\log_\pi(x^2 + 2x + 3) = \log_\pi 6$;

в) $\log_{0,3}(5 + 2x) = 1$; г) $\log_2(3 - x) = 0$.

515. а) $(0,2)^{4-x} = 3$; б) $5^{x^2} = 7$; в) $3^{2-3x} = 8$; г) $7^{2x} = 4$.

Тигезсезлекне чишегез (516—517).

516. а) $\log_3 x > 2$; б) $\log_{0,5} x > -2$;
в) $\log_{0,7} x < 1$; г) $\log_{2,5} x < 2$.

517. а) $\log_4(x - 2) < 2$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x) > -1$;

в) $\log_5(3x + 1) > 2$; г) $\log_{\frac{1}{7}}(4x + 1) < -2$.

Тигезләмәне чишегез (518—520).

518. а) $\log_a x = 2\log_a 3 + \log_a 5$; б) $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = 2$;
в) $\log_a x = \log_a 10 - \log_a 2$; г) $\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3) = 1$.

519. а) $\frac{1}{2}\log_2(x - 4) + \frac{1}{2}\log_2(2x - 1) = \log_2 3$;

б) $\lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x + 4) = 1$;
в) $\lg(x^2 + 2x - 7) - \lg(x - 1) = 0$;
г) $\log_5(x^2 + 8) - \log_5(x + 1) = 3\log_5 2$.

520.— а) $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} - 1{,}5 = 0$; б) $\lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$;

в) $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$; г) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0$.

521. Тигезләмәләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} x + y = 7, \\ \lg x + \lg y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_4(x + y) = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 x + \log_2 y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

Тигезләмәләрне чишегез (522—524).

522.— а) $\frac{1}{\lg x + 1} + \frac{6}{\lg x + 5} = 1$; б) $\log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{8} - 1}$;

в) $\frac{2\lg x}{\lg(5x - 4)} = 1$; г) $\frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1$.

523.— а) $\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 2 + \log_{\frac{1}{a}} 3$; б) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$;

в) $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6$; г) $\log_{25} x + \log_5 x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{8}$.

524.— а) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$;

б) $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$;

в) $\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = 2x - 4$;

г) $\log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3)$.

Тигезсезлекләрне чишегез (525—528).

525.— а) $\lg(2x - 3) > \lg(x + 1)$;

б) $\log_{0,3}(2x - 4) > \log_{0,3}(x + 1)$;

в) $\lg(3x - 7) \leqslant \lg(x + 1)$;

г) $\log_{0,5}(4x - 7) < \log_{0,5}(x + 2)$.

526.— а) $\log_{0,5} x > \log_2(3 - 2x)$;

б) $\log_\pi(x + 1) + \log_\pi x < \log_\pi 2$;

в) $\lg x + \lg(x - 1) < \lg 6$;

г) $\log_2(x^2 - x - 12) < 3$.

527. а) $\log_2^2 x - \log_2 x \leqslant 6$; б) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 4 > 0$;

в) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$; г) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 9 \leqslant 0$.

528. а) $\log_2 \sin \frac{x}{2} < -1$; б) $|3 - \log_2 x| < 2$;

в) $\log_{\frac{1}{2}} \cos 2x > 1$; г) $|3\lg x - 1| < 2$.

Тигезләмәләр системасын чишегез (529—530).

529.— а) $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(x+y)=2,\\ \log_3(x-y)=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=2,\\ \log_{48}x+\log_{48}y=1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}y=2,\\ \log_{\frac{1}{3}}x-\log_{\frac{1}{3}}y=4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=1+\lg 13;\\ \lg(x+y)=\lg(x-y)+\lg 8.\end{cases}$

530.— а) $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81,\\ \lg(x+y)^2-\lg x=2\lg 3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50,\\ \lg(x+y)+\lg(x-y)=2-\lg 5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576,\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\lg x-\lg y=\lg 15-1,\\ 10^{\lg(3x+2y)}=39.\end{cases}$

40. Кире функция турында төшенчә

1. Функцияләрнең кайтмалылыгы. Төрле функцияләрне тикшерү барышында сез берничә тапкыр шундый мәсьәлә чиштегез: бирелгән x_0 аргументының кыйммәте буенча f функциясенең кыйммәтен исәпләп чыгарырга. Еш кына моңа кире мәсьәләне дә тикшерергә туры килә: аргументның f функциясе бирелгән y_0 кыйммәтен кабул иткәндәге кыйммәтен табарга.

1 нче мисал. $f(x)=kx+b$ $(k\neq 0)$ булсын. x аргументының $f(x)=y_0$ булгандагы кыйммәтен табу өчен, $f(x)=y_0$ тигезләмәсен, ягъни $kx+b=y_0$ тигезләмәсен чишәргә кирәк. Аны чишеп, теләсә нинди y_0 өчен бу тигезләмәнең чишелеше $x=\frac{y_0-b}{k}$ барлыгын һәм бары тик бер генә икәнен беләбез.

2 нче мисал. $f(x)=x^2$ функциясе өчен $y_0>0$ булганда, $f(x)=y_0$ тигезләмәсенең ике чишелеше бар: $x_1=\sqrt{y_0}$, $x_2=-\sqrt{y_0}$ (әгәр $y_0=0$ булса, чишелеше бер: $x_0=0$).

Үзенең һәрбер кыйммәтен билгеләнү өлкәсенең бердәнбер ноктасында кабул иткән функцияне *кайтма функция* дип атыйлар. Шулай итеп, $k\neq 0$ булганда, $f(x)=kx+b$ функциясе кайтма, ә $f(x)=x^2$ функциясе (барлык санлы турыда билгеләнгән) кайтма була алмый.

Искәрмә. Кайтма функция билгеләмәсеннән мондый нәтиҗә чыга: әгәр f функциясе кайтма булып, a саны $E(f)$ кыйммәтләре өлкәсенеке булса, ул вакытта $f(x)=a$ тигезләмәсенең чишелеше була һәм естәвенә бары тик бер генә.

2. Кире функция. f — ирекле кайтма функция булсын. Теләсә нинди y_0 өчен бу функциянең $E(f)$ кыйммәтләре өлкәсендә $D(f)$ билгеләнү өлкәсенеке булган $f(x_0) = y_0$ итәрлек төгәл бер x_0 кыйммәте бар. Һәр y_0 кыйммәтенә x_0 нең әлеге кыйммәтен тиңдәш итеп, билгеләнү өлкәсе $E(f)$ һәм кыйммәтләр өлкәсе $D(f)$ булган яңа g функциясен табабыз. Мәсәлән, кайтма функция $f(x) = kx + b$ $(k \neq 0)$ өчен ирекле y_0 ноктасындагы яңа g функциясенең кыйммәте

$$g(y_0) = \frac{y_0 - b}{k}$$

формуласы белән бирелә.

g функциясенең аргументы өчен үзебез күнеккән x тамгаланышын сайлап,

$$g(x) = \frac{x-b}{k}$$

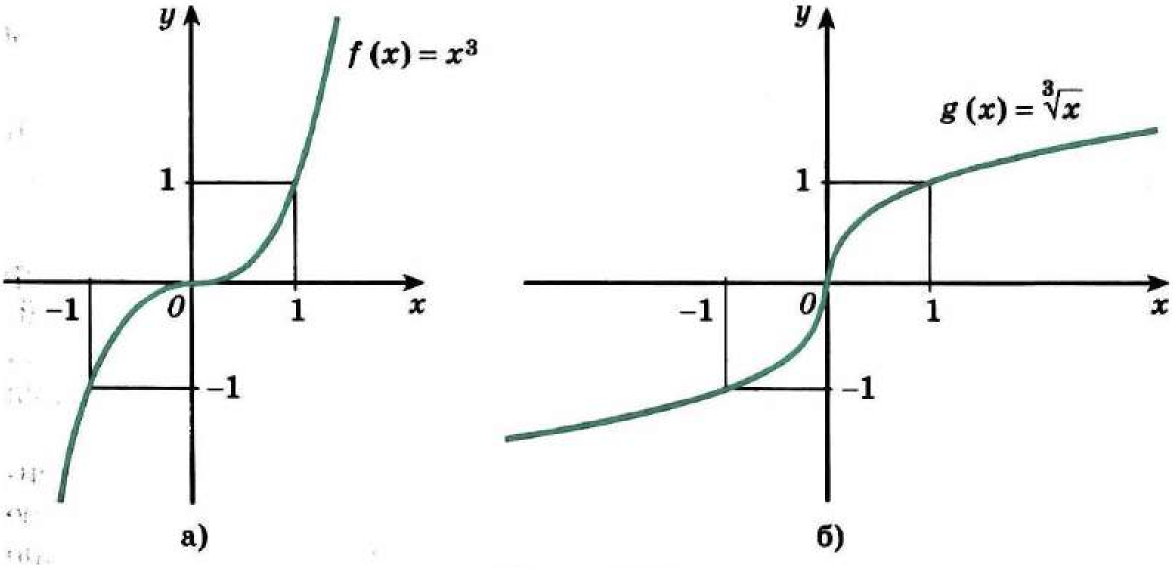
икәнен табабыз.

Әгәр g функциясе кайтма f функциясенең кыйммәтләр өлкәсендәге һәрбер x ноктасында $f(y) = x$ булырлык y кыйммәтен кабул итсә, g функциясе f функциясенә *кире функция*, диләр.

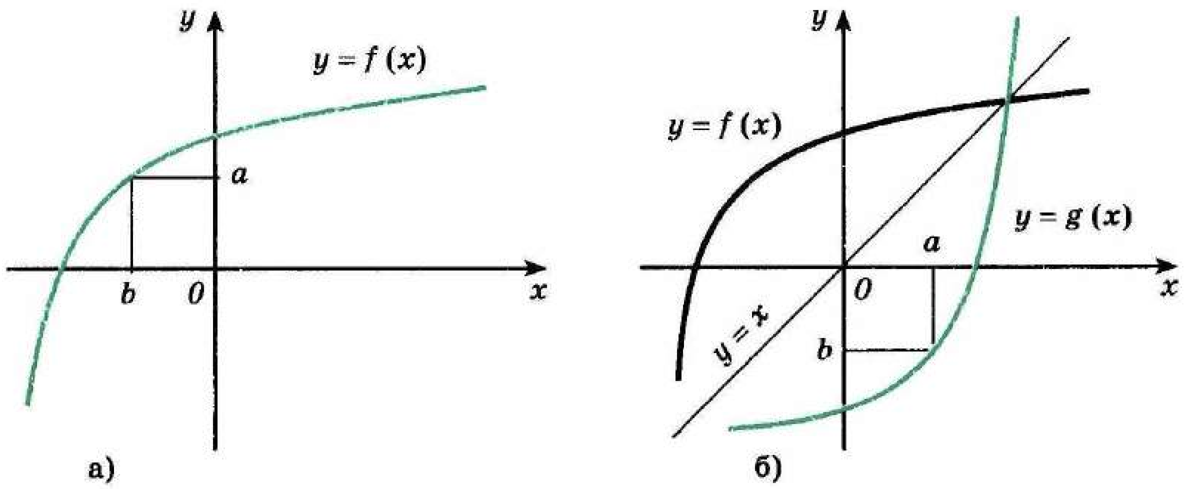
Югарыда күрсәтелгәнчә, $f(x) = kx + b$ $(k \neq 0)$ функциясенә кире функция $g(x) = \frac{x-b}{k}$ функциясе була. Икенче бер мисал тикшерик.

3 нче мисал. $f(x) = x^3$ функциясенең кайтма булуын исбатлыйк һәм f ка кире $y = g(x)$ функциясен бирүче формула чыгарыйк.

Кире функция билгеләмәсе буенча башта $f(y) = x$ тигезләмәсенең xның кыйммәте теләсә нинди булганда да бердәнбер y чишелеше булуын исбатларга кирәк. Әлеге очракта бу тигезләмә $y^3 = x$, һәм аның теләсә нинди x өчен бердәнбер чишелеше $y = \sqrt[3]{x}$ була (8 нче пунктны карагыз). Шуңа күрә $f(x) = x^3$ функциясе кайтма функция



138 нче рәсем



139 нчы рәсем

һәм $g(x) = \sqrt[3]{x}$ функциясе аңа кире функция була. Әлеге функцияләрнең графиклары 138 нче рәсемдә сурәтләнгән.

Әгәр кайтма f функциясенең графигы бирелсә, f ка кире булган g функциясенең графигын түбәндәгечә фикер йөртеп төзү кыен булмас.

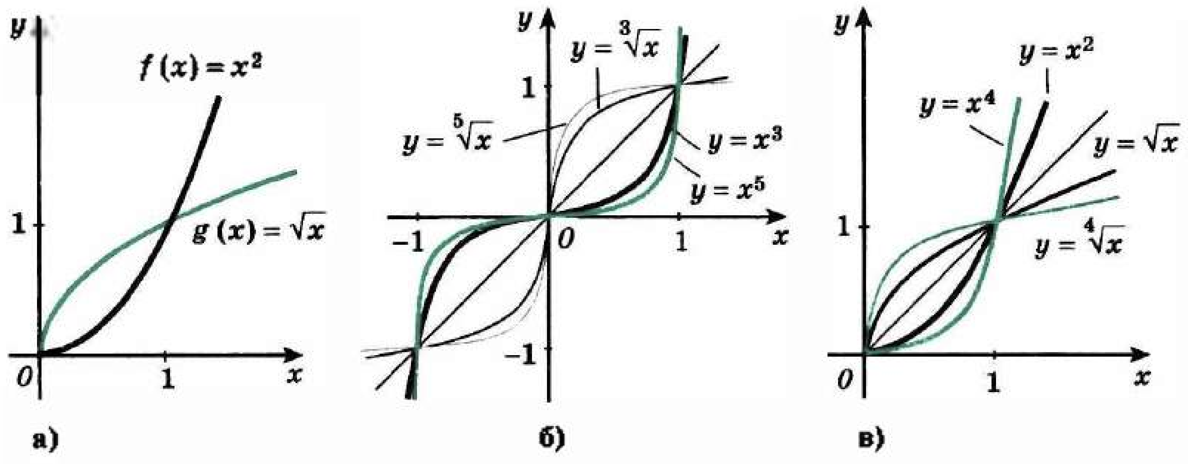
> **f функциясенең һәм аңа кире булган g функциясенең графиклары $y = x$ турысына карата симметрик булалар.**

Бу үзлекне исбатлыйк. f функциясенең графигы буенча f функциясенә кире g функциясенең ирекле a ноктасындагы кыйммәтен график юл белән табарга мөмкин. Моның өчен a координаталы ноктаны гадәттәгечә горизонталь күчәрдә түгел, ә вертикаль күчәрдә алырга кирәк. Кире функция билгеләмәсеннән күренгәнчә, $g(a)$ ның кыйммәте b га тигез (139 нчы *а* рәсем).

Шулай итеп, әгәр дә берникадәр гадәти булмаган координаталар системасы сайлап алынган дисәк (аргумент вертикаль күчәргә салына, ә функциянең кыйммәте горизонталь күчәргә), ул вакытта f ка кире булган g функциясенең графигы — f функциясенең (гадәттәге координаталар системасында төзелгән) графигы ул дип әйтергә мөмкин. g графигын үзебез гадәтләнгән координаталар системасында сурәтләү өчен, f ның графигын $y = x$ турысына карата чагылдырырга кирәк (139 нчы *б* рәсем).

Әгәр g функциясе f функциясенә кире функция булса, ул вакытта f функциясе кайтма була һәм аңа f функциясе кире функция була. Шуңа күрә f һәм g функцияләрен *үзара кайтма* функцияләр дип әйтәләр.

Теорема (кире функция турында). Әгәр f функциясе I аралыгында үссә (яки кимесә), ул кайтма функция була. f ка кире һәм f кыйммәтләре өлкәсендә билгеләнгән g функциясе шулай ук үсә баручы (тиңдәшле рәвештә кими баручы) була.



140 нчы рәсем

Исбатлау. Ачыклык өчен f функциясен үсә баручы функция дип алыйк. f функциясенең кайтмалылыгы — тамыр турындагы теореманың ап-ачык нәтиҗәсе ул (8 нче пункт). Шуңа күрә f ка кире g функциясенен $E(f)$ күплегендә үсүен исбатлыйсы кала.

x_1 һәм x_2 — $E(f)$ нең ирекле кыйммәтләре, $x_2 > x_1$ һәм

$$y_1 = g(x_1),\ y_2 = g(x_2)$$

булсын. Кире функциянең билгеләмәсе буенча

$$x_1 = f(y_1) \text{ һәм } x_2 = f(y_2).$$

Шарттан (f — үсә баручы функция) файдаланып табабыз, $y_1 \geq y_2$ дип алу $f(y_1) \geq f(y_2)$ нәтиҗәсенә, ягъни $x_1 \geq x_2$ гә китерә. Бу $x_2 > x_1$ фаразына каршы килә. Шуңа күрә $y_2 > y_1$, ягъни $x_2 > x_1$ шартыннан $g(x_2) > g(x_1)$ булуы күренә.

Нәкъ менә шуны исбатларга кирәк иде дә.

4 нче мисал. Югарыда әйтеп үтелгәнчә, $f(x) = x^2$ функциясе кайтма функция түгел. Ләкин $[0; \infty)$ аралыкта $f^*(x) = x^2$ формуласы белән билгеләнгән f^* функциясе әлеге аралыкта үсә һәм, димәк, кире функция була. $g(x) = \sqrt{x}$ функциясе f^* функциясенә кире була. Бу функцияләрнең графиклары 140 нчы *а* рәсемдә сурәтләнгән.

Гомумән, $f(x)$ функциясе теләсә нинди натураль n өчен $[0; \infty)$ аралыкта үсә һәм шуңа күрә кире функциягә ия. $g(x) = \sqrt[n]{x}$ функциясе $f(x) = x^n$ функциясенә кире функция була. n ның кайбер кыйммәтләре өчен әлеге функцияләрнең графиклары 140 нчы *б*, *в* рәсемнәрдә сурәтләнгән.

Күнегүләр

Бирелгән f функциясенә кире булган g функциясен бирүче формуланы чыгарыгыз. g функциясенең билгеләнү өлкәсен һәм кыйммәтләре өлкәсен күрсәтегез (531—532).

531. — а) $f(x) = 2x + 1$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$;

в) $f(x) = -2x + 1$; г) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$.

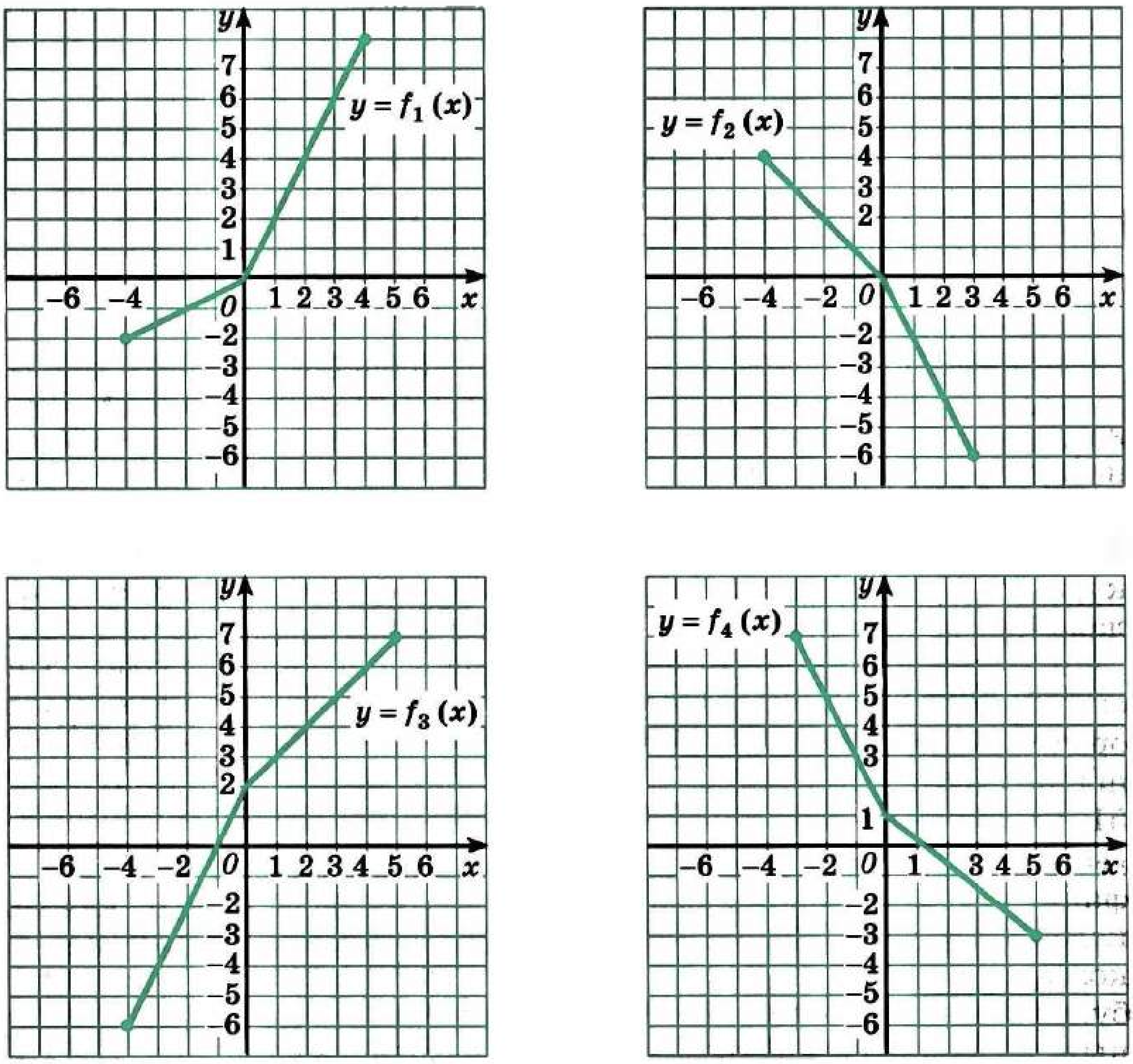
532. — а) $f(x) = -\frac{1}{x}$; б) $f(x) = 2x^2$ $(x \geqslant 0)$;

в) $f(x) = \frac{x}{x+2}$; г) $f(x) = \sqrt{x+1}$.

533. — f ка кире функциянең графигын төзегез:

а) $f(x) = 2x^3 + 1$; б) $f(x) = (x+1)^2$, $x \in (-\infty; -1]$;

в) $f(x) = -2x^3 + 1$; г) $f(x) = (x-1)^2$, $x \in [1; \infty)$.



141 нче рәсем

534.— f функциясенең графигы буенча (141 нче рәсем) f ка кире булганда, g функциясенең -2, 1 һәм 3 нокталарындагы кыйммәтләрен табыгыз. g функциясенең графигын төзегез, аның билгеләнү өлкәсен һәм кыйммәтләре өлкәсен күрсәтегез:

а) $f(x) = f_1(x)$; б) $f(x) = f_2(x)$;
в) $f(x) = f_3(x)$; г) $f(x) = f_4(x)$.

Күрсәтелгән аралыкта f функциясенең кире функциягә ия булуын исбатлагыз. f функциясенә кире функциянең графигын төзегез (535—536).

535.— а) $f(x) = x^2 + 1,\ x \leqslant 0$; б) $f(x) = 2x,\ (-\infty;\ \infty)$;
в) $f(x) = \sqrt[4]{x},\ x \geqslant 0$; г) $f(x) = x^3 + 1,\ (-\infty;\ \infty)$.

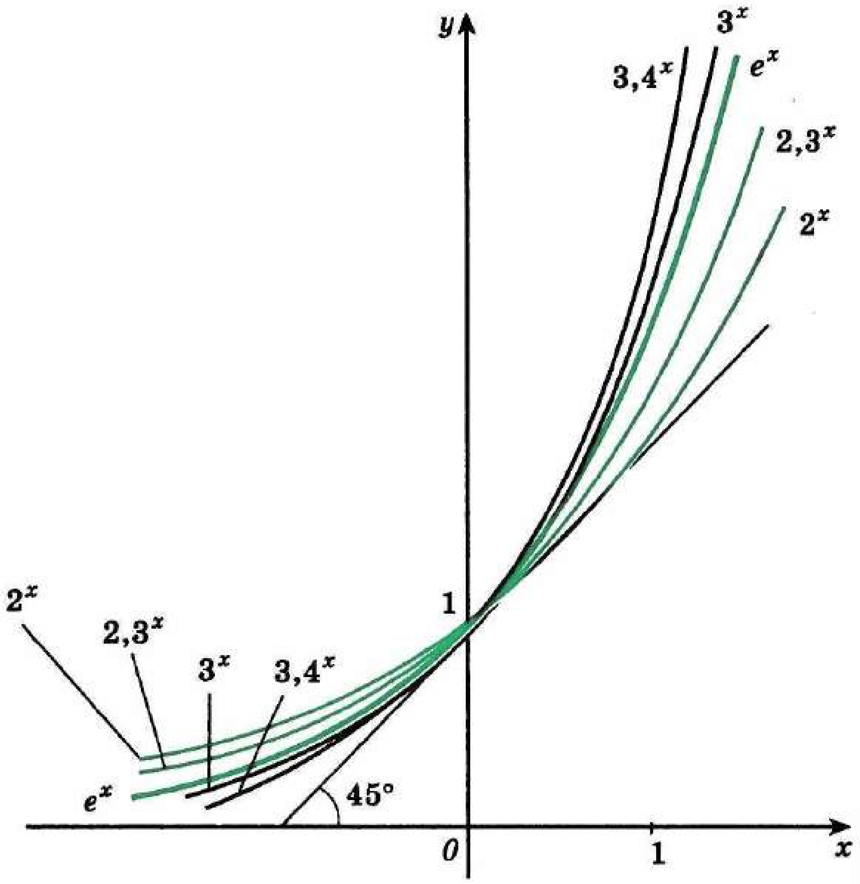
536.— а) $f(x) = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;
в) $f(x) = \cos x,\ x \in [0;\ \pi]$; г) $f(x) = \operatorname{ctg} x,\ x \in (0;\ \pi)$.

§ 11.
Күрсәткечле һәм логарифмик функциянең чыгарылмасы

41. Күрсәткечле функциянең чыгарылмасы

1. *e* саны. Алдагы пунктларда күрсәткечле функциянең графиклары һәр ноктасында орынма үткәрергә мөмкин булган шома сызыклар (сыныксыз) рәвешендә бирелде. Ә функция графигының x_0 ноктасы аша орынма үткәрергә мөмкин булуы — әлеге функцияне x_0 ноктасында дифференциаллап була дигән сүз. Шуңа күрә күрсәткечле функция барлык нокталарда да дифференциаллана дип фараз итү табигый.

$a = 2;\ 2{,}3;\ 3;\ 3{,}4$ өчен $y = a^x$ функциясенең берничә графигын сызыйк (142 нче рәсем) һәм аңа абсциссасы 0 булган ноктада орынмалар үткәрик. Бу орынмаларның абсциссалар күчәренә авышу почмаклары тиңдәшле рәвештә якынча 35°, 40°, 48° һәм 51° ка тигез, ягъни a ның үсүе белән $y = a^x$ функциясенең графигына $M(0;\ 1)$ ноктасында үткәрелгән орынманың почмакча коэффициенты әкренләп $\operatorname{tg} 35°$ тан $\operatorname{tg} 51°$ ка кадәр арта. a ны 2 дән 3 кә кадәр арттыра барганда, a ның аңа тиңдәш орынманың почмакча коэффициенты 1 гә тигез (ягъни авышу почмагы 45° ка тигез) булырлык кыйммәте табылуы үзеннән-үзе аңлашыла. Бу фаразның төгәл әйтелеше (без аны исбатламыйча гына кабул итәбез) түбәндәгечә:



142 нче рәсем

$y = e^x$ күрсәткечле функциясенең 0 ноктасында 1 гә тигез чыгарылмасы, ягъни

$$\Delta x \text{ 0 гә омтылганда, } \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} \to 1 \qquad (1)$$

булырлык 2 дән зуррак һәм 3 тән кечерәк e саны бар.

Искәрмә. e санының иррациональ икәнлеге һәм шуңа күрә периодик булмаган чиксез унарлы вакланма рәвешендә язылуы исбат ителгән. Электроник хисаплау машиналары ярдәмендә e санының ике меңнән дә артыграк унарлы тамгалары табылган. Бу вакланманың беренче тамгалары түбәндәгечә: $e = 2{,}718281828459045...$.

e^x функциясен еш кына *экспонента* дип атыйлар.

2. Күрсәткечле функциянең чыгарылма формуласы.

1 нче теорема. ***e^x күрсәткечле функциясе билгеләну өлкәсендәге һәр ноктада дифференциаллана һәм***

$$(e^x)' = e^x.$$

Исбатлау. Башта $y = e^x$ функциясенең x_0 ноктасында үсемтәсен табыйк:

$$\Delta y = e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}\cdot e^{\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1).$$

(1) шарттан файдаланып, Δx 0 гә омтылганда язабыз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} \to e^{x_0}.$$

Чыгарылма билгеләмәсе буенча моннан теләсә нинди x өчен $y' = e^x$, ягъни $(e^x)' = e^x$ икәнлеге килеп чыга.

1 нче мисал. $y = e^{5x}$ функциясенең чыгарылмасын табабыз:

$$(e^{5x})' = e^{5x} \cdot (5x)' = 5e^{5x}.$$

e саны — уңай һәм 1 гә тигез булмаган сан, шуңа күрә логарифмнар e нигезе буенча билгеләнә.

> Билгеләмә. ***e* нигезе буенча логарифм *натураль логарифм*** (ln дип тамгалана) **дип атала:**
>
> $$\ln x = \log_e x. \qquad (2)$$

Төп логарифмик бердәйлек буенча теләсә нинди уңай a саны өчен $e^{\ln a} = a$. Шуңа күрә a^x күрсәткечле функция

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} \qquad (3)$$

рәвешендә языла ала.

Хәзер a ның ирекле рәвештә алынган кыйммәте өчен күрсәткечле функциянең чыгарылмасы формуласын чыгарыйк.

> 2 нче теорема. ***a^x* күрсәткечле функциясе билгеләнү өлкәсенең һәр *x* ноктасында дифференциаллана һәм**
>
> $$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (4)$$
>
> ***була.***

Исбатлау. (3) формуладан катлаулы функциянең чыгарылмасы турындагы теорема буенча күрсәткечле функциянең һәр ноктада дифференциаллануын күрәбез:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a. \qquad (5)$$

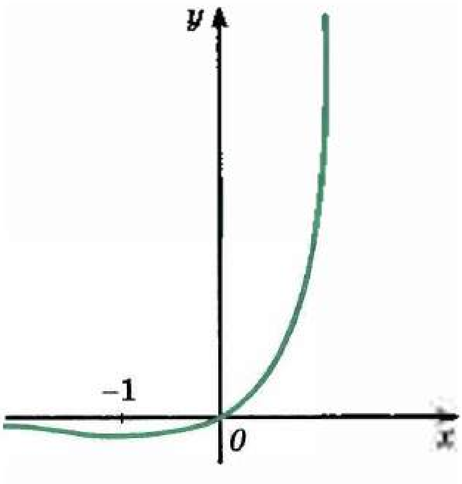
> Нәтиҗә. Күрсәткечле функция үзенең билгеләнү өлкәсенең һәр ноктасында өзлексез, ягъни $x \to x_0$ гә омтылганда, $a^x \to a^{x_0}$.

Бу күрсәткечле функциянең дифференциаллануыннан һәм дифференциаллана торган функциянең өзлексезлеге турындагы леммадан чыга (120 нче биткә карагыз).

2 нче мисал. $y = 2^x$ һәм $y = 5^{-3x}$ функцияләренең чыгарылмаларын табыйк.

(4) формула буенча:

$$(2^x)' = 2^x \ln 2; \; (5^{-3x})' = (-3) \cdot 5^{-3x} \ln 5.$$



143 нче рәсем

3 нче мисал. $f(x) = xe^x$ функциясен үсүгә (кимүгә) һәм экстремумга тикшерик.

Бу функциянең чыгарылмасын табабыз:

$$f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = \\ = e^x + xe^x = e^x(1 + x).$$

Теләсә нинди x өчен $e^x > 0$ булганлыктан, f тамгасы $(1 + x)$ ның тамгасы белән туры килә. Димәк, $(-1; \infty)$ аралыкта $f'(x) > 0$ була, шуңа күрә $[-1; \infty)$ аралыкта f үсә. $(-\infty; -1)$ аралыкта $f'(x) < 0$, шуның өчен $(-\infty; -1)$ аралыкта f кими.

$x_0 = -1$ ноктасында чыгарылма үзенең тамгасын минустан плюска үзгәртә, димәк, $x_0 = -1$ минимум ноктасы була.

Функциянең графигы 143 нче рәсемдә күрсәтелгән.

3. Күрсәткечле функциянең башлангыч функциясе.

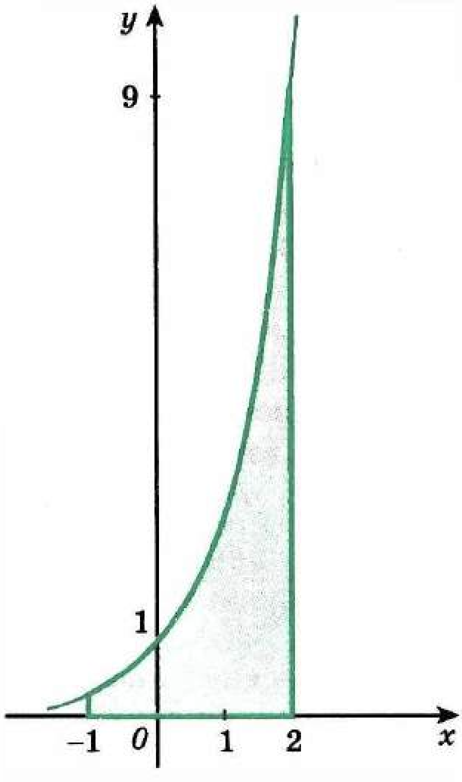
3 нче теорема. ***R* да a^x функциясе өчен $\frac{a^x}{\ln a}$ функциясе башлангыч функция була.**

Чыннан да, $\ln a$ — даими һәм шуңа күрә теләсә нинди x өчен

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(a^x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x\ln a = a^x.$$

Моның белән $\frac{a^x}{\ln a}$ ның a^x функциясе өчен ***R*** да башлангыч функция икәнлеге исбатланды. Ә $(e^x)'$ тигезлегеннән исә барлык x өчен e^x ның ***R*** да e^x функциясе өчен башлангыч функция икәнлеге чыга.

4 нче мисал. а) $f(x) = 5^x$; б) $g(x) = 4\cdot 2^x$; в) $h(x) = 4e^{3x} - 10\cdot 0{,}6^x$ функцияләре өчен башлангыч функцияләрне табыйк.



144 нче рәсем

3 нче теоремадан һәм башлангыч функцияләрне табу кагыйдәләреннән файдаланып, җавапларны язабыз:

а) $F(x) = \frac{5^x}{\ln 5} + C$;

б) $G(x) = \frac{4\cdot 2^x}{\ln 2} + C$;

в) $H(x) = \frac{4}{3}e^{3x} - 10\cdot\frac{0{,}6^x}{\ln 0{,}6} + C$.

5 нче мисал. $y = 3^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ сызыклары белән чикләнгән фигураның мәйданын табыйк.

Әлеге фигура — кәкресызыклы трапеция (144 нче рәсем). Шуңа күрә аның мәйданы S ны кәкресызыклы трапециянең мәйданы формуласы буенча табабыз:

$$S = \int_{-1}^{2} 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{\ln 3} - \frac{3^{-1}}{\ln 3} = \frac{26}{3\ln 3}. \blacksquare$$

Күнегүләр

537. Натураль логарифмнар таблицасы буенча (яки калькулятор ярдәмендә) табыгыз:

а) $\ln 3$, $\ln 5{,}6$, $\ln 1{,}7$; б) $\ln 8$, $\ln 17$, $\ln 1{,}3$;
в) $\ln 2$, $\ln 35$, $\ln 1{,}4$; г) $\ln 7$, $\ln 23$, $\ln 1{,}5$.

Һәр функциянең чыгарылмасын табыгыз (538—539).

538. а) $y = 4e^x + 5$; б) $y = 2x + 3e^{-x}$;
в) $y = 3 - \frac{1}{2}e^x$; г) $y = 5e^{-x} - x^2$.

539. а) $y = e^x \cos x$; б) $y = 3e^x + 2^x$;
в) $y = 3^x - 3x^2$; г) $y = x^2e^x$.

540. Абсциссасы x булган ноктада f функциясенең графигына орынма тигезләмәсен языгыз:

а) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 1$;
в) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$; г) $f(x) = 2^{-x}$, $x_0 = 1$.

541. Түбәндәге функция өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыгыз:

а) $f(x) = 5e^x$; б) $f(x) = 2 \cdot 3^x$;
в) $f(x) = 4^x$; г) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 1$.

542. Интегралны исәпләп чыгарыгыз:

а) $\int_0^1 0{,}5^x dx$; б) $\int_0^1 e^{2x} dx$; в) $\int_{-2}^{1} 2^x dx$; г) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} 3^x dx$.

Һәр функциянең чыгарылмасын табыгыз (543—544).

543. а) $y = e^{x^2} \sin \frac{x}{2}$; б) $y = 7^{\frac{x}{2}} \operatorname{tg} 3x$;
в) $y = e^{\sqrt{x}} \cos 2x$; г) $y = 2^{-x} \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

544. — а) $y = \frac{x^e}{4^x+5}$; б) $y = \frac{e^{-x}}{x^2+2}$;

в) $y = \frac{3^x}{2^x+5^x}$; г) $y = \frac{0{,}3^{-x}}{\sqrt{x}+0{,}5}$.

545. — Түбәндәге функцияне үсүгә (кимүгә) һәм экстремумга тикшерегез:

а) $f(x) = xe^{3x}$; б) $f(x) = x^2\,2^{-x}$;

в) $f(x) = xe^{-x}$; г) $f(x) = x^4\,0{,}5^x$.

546. — Түбәндәге функция өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыгыз:

а) $f(x) = e^{3-2x}$; б) $f(x) = 2\cdot 0{,}9^x - 5{,}6^{-x}$;

в) $f(x) = 2^{-10x}$; г) $f(x) = e^{3x} + 2{,}3^{1+x}$.

Түбәндәге сызыклар белән чикләнгән фигураның мәйданын табыгыз (547—548).

547. — а) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; б) $y = 3^x$, $y = 9^x$, $x = 1$;

в) $y = 2^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$; г) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 1$.

548. — а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 3$, $x = 1$; б) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = e$;

в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 1$, $x = -2$; г) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 4^x$, $y = 4$.

42. Логарифмик функциянең чыгарылмасы

Башта логарифмик функциянең һәр ноктада дифференциаллануын күрсәтик. $y = \log_a x$ һәм $y = a^x$ функцияләренең графиклары $y = x$ турысына карата симметрик. Күрсәткечле функция теләсә нинди ноктада дифференциаллана, ә аның чыгарылмасы нульгә әйләнми, шуңа күрә күрсәткечле функциянең графигы һәр ноктада горизонталь булмаган орынмага ия. Шуңа күрә логарифмик функциянең графигы да теләсә нинди ноктада вертикаль булмаган орынмага ия. Ә бу исә логарифмик функциянең үзенең билгеләнү өлкәсендә дифференциаллануына тигез көчле.

Хәзер билгеләнү өлкәсендәге теләсә нинди x өчен *логарифмик функциянең чыгарылмасы*

$$\ln' x = \frac{1}{x} \qquad (1)$$

формуласы буенча табылуын исбатлыйбыз.

Төп логарифмик бердәйлек буенча барлык уңай x өчен $x = e^{\ln x}$, ягъни әлеге тигезлекнең уңында һәм сулында R_+ да билгеләнгән бер үк функция тора. Шуңа күрә x һәм $e^{\ln x}$ функцияләренең чыгарылмалары тигез, ягъни

$$x' = (e^{\ln x})'. \qquad (2)$$

$x' = 1$ икәне билгеле. Уң кисәкнең чыгарылмасын катлаулы функциянең чыгарылмасын табу кагыйдәсе буенча һәм 1 нче теорема буенча (41 нче пункт) исәпләп чыгарабыз: $(e^{\ln x})' = e^{\ln x}\ln' x = x\ln' x$. Табылган чыгарылмаларны (2) тигезлеккә куябыз: $1 = x \ln' x$, моннан $\ln' x = \frac{1}{x}$.

1 нче мисал. Функцияләрнең чыгарылмаларын табыйк: а) $y = \ln(5 + 2x)$; б) $y = \log_3 x$; в) $y = \log_7 2x$.

а) $(\ln(5 + 2x))' = \frac{1}{5+2x} \cdot (5 + 2x)' = \frac{2}{5+2x}$;

б) $(\log_3 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)' = \frac{1}{x\ln 3}$;

в) $(\log_7(2x))' = \left(\frac{\ln 2x}{\ln 7}\right)' = \frac{2}{2x\ln 7} = \frac{1}{x\ln 7}$.

2 нче мисал. $f(x) = x^2\ln x$ функциясен үсүгә, кимүгә, экстремумга тикшерик һәм аның графигын төзик.

$x > 0$ булганда, функция билгеләнә. Бу функциянең чыгарылмасын табабыз:

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = 2x\left(\ln x + \frac{1}{2}\right).$$

$x > 0$ булганга күрә, чыгарылманың тамгасы $\left(\ln x + \frac{1}{2}\right)$нең тамгасына туры килә. Моннан күренгәнчә, $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty\right)$ аралыкта $f'(x) > 0$ һәм шуңа күрә $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty\right)$ аралыкта функция үсә; $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ аралыкта чыгарылма тискәре, шуңа күрә f $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ аралыкта кими. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ноктасында чыгарылма үзенең тамгасын плюска үзгәртә, димәк, бу — минимум ноктасы: $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$.

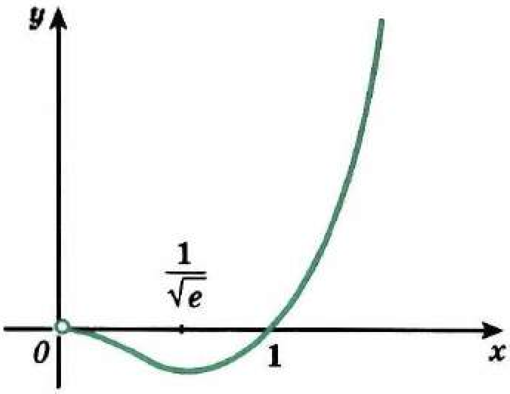
Функция графигының эскизы 145 нче рәсемдә бирелгән.

> (1) формула $(0; \infty)$ аралыкта $\frac{1}{x}$ функциясе өчен теләсә нинди башлангыч функциянең $\ln x + C$ рәвешендә языла алуын күрсәтә.

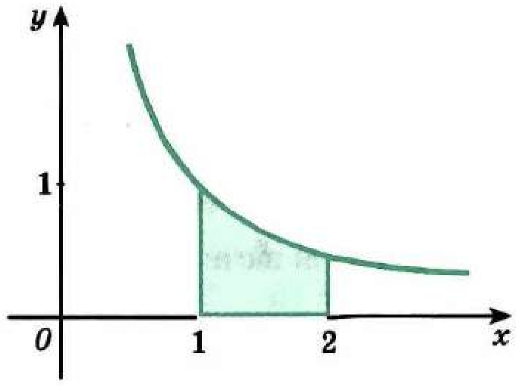
$\frac{1}{x}$ функциясенең $(-\infty; 0)$ аралыкта да башлангыч функциясе була, бу — $\ln(-x)$ функциясе. Чыннан да,

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

$x > 0$ өчен $|x| = x$ һәм $x < 0$ өчен $|x| = -x$ булганлыктан,



145 нче рәсем



146 нчы рәсем

без 0 ноктасын эченә алмаган теләсә нинди аралыкта $\frac{1}{x}$ функциясенең башлангыч функциясе $\ln |x|$ икәнен исбатладык.

3 нче мисал. −3 не эченә алмаган теләсә нинди аралыкта $\frac{1}{x+3}$ функциясе өчен башлангыч функцияләр $\ln|x+3|+C$ га тигез.

$\frac{1}{5x+7}$ функциясе өчен башлангыч функциянең гомуми күренеше ($-\frac{7}{5}$ ноктасын эченә алмаган теләсә нинди аралыкта) $\ln \frac{1}{5}|5x+7|+C$ була.

4 нче мисал. $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ сызыклары белән чикләнгән фигураның мәйданын табыйк (146 нчы рәсем).

$x>0$ булганда, $\ln x$ функциясе $\frac{1}{x}$ өчен башлангыч функция, шуңа күрә безне кызыксындырган кәкресызыклы трапециянең мәйданы

$$S=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

гә тигез.

Күнегүләр

Һәр функциянең чыгарылмасын табыгыз (549—550).

549. а) $y=\ln(2+3x)$; б) $y=\log_{0,3} x+\sin x$;
в) $y=\ln(1+5x)$; г) $y=\lg x-\cos x$.

550. а) $y=x^2\log_2 x$; б) $y=\frac{\ln x}{x}$; в) $y=x\ln x$; г) $y=\frac{x}{\ln x}$.

551. Түбәндәге функция өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыгыз:

а) $f(x)=\frac{3}{7x+1}$; б) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+5}$;

в) $f(x)=\frac{1}{x+2}$; г) $f(x)=\frac{4}{x}$.

552. — Әгәр
а) $f(x) = \ln(x+1)$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \lg x + 2$, $x_0 = 1$;
в) $f(x) = 2\ln x$, $x_0 = e$; г) $f(x) = \log_3(x-1)$, $x_0 = 2$
булса, f функциясенең графигына абсциссасы x_0 булган ноктада үткәрелгән орынманың тигезләмәсен языгыз.

553. — Интегралны исәпләгез:

а) $\int\limits_1^7 \frac{2dx}{x}$; б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{3-2x}$; в) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$; г) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{3x+1}$.

554. — Функциянең чыгарылмасын табыгыз:

а) $y = \frac{\ln(5+3x)}{x^2+1}$; б) $y = \frac{\sqrt{x}}{\lg(1-2x)}$;

в) $y = \frac{x^2}{\ln 5x}$; г) $y = \frac{\log_3 x^2}{x+1}$.

Функцияне үсүгә (кимүгә) һәм экстремумга тикшерегез (555—556).

555. — а) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$; б) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
в) $f(x) = 2x - \ln x$; г) $f(x) = x\ln x$.

556. — а) $f(x) = x\ln^2 x$; б) $f(x) = \frac{2x}{\lg x}$;

в) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; г) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

557. — Түбәндәге сызыклар белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз:

а) $y = \frac{4}{x} + 2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$;

б) $y = -\frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -1$;

в) $y = \frac{1}{2x}$, $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;

г) $y = 3 - \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = -6$, $x = -3$.

43. Дәрәҗәле функция

1. Дәрәҗәле функция һәм аның чыгарылмасы. Теләсә нинди α реаль саны һәм һәр уңай x өчен x^α саны билгеләнгән булуын сез беләсез инде. α санын $(0; \infty)$ аралыкта билгелибез.

> Билгеләмә. $f(x) = x^\alpha$ формуласы белән бирелгән функция *дәрәҗәле* (дәрәҗә күрсәткече α) *функция* дип атала.

Әгәр $\alpha > 0$ икән, дәрәҗәле функция $x = 0$ булганда да билгеләнә, чөнки $0^\alpha = 0$. α бөтен сан булганда, дәрәҗәле функция $f(x) = x^\alpha$ $x < 0$ өчен дә билгеләнә, α җөп булганда, әлеге функция җөп, ә α так булганда, функция так була. Шуңа күрә дәрәҗәле функцияне бары тик $(0; \infty)$ аралыкта гына тикшерү дә җитә.

Курсның алдагы бүлекләрендә сез $y = x^\alpha$ функциясенең чыгарылмасы формуласын бары бөтен дәрәҗә күрсәткечләре һәм шулай ук $\alpha = \frac{1}{2}$ өчен генә таптыгыз. Хәзер безгә формуланы α ирекле булганда чыгарасы кала. Билгеләнү өлкәсендәге теләсә нинди x өчен дәрәҗәле функциянең чыгарылмасы түбәндәгечә булуын исбатлыйк:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \qquad (1)$$

Чыннан да, $x = e^{\ln x}$ булганлыктан, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ була. Моннан катлаулы функциянең чыгарылмасын исәпләү кагыйдәсе буенча табабыз:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

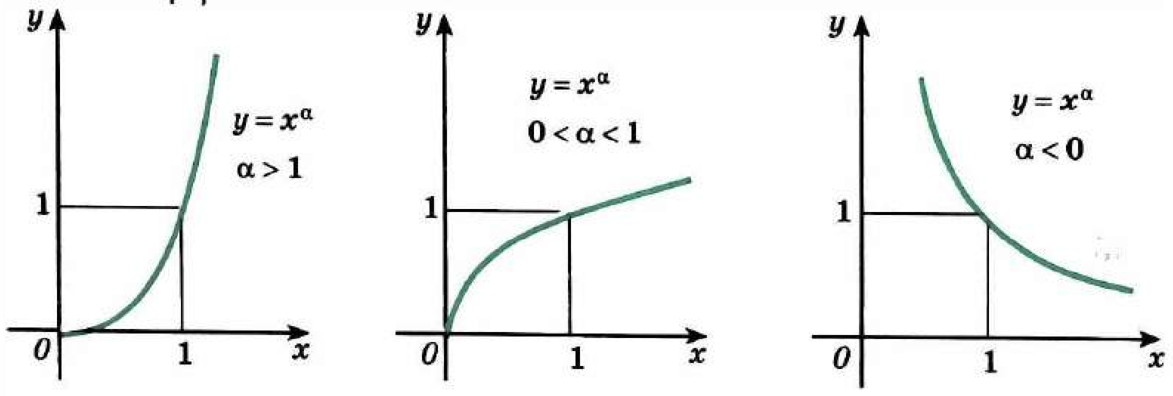
(1) формула исбатланды.

$\alpha < 0$ булганда, дәрәҗәле функция $(0; \infty)$ аралыкта кими, чөнки, $x > 0$ булганда, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} < 0$. $\alpha > 0$ булганда, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} > 0$, шуңа күрә дәрәҗәле функция $x > 0$ булганда үсә. Моннан тыш, $x = 0$ булганда, дәрәҗәле функциянең нульгә тигезлеген һәм $x \to 0$ һәм $x > 0$ булганда, $x^\alpha \to 0$ икәнен истә тотарга кирәк. Шуңа күрә 0 ноктасы үсә бару аралыгына тоташа, ягъни, $\alpha > 0$ булганда, дәрәҗәле функция $[0; \infty)$ аралыкта үсә. α теләсә нинди кыйммәткә ия булганда, дәрәҗәле функция графикларының мисаллары 147 нче рәсемдә китерелгән.

(1) формуласыннан $f(x) = x^\alpha$ дәрәҗәле функциясенең чыгарылмасы дәрәҗәле функция булуы ($f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$) күренә. Дәрәҗәле функциянең башлангыч функциясе белән эш башкача тора.

$\alpha \neq -1$ булганда, $f(x) = x^\alpha$ дәрәҗәле функциясенең башлангыч функцияләренең гомуми рәвеше $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ икәнен җиңел тикшерергә була.

$\alpha = -1$ булганда, билгеле булганча, f ның башлангыч функциясе $F(x) = \ln |x| + C$ була.



а) б) в)

147 нче рәсем

2. Дәрәҗәле функциянең кыйммәтен исәпләп чыгару.

$$(1+\Delta x)^{\alpha} \approx 1+\alpha\,\Delta x \qquad (2)$$

якынча формуласын чыгарабыз.

$f(x)=x^{\alpha}$ функциясен тикшерәбез һәм $x_0=1$ һәм $x=1+\Delta x$ өчен 20 нче пункттан билгеле булган $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x$ (3) формуласыннан файдаланып табабыз: $f(x_0)=f(1)=1$, $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, моннан $f'(x_0)=f'(1)=\alpha\cdot 1^{\alpha-1}=\alpha$. (3) формула буенча

$$f(x)=(1+\Delta x)^{\alpha}\approx 1+\alpha\,\Delta x.$$

Барыннан да еш бу формуланы тамырларны исәпләү өчен кулланалар. $\alpha=\frac{1}{n}$ дип алып табабыз:

$$\sqrt[n]{1+\Delta x}=(1+\Delta x)^{\frac{1}{n}}\approx 1+\frac{\Delta x}{n}. \qquad (4)$$

Мисал. Якынча кыйммәтләрне исәплибез:

а) $\sqrt[4]{1,08}$; б) $\sqrt[3]{27,03}$; в) $\sqrt[10]{1000}$.

(4) формуладан файдаланабыз:

а) $\sqrt[4]{1,08}=(1+0,08)^{\frac{1}{4}}\approx 1+\frac{1}{4}\cdot 0,08=1,02$;

б) $\sqrt[3]{27,03}=\sqrt[3]{27\left(1+\frac{0,03}{27}\right)}=3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{0,03}{27}}\approx 3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{0,03}{27}\right)\approx$

$\approx 3,0011$. $\sqrt[3]{27,03}$ нең өтердән соң сигез тамгалы кыйммәте түбәндәгечә: $\sqrt[3]{27,03}\approx 3,0011107$;

в) $2^{10}=1024$ икәнен беләбез. Ул вакытта: $\sqrt[10]{1000}=$

$=\sqrt[10]{2^{10}-24}=2\cdot\sqrt[10]{1-\frac{24}{2^{10}}}\approx 2\cdot\left(1-\frac{24}{10\cdot 2^{10}}\right)\approx 1,995.$

Күнегүләр

f функциясенең графигын төзегез һәм аның чыгарылмасын табыгыз (558—559).

558. а) $f(x)=x^{-\frac{3}{2}}$; б) $f(x)=x^{\sqrt{3}}$;

в) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$; г) $f(x)=x^{-\sqrt{5}}$.

559. а) $f(x)=x^{-e}$; б) $f(x)=\left(\frac{x}{3}\right)^{-\lg 5}$;

в) $f(x)=x^{\pi}$; г) $f(x)=(2x)^{\ln 3}$.

(4) формула ярдәмендә якынча кыйммәтләрне исәпләп чыгарыгыз (560—561).

560. — а) $24^{\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt[4]{625\cdot 3}$; в) $\sqrt[3]{81}$; г) $\sqrt[4]{48}$.

561. — а) $\sqrt[3]{30}$; б) $\sqrt[4]{90}$; в) $\sqrt{9,02}$; г) $\sqrt[5]{33}$.

562. — I аралыгында f функциясенең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтен табыгыз:

а) $f(x)=x^{\frac{2}{5}}$, $I=[1;\,32]$; б) $f(x)=x^{-\frac{4}{3}}$, $I=\left[\frac{1}{8};\,27\right]$;

в) $f(x)=x^{-4}$, $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$; г) $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$, $I=\left[\frac{1}{16};\,81\right]$.

563. — Түбәндәге функция өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыгыз:

а) $f(x)=-\frac{1}{2}x^{-\sqrt{2}}$; б) $f(x)=x^{2\sqrt{3}}$;

в) $f(x)=3x^{-1}$; г) $f(x)=x^{e}$.

564. — Интегралны исәпләп чыгарыгыз:

а) $\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx$; б) $\int_1^8 \frac{4dx}{x^{\frac{1}{3}}}$; в) $\int_e^{e^2} 2x^{-1}dx$; г) $\int_{16}^{81} 5x^{\frac{1}{4}}dx$.

565. — Түбәндәге сызыклар белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз:

а) $y=x^{\sqrt{2}}$, $y=0$, $x=1$; б) $y=x^{\sqrt{3}}$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{2}$;

в) $y=x^{-0,8}$, $y=0$, $x=1$, $x=32$;

г) $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=3$, $x=5$.

566. — Миллиметрлы кәгазьдә $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$ $(x\geqslant 0)$ функцияләренең графикларын төзегез.

1) График ярдәмендә

а) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{2,5}$; в) $\sqrt[3]{2,5}$, $\sqrt[4]{3}$;

г) $\sqrt{2,5}$, $\sqrt[4]{2}$ нең якынча кыйммәтләрен табыгыз.

2) Әлеге тамырларның кыйммәтләрен калькулятор ярдәмендә табыгыз.

3) Аларның якынча кыйммәтләрен (4) формуланы файдаланып исәпләп чыгарыгыз. Күрсәтмә: $2,5=1,6^2-0,06$;

$2,5=1,3^3+0,303$; $2,5=1,25^4+\frac{15}{256}$; $2=1,4^2+0,04$;

$3=1,4^3+0,256$; $3=1,3^4=0,1439$.

4) Табылган нәтиҗәләрне чагыштырыгыз.

567.— $f(x)=x^{\sqrt{5}}$ функциясенең түбәндәге үзлекләргә ия булуы дөресме?

а) Билгеләнү өлкәсендә очларында функция төрле тамгалы кыйммәтләр кабул итә алган кисемтәне табарга була.

б) Җөп функция була. в) Экстремумнары бар.

г) Функциянең иң кечкенә кыйммәт ала торган x_0 ноктасы бар.

44. Дифференциаль тигезләмәләр турында төшенчә

1. Турыдан-туры интеграллау. Табигать белеме мәсьәләләрен чишү барышында еш кына кайбер функциянең чыгарылмаларын (беренче, икенче һ. б.) бу функциянең үзе һәм бәйсез үзгәрешле белән ялгаучы бәйләнешләр килеп чыга. Мәсәлән, Ньютонның икенче законы буенча даими m массалы материаль нокта туры буенча хәрәкәт иткәндә, $F=ma$ формуласы дөрес була, биредә F — хәрәкәтне барлыкка китерүче көч, a — ноктаның тизләнеше. F көче бары тик вакыт t га гына бәйле булсын, ягъни $F=F(t)$. Тизләнешнең вакыт буенча алынган координатаның икенче чыгарылмасы икәнен искә алып, $(a(t)=x''(t))$, $x(t)$ функциясенә карата дифференциаль тигезләмә табабыз:

$F(t)=mx''(t)$, ягъни $x''(t)=\frac{F(t)}{m}$, моны чишү өчен башта $x'(t)$ ны $\frac{F(t)}{m}$ функциясенең башлангыч функциясе буларак, ә аннан соң $x(t)$ ны да $v(t)=x'(t)$ функциясенең башлангыч функциясе буларак табабыз. Гомуми чишелеш ирекле ике константага бәйле. Аларны табу өчен, гадәттә, координатаны һәм тизлекне нинди дә булса t вакыты моментында бирәләр.

1 нче мисал. Авырлык көче тәэсирендә вертикаль рәвештә хәрәкәт иткәндә берәмлек массалы ноктаның координатасы $h(t)$ дифференциаль тигезләмәне канәгатьләндерә (Oz күчәре вертикаль рәвештә аска юнәлгән):

$$h''(t)=g.$$

Бу тигезләмәнең гомуми чишелеше түбәндәге рәвештә була:

$h(t)=h_0+v_0t+\frac{gt^2}{2}$, биредә $h_0=h(0)$, $v_0=v(0)$.

h_0 һәм v_0 не биреп, без бердәнбер чишелеш табабыз.

Гомумән, f функциясе өчен F башлангыч функциясен *иң гади дифференциаль тигезләмә*

$$F'(x)=f(x) \quad (1)$$

нең чишелеше итеп карап була, биредә $f(x)$ — бирелгән функция, $F(x)$ — әлеге тигезләмәнең чишелеше.

2. Күрсәткечле үсүнең һәм күрсәткечле кимүнең дифференциаль тигезләмәсе. Физика, техника, биология һәм социаль фәннәрнең күп кенә мәсьәләләрен чишү

$$f'(x) = k\, f(x) \qquad (2)$$

дифференциаль тигезләмәсен канәгатьләндерүче функцияне табу мәсьәләсенә кайтып кала, биредә k — нинди дә булса константа.

Күрсәткечле функциянең чыгарылмасы формуласын белгәндә,

$$f(x) = Ce^{kx} \qquad (3)$$

рәвешендәге теләсә нинди функция (2) тигезләмәнең чишелеше булуына төшенү читен түгел, биредә C — константа. C ирекле булганга күрә, (2) дифференциаль тигезләмәнең чишелешләре чиксез күп.

(2) тигезләмәнең (3) рәвешендәге функциядән башка чишелешләре юклыгын исбат итик. Моның өчен (2) тигезләмәне канәгатьләндерүче ирекле f функциясен һәм ярдәмче функциясен тикшерербез:

$$g(x) = f(x)e^{-kx}. \qquad (4)$$

g функциясенең чыгарылмасын табыйк:

$$g'(x) = f'(x)e^{-kx} + f(x)\,(e^{-kx})' = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx}.$$

$f'(x)$ урынына аның (2) тигезләмәдәге $kf(x)$ кыйммәтен куйсак табабыз:

$$g'(x) = kf(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = 0.$$

g функциясенең чыгарылмасы нульгә тигез, шуңа күрә барлык x лар өчен $g(x) = C$. (4) тигезләмәдән

$$f(x)e^{-kx} = C, \text{ моннан } f(x) = Ce^{kx}$$

ны табабыз, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Искәрмә. Югарыда китерелгән фикер йөртүләрдә без f функциясе билгеләнгән һәм барлык санлы турыда (2) тигезләмәне канәгатьләндерә дип исәпләдек. Конкрет мәсьәләләрдә еш кына (2) тигезләмәне бары тик берникадәр аралыкта гына канәгатьләндерә торган функцияләрне карарга туры килә. Мондый очракта (2) тигезләмәне кулланырга мөмкин булган аралыкта гына (3) формула мәсьәләнең гомуми чишелешен бирүе табигый.

(2) дифференциаль тигезләмәнең мәгънәсе түбәндәгедән гыйбарәт: функциянең x ноктасында үзгәрү тизлеге функциянең бу ноктадагы кыйммәтенә пропорциональ. Бу тигезләмә практик мәсьәләләрне чишкәндә еш очрый.

2 нче мисал. (Радиоактив таркалу.) Вакытның башлангыч моментында радиоактив матдәнең массасы

$$m(0) = m_0 \qquad (5)$$

булсын. Матдә массасы $m(t)$ ның кимү тизлеге t вакыты үтү белән матдә микъдарына пропорциональ булуы, ягъни $m'(t) = -km(t)$

тигезләмәсе үтәлүе, биредә $k > 0$, эксперименталь рәвештә исбатланган. Югарыда әйтелгәннәрдән чыгып, $m(t) = Ce^{-kt}$ ны язабыз. C константасы (5) шарттан табыла. Атап әйтсәк, $t = 0$ булганда

$$m_0 = m(0) = Ce^{-k \cdot 0} = C, \text{ ягъни } C = m_0.$$

Нәтиҗәдә:

$$m_0(t) = m_0e^{-kt}. \quad (6)$$

Бу мисал типик: дифференциаль тигезләмәнең чиксез күп сандагы чишелешләре арасыннан бер чишелешен аерып алу өчен, гадәттә, тагы «башлангыч шарт»ны (безнең очракта (5) шартны) кабул итү сорала.

Радиоактив матдә массасының ике тапкыр кимүе өчен киткән вакыт аралыгы T ны бу матдәнең *ярымтаркалу периоды* дип атыйлар. T ны белгәндә, k ны табарга мөмкин.

$$m(T) = \frac{1}{2}m_0, \text{ ягъни } m_0e^{-kT} = \frac{1}{2}m_0$$

булганга, $e^{-kT} = \frac{1}{2}$.

Димәк, $e^{kT} = 2$, $kT = \ln 2$, моннан $k = \frac{\ln 2}{T}$.

Мәсәлән, радий өчен $T \approx 1\,550$ ел. Шуңа күрә (әгәр вакыт еллар белән исәпләнсә) $k = \frac{\ln 2}{1550} \approx 0{,}000447$. Миллион елдан соң радийның башлангыч массасы m_0 дән бары тик $m(10^6) = m_0e^{-447} \approx 0{,}6 \cdot 10^{-194}\, m_0$ генә кала.

3. Гармоник тирбәнешләр. f функциясе чыгарылмасы f' тан чыгарылманы f функциясенең *икенче чыгарылмасы* дип атыйлар һәм f'' дип тамгалыйлар («эф ике штрих» дип укыла). Мәсәлән:

$$\sin' x = \cos x, \ \sin'' x = \cos' x = -\sin x,$$
$$\cos' x = -\sin x, \cos'' x = -\sin' x = -\cos x. \quad (7)$$

Икенче чыгарылма функциянең торышын җентекләбрәк тикшерергә ярдәм итә. Беренче чыгарылма — функциянең үзгәрү тизлеге, ә икенче чыгарылма әлеге тизлекнең үзгәрү тизлеге ул.

(7) формуланы анализлаганнан соң, синус һәм косинусның икенче чыгарылмалары функцияләрнең үзләреннән бары тик тамга белән генә аерылып торуларын күрергә мөмкин. Икенче төрле әйтсәк, бу функцияләрнең икесе дә t аргументының барлык кыйммәтләре өчен

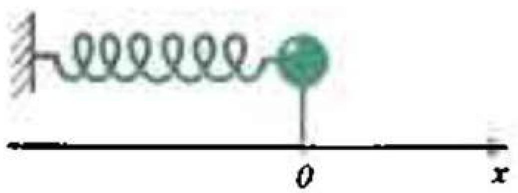
$$f''(t) = -f(t)$$

тигезләмәсен канәгатьләндерәләр.

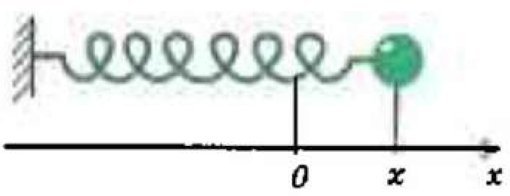
Физикада, аерым алганда механикада,

$$f''(t) = -\omega^2 f(t) \quad (8)$$

тигезләмәсен канәгатьләндерүче f функцияләре зур роль уйный, биредә ω — уңай константа.



148 нче рәсем



149 нчы рәсем

Механикадан шундый рәвештәге тигезләмәгә китерә торган мәсьәләне тикшерәбез. m массалы шарчыкка горизонталь урнаштырылган пружина беркетелсен, ә аның икенче очы стенага беркетелсен (148 нче рәсем), һәм тигезләнеш торышында шарчык үзәгенең координатасы x нульгә тигез булсын. Үзәкне $x \neq 0$ координаталы ноктага күчергәндә, шарчыкны тигезләнеш торышына кайтарырга омтылучы көч барлыкка килә. Гук законы буенча бу көч x ның күчешенә пропорциональ, ягъни $F = -kx$, биредә k — унай константа (149 нчы рәсемне карагыз). Ньютонның икенче законы буенча $F = ma$, шуңа күрә туры буенча хәрәкәт иткәндә тизләнеш координатаның икенче чыгарылмасы булуын исәпкә алсак:

$$ma(t) = mx''(t) = F, \text{ ягъни } x''(t) = -\frac{k}{m}x(t) \text{ була.}$$

Икенче төрле әйткәндә, шарчык үзәгенең хәрәкәте эластиклык көчләре тәэсирендә, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ булганда, (8) тигезләмәгә бәйләнгән.

(8) тигезләмәгә тиңдәшле рәвештә вакытка карап үзгәрүчән физик зурлыкның гармоник тирбәнеш (7 нче пунктны карагыз) башкаруын күрсәтик. (8) тигезләмәнең үзен *гармоник тирбәнешләрнең дифференциаль тигезләмәсе* дип атыйлар.

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (9)$$

функциясенең, A һәм φ теләсә нинди даими зурлык булганда, (8) тигезләмәнең чишелеше икәнен тикшерик. Чыннан да, катлаулы функция чыгарылмасы өчен булган формуладан файдаланып табабыз:

$$f'(t) = -A\,\omega\sin(\omega t + \varphi),$$
$$f''(t) = -A\,\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 f(t).$$

Киресе дә дөрес: (8) тигезләмәнең теләсә нинди чишелеше (9) рәвешендәге функция була, өстәвенә, гадәттә, $A \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$ не сайлыйлар. Моны исбатлау мәктәп курсына керми.

Әгәр башлангыч шартлар $f(0) = y_0$, $f'(0) = v_0$ бирелгән булса, ирекле константалар A һәм φ не билгеләргә мөмкин.

4. Атмосферада җисемнәрнең төшүләре. Тагы да катлаулырак мисал тикшерик. Җисем атмосферада төшкән вакытта һава каршылыгын исәпкә алырга кирәк. Эксперименталь юл белән һаваның каршылык көче хәрәкәт тизлегенә пропорциональ, ягъни җисемгә тәэсир итә торган F көче $F(t) = mg - kh'(t)$ га тигез икәне расланган, биредә m — җисемнең массасы, g — ирекле төшү

тизләнеше, $h(t)$ — туры өстендәге координата (Oh күчәре вертикаль рәвештә аска юнәлгән), k — пропорциональлек коэффициенты. Ньютонның икенче законы буенча $F = ma$, шуңа күрә

$$mz''(t) = mg - kz'(t), \text{ ягъни } z''(t) = g - \frac{k}{m}z'(t)$$

тигезләмәсен табабыз. Бу тигезләмәне хәрәкәт тизлеге $v(t) = z'(t)$ га карата дифференциаль тигезләмә буларак тикшерү җайлы:

$$v'(t) = g - bv(t), \text{ биредә } b = \frac{k}{m} > 0. \qquad (10)$$

Бу тигезләмәне таныш рәвешкә китерү өчен, яңа билгесез $y(t) = \frac{g}{b} - v(t)$ функциясен кертәбез, ул вакытта $y'(t) = \left(\frac{g}{b} - v(t)\right)' = -v'(t)$ һәм (10) тигезләмә $-y'(t) = by(t)$, ягъни $y'(t) = -by(t)$рәвешендә языла, аның чишелеше безгә билгеле: $y(t) = Ce^{-bt}$. Димәк,

$$v(t) = \frac{g}{b} - y(t) = \frac{g}{b} - Ce^{-bt}.$$

$y = e^{-bt}$ функциясе $\mathbf{R}$ да кими, бу вакытта аның кыйммәте t үскәндә чикләнмәгән рәвештә кими (ягъни теләсә нинди C өчен, $t \to \infty$ омтылганда, $Ce^{-bt} \to \infty$ кә). Бу исә тизлекнең пропорциональлек коэффициенты зурлыгы k га һәм масса m га бәйле булган $\frac{g}{b}$ даими кыйммәтенә якынлашуын аңлата. Мәсәлән, озакка сузылган сикерүләрдә, парашют ачылмаган очракта, бу тизлек якынча 50 м/с ка тигез, ә парашютчының җиргә тигәндәге тизлеге (k шактый зур була) якынча 4—5 м/сәг.

Бу мисаллар дифференциаль тигезләмәләрнең ни дәрәҗәдә көчле тикшерү аппараты булуларын аңларга мөмкинлек бирә. Еш кына нинди дә булса процесс белән идарә итүче элементар законнар дифференциаль тигезләмәләр рәвешендә языла, ә бу процессның вакыт үтү белән ничек барышын ачыклау өчен, әлеге дифференциаль тигезләмәләрне чишәргә туры килә.

Күнегүләр

568.— $y(t)$ функциясенең бирелгән дифференциаль тигезләмәнең чишелеше булуын тикшерегез:

а) $y(t) = 3\cos(2t + \pi)$, $y'' = -4y$;

б) $y(t) = 4\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$, $y'' = -\frac{1}{4}y$;

в) $y(t) = 2\cos 4t$, $y'' + 16y = 0$;

г) $y(t) = \frac{1}{3}\sin(0{,}1t + 1)$, $y'' + 0{,}01y = 0$.

569.— $y = 5e^{3x}$ функциясенең $y' = 3y$ тигезләмәсен канәгатьләндерүен исбатлагыз.

570.— $y = 7e^{-2x}$ функциясенең $y' = -2y$ тигезләмәсен канәгатьләндерүен исбатлагыз.

571.— $y = 3e^{-7x}$ функциясенең $y' = -7y$ тигезләмәсен канәгатьләндерүен исбатлагыз.

572.— Дифференциаль тигезләмәнең нинди дә булса нульдән үзгә чишелешен табыгыз:

а) $y'' = -25y$; б) $\frac{1}{9}y'' + 4y = 0$;

в) $4y'' + 16y = 0$; г) $y'' = -\frac{1}{4}y$.

573.— Гармоник тирбәнешнең дифференциаль тигезләмәсен языгыз:

а) $x = 2\cos(2t - 1)$; б) $x = 6{,}4\cos\left(0{,}1t + \frac{\pi}{7}\right)$;

в) $x = 4\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $x = 0{,}71\sin(0{,}3t - 0{,}7)$.

574.— Ике гармоник тирбәнеш $x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ һәм $x_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ нең суммасы ешлыкларның чагыштырмасы r рациональ сан булганда һәм бары шул вакытта гына (ягъни $\frac{\omega_1}{\omega_2} = r$) периодик функция булганын исбатлагыз.

575.— m мг C радиеннан t мин радиоактив таркалудан соң n мг калган. C радиенең ярымтаркалу периодын табыгыз.

576.— Радиоактив таркалу башланганда 1 г A радие була. Әгәр аның ярымтаркалу периоды 3 мин ка тигез булса, ничә минуттан соң ул 0,125 г калыр?

577.— Радиоактив матдәнең ярымтаркалу периоды бер сәгатькә тигез. Ничә сәгатьтән соң аның микъдары 10 тапкыр кимер? Әгәр радийның ярымтаркалу периоды 1550 елга тигез булса, 1000 елдан соң радийның күпме өлеше калуын исәпләп чыгарыгыз.

578.— Бер җисемнең температурасы 200°, ә икенчесенең — 100°. Бу җисемнәр 0° температуралы һавада 10 мин торганнан соң, беренче җисем — 100° температурага кадәр, ә икенчесе 80° температурага кадәр суынган. Күпме вакыттан соң җисемнәрнең температуралары тигезләшер? (Җисемнең $T(t)$ температурасы $T'(t) = k\,(T - T_1)$ тигезләмәсен канәгатьләндерә, биредә T_1 — әйләнә-тирәдәге температура.)

579.— Ике җисемнең дә температуралары 100 әр градус. 0° температуралы һавада 10 мин торганнан соң бер җисемнең температурасы 80°, ә икенчесенең 64° була. Суына башлаганнан соң ничә минут үткәч, аларның температуралары аермасы 25° булыр?

580.— Моторлы көймә 30 км/сәг тизлек белән хәрәкәт итә. Моторны сүндергәннән соң 3 мин үткәч, көйманең тизлеге күпме булыр? (Көйманең тизлеге $v(t)$ (м/мин белән) $v'(t) = -kv(t)$, дифференциаль тигезләмәсен канәгатьләндерә, биредә $k = \frac{5}{3}$. Шуннан файдаланыгыз.)

Тарихтан мәгълүматлар

1. Терминнар һәм тамгаланышларның килеп чыгуы турында. Күп кенә мәсьәләләрнең чишелеше тигез тапкырлашучыларны тапкырлауга китерә. Натураль күрсәткечле дәрәҗә турындагы төшенчә Борынгы Грециядә үк барлыкка килә *(санның квадраты* аңлатмасы — квадратның мәйданын исәпләгәндә, ә *санның кубы* кубның күләмен тапканда барлыкка килә). Ләкин a^4, a^5 тибындагы хәзерге тамгаланышларны XVII гасырда Декарт керткән.

Вакланма күрсәткечле дәрәҗә һәм вакланма күрсәткечле дәрәҗәләр өстендә гамәлләрнең иң гади кагыйдәләре XIV гасырда француз математигы Н. Орем (1323—1382) хезмәтләрендә очрый. Билгеле булганча, Шюке (1445—1550 еллар чамасы) тискәре һәм нуль күрсәткечле дәрәҗәләрне тикшергән. С. Стевин $a^{\frac{1}{n}}$ не $\sqrt[n]{a}$ тамыры итеп тәкъдим иткән. Ләкин системалы рәвештә рациональ күрсәткечләрне беренче булып Ньютон куллана.

Немец математигы М. Штифель (1487—1567), $a \neq 1$ булганда, $a^0 = 1$ гә билгеләмә биргән һәм күрсәткеч (немецча *Exponent* сүзенең хәрефләрдән торган тәрҗемәсе) атамасын керткән. Немецча *potenzieren дәрәҗәгә күтәрүне* аңлата.

($\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow a^{\log_a f(x)} = a^{\log_a g(x)}$) тибындагы күчешләрдә еш кулланыла торган *потенцирлау* сүзе шуннан чыккан.) *Exponenten* термины үз чиратында грек сүзенең бик үк төгәл булмаган тәрҗемәсеннән алынган. Диофант аның аша билгесез зурлыкның квадратын билгеләгән.

XII гасырда кертелгән *радикал* һәм *тамыр* терминнары ике кыйммәткә ия булган *як* һәм *тамыр* мәгънәсендәге латин сүзе *radix* тан алынган. Грек математиклары «тамыр алырга» диясе урынга «квадратның ягын аның бирелгән зурлыгы (мәйданы) буенча табарга» дип әйткәннәр. Тамыр тамгасы $\sqrt{}$ символы рәвешендә беренче тапкыр 1525 елда барлыкка килә. Хәзерге заман

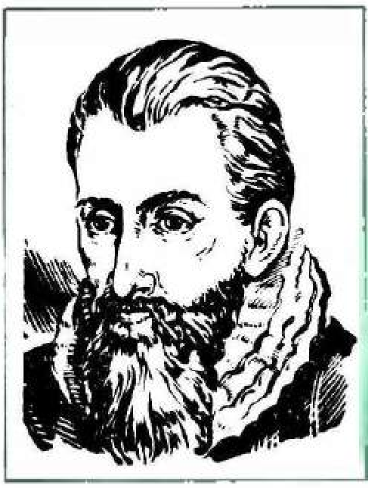
символы Декарт тарафыннан кертелә, ул горизонталь сызык өсти. Ньютон исә тамыр күрсәткечләрен өсти: $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$.

Логарифм сүзе грек сүзләре λόγος (сан) һәм ἀριθμός (чагыштырма) сүзләреннән алынган һәм, димәк, саннарның чагыштырмасы дип тәрҗемә ителә. Логарифмнарны уйлап табучы (1594 ел) Дж. Непер тарафыннан мондый исемнең сайлап алынуы логарифмнарның берсе арифметик прогрессия буыны, ә икенчесе геометрик прогрессия буыны булган (түбәндәгене карагыз) ике санны чагыштырганда барлыкка килүе белән аңлатыла. Нигезе e булган логарифмнарны Спейдел (1619 ел) кертә. Ул $\ln x$ функциясе өчен беренче таблицаларны төзи. Шактый соңрак барлыкка килгән *натураль* (табигый) атамасы әлеге логарифмның «табигыйлеге белән» аңлатыла. Н. Меркатор (1620—1687) әлеге исемне бирүче $\ln x$ ның $y = \frac{1}{x}$ гиперболасы астындагы мәйдан икәнен әйтә. Ул шулай ук *гиперболик* исемен тәкъдим итә.

2. Логарифмнар тарихыннан. XVI гасыр дәвамында төрле мәсьәләләрне һәм беренче чиратта турыдан-туры практикада кулланыла торган астрономия мәсьәләләрен (аерым алганда, судноларның торышын йолдызлар һәм Кояш буенча билгеләгәндә) чишү барышында якынча исәпләүләр үткәрү белән бәйле эшләрнең күләме бик тиз арта. Тапкырлау һәм бүлү операцияләрен (гамәлләрен) башкарганда иң зур кыенлыклар тууын аңлау кыен түгел. Әлеге операцияләрне, кушу гамәленә китереп, өлешчә гадиләштереп караулар (мәсәлән, 1 дән алып 100 000 гә кадәр бөтен саннарның квадратлары таблицалары төзелә, алар ярдәмендә $ab = \frac{1}{4}(a + b)^2 - \frac{1}{4}(a + b)^2$ формуласы буенча тапкырчыгышларны исәпләргә мөмкинлек туа) зур уңыш китерми. Шуңа күрә саннарны тапкырлау һәм бүлү урынына аларның логарифмнарын кушуга һәм алуга китергән логарифмнарны ачу, Лапласның әйтүе буенча, хисаплаучыларның гомерләрен озынайта.

Логарифмнар практикада гаҗәеп киң кулланылыш табалар. Логарифмны уйлап табучылар яңа теорияне тирәнтен өйрәнү белән генә чикләнмиләр. Хисаплаучыларның хезмәт җитештерүчәнлекләрен бик тиз күтәрүче практик кулланма — логарифмнар таблицалары төзиләр. Шуны өстәп әйтергә кирәк: инде 1623 елда ук, ягъни беренче таблицалар басылганнан соң нибары 9 ел үтүгә, инглиз математигы Д. Гантер тарафыннан күп буын хезмәткәрләре өчен эш инструменты саналган беренче логарифмик линейка уйлап чыгарыла. (Соңгы вакытта безнең күз алдыбызда электроник хисаплау һәр җирдә киң таралган вакытта логарифмнарның роле, исәпләүләр җайланмасы буларак, бик нык кими.)

Шотландия математигы Дж. Непер (1550—1617) һәм Швейцария математигы И. Бюрги (1552—1632) бер-берсенә бәйсез рәвештә логарифмнарның беренче таблицаларын төзегәннәр. «Логарифмнарның гаҗәеп таблицаларын тасвирлау» (1614 ел)



Непер Джон
(1550—1617)
Инглиз математигы. Логарифмнарны уйлап табучы, логарифмнарның беренче таблицаларын төзеп, хисаплаучыларның эшен җиңеләйтүче һәм математиканың кулланылышы үсешенә зур өлеш керткән кеше.

һәм «Гаҗәеп логарифмнар таблицаларының төзелеше» (1619 ел) исемендә китап булып чыккан Непер таблицаларына 1 минутлы адым белән 0 дән 90° ка кадәр почмакларның синуслары, косинуслары һәм тангенсларының кыйммәтләре кергән. Бюрги үзенең саннар логарифмнары таблицаларын 1610 елда хәзерләп бетергән, күрәсең, ләкин алар Непер таблицалары басылып чыкканнан соң 1620 елда гына дөнья күрә, шуңа күрә аның таблицалары күзгә ташланмый.

Логарифмнарны уйлап табуның нигезендә яткан мөһим идеяләрнең берсе билгеле була инде. Штифель (1487—1567) һәм башка математиклар

$$\ldots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, a^3, \ldots$$

геометрик прогрессия буыннарын тапкырлау һәм бүлү

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

арифметик прогрессия төзүче күрсәткечләрне кушуга һәм алуга тиңдәш булуга игътибар итәләр.

Ләкин бер идея генә җитми. Мәсәлән, 2 санының бөтен дәрәҗәләр «челтәре» артык сирәк; күп кенә саннар «логарифмнарсыз кала», шул сәбәпле тагын бер идея кирәк була: берәмлеккә бик якын санны дәрәҗәгә күтәрү. $\left(1+\frac{1}{10^n}\right)^n$ һәм $\left(1+\frac{1}{10^n}\right)^{n+1}$ дәрәҗәләре, n ның кыйммәтләре бик зур булганда, үзара якын икәнен күреп, Непер һәм Бюрги охшаш чишелеш кабул итәләр: Непер — нигез итеп $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$ санын, ә Бюрги $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)$ санын ала.

Аларның моннан соң фикер йөртүләре һәм хисаплауларының схемаларын тасвирлауларын сөйләп бирү шактый кыен, чөнки шактый катлаулы аерым моментлар күп һәм, гомумән, XVI гасыр текстлары шактый буталчык. Шуны искәрик: моннан соң Непер — $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ нигезен, ә Бюрги $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$ нигезен ала. Бу — эшнең

асылын үзгәртми (сезгә билгеле булганча, $\log_{a^{10^n}} x = \frac{1}{10^n} \log_a x$ шуңа күрә әлеге үзгәртүләр логарифмда өтернең урынын күчерүгә генә китерә), шулай да хисаплауны һәм таблицаларның үзләрен берникадәр гадиләштерергә мөмкинлек бирә.

Шулай итеп, логарифмнарны уйлап табучыларның икесе дә, нигездә, $\left(1+\frac{1}{M}\right)^M$ рәвешендә дәрәҗәләрне тикшерү максатка ярашлы булыр дигән нәтиҗә ясыйлар, биредә M — бик зур сан.

Мондый рәвешле саннарны тикшерү $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ буларак билгеләнгән сезгә билгеле e санын белдерер (әзлеклелек чикләмәсенең билгеләмәсе «Тарихтан мәгълүматлар»да бирелгән, III бүлектә). Логарифмнарның нигезе сыйфатында e санын кабул итү идеясенә күп калмый (Бюргиның логарифмнар таблицалары нигезе өченче тамгага кадәр төгәллек белән e га туры килә. Неперның логарифмнары таблицаларының нигезе $\frac{1}{e}$ санына якын).

Унарлы логарифмнарның беренче таблицалары (1617 ел) Непер киңәше буенча инглиз математигы Г. Бриггс (1561—1630) тарафыннан төзелә. Аларның күбесе Бриггс тарафыннан чыгарылган якынча формула

$$\log_{10} a \approx \frac{n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)}{m\left(\sqrt[m]{10}-1\right)}$$

ярдәмендә табыла. m һәм n кыйммәтләре зур булганда, әлеге формула җитәрлек дәрәҗәдә төгәл. Бриггс m һәм n ның кыйммәтләрен икенең дәрәҗәләре рәвешендә алган: бу аңа $\sqrt[n]{a}$ һәм $\sqrt[m]{10}$ исәпләүләрен эзлекле рәвештә квадрат тамыр алуга кайтарып калдырырга мөмкинлек бирә.

Бриггсның икенче идеясе кайбер саннарның унарлы логарифмнарының кыйммәтләрен таблицалар ярдәменнән башка мөстәкыйль рәвештә табарга мөмкинлек бирә. Бөтен сан логарифмасының бөтен өлеше санның үзендәге цифрлар санынннан бергә ким. Шуңа күрә, мәсәлән, өч урынга кадәр төгәллек белән lg2 не табу өчен, 2^{10^3} дәге цифрлар санын табу җитә. Бу бик үк кыен түгел.

Логарифмнар таблицаларын төзегәндә, Непер һәм Бюргиның $y = \log_a x$ функциясе өчен булган ирекле x_0 ноктасындагы Δx һәм Δy үсемтәләре арасындагы бәйләнешне табу зур роль уйнаган. Аларның аңлату системасының детальләренә артык игътибар итмичә, төп нәтиҗәне болай белдерергә мөмкин: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{k}{x}$, биредә k — нинди дә булса константа. Әгәр логарифмнарның нигезе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ дәрәҗәсе булса, биредә n — шактый зур сан, ул вакытта $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{1}{x}$ була.

Δx ны нульгә омтылдырып, $y' = \frac{1}{x}$ дифференциаль тигезләмәсен табабыз, ә аның чишелеше,— белгәнегезчә, $\ln x + C$ функциясе.

$\ln x_0$ нең $\int^{x_0} \frac{dx}{x}$ буларак табылуы баштан ук билгеле, ягъни $\ln x_0$ гипербола, абсциссалар күчәре

һәм $x = 1$, $x = x_0$ турылары белән чикләнгән кәкресызыклы трапециянең мәйданы. Әлеге билгеләмәдән чыгып, сезгә билгеле булган логарифмнарның үзлекләрен чыгару бик үк җиңел булмаган, ләкин сезгә аңлашылырлык мәсьәлә.

Кабатлау өчен сораулар һәм мәсьәләләр

1. 1) Саннан n нчы дәрәҗә тамырга билгеләмә бирегез. n нчы дәрәҗә арифметик тамыр нәрсә ул?

2) Кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[7]{-128}$; г) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; д) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n$.

3) Тигезләмәне чишегез:

а) $x^3 = 125$; б) $x^4 = 64$; в) $x^5 = -\frac{1}{243}$; г) $x^4 = -16$.

2. 1) Арифметик тамырларның төп үзлекләрен әйтегез.

2) Аңлатманың рәвешен үзгәртегез:

а) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[8]{4}$; б) $\frac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[3]{320}}$; в) $\left(\sqrt[6]{\frac{27}{8}}\right)^2$; г) $\sqrt{\frac{a^4b^2}{c^8}}$.

3) Саннарның кайсысы зуррак?

а) $\sqrt[7]{128}$ яки $\sqrt[5]{4}$; б) 2^{100} яки 100^{20};

в) $\sqrt[8]{26}$ яки $\sqrt[4]{5}$; г) $\sqrt[5]{5}$ яки $\sqrt[3]{3}$.

3. 1) Рациональ күрсәткечле дәрәҗәгә билгеләмә бирегез һәм мондый дәрәҗәләрнең төп үзлекләрен әйтегез.

2) Кыйммәтен табыгыз:

а) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt[5]{64} : 2^{-\frac{1}{5}} \cdot \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^6$; в) $16^{-\frac{1}{4}}$; г) $\left(\frac{81}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$.

3) Саннарның кайсысы зуррак?

а) $\sqrt[3]{16}$ яки $2^{\frac{5}{4}}$; б) $3^{-\frac{2}{3}}$ яки $9^{-\frac{3}{4}}$;

в) $0,3^{\frac{4}{7}}$ яки $0,3^{-\frac{4}{7}}$; г) $5^{-\frac{2}{3}}$ яки $5^{-0,6}$.

4. 1) Күрсәткечле функциянең төп үзлекләрен әйтегез.

2) Функциянең графигын төзегез:

а) $y = 4^x$; б) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; в) $y = 6^x$; г) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$.

3) Саннарның кайсысы зуррак?

а) $2^{0,4}$ яки $2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$; б) $1,2^{[illegible]}$ яки $1,2^{[illegible]}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}}$ яки $\left(\frac{1}{3}\right)^{[illegible]}$; г) $0,3^{\pi}$ яки $0,3^{3}$.

5. 1) $a^x = a^c$ ($a > 0$, $a \neq 1$) тигезләмәсенең тамырларын табыгыз.
б) $a^x > a^c$ тигезсезлеген чишегез (ике очракны тикшерегез: $0 < a < 1$ һәм $a > 1$).

2) Тигезләмәне чишегез:

а) $27^x = 9^{\frac{1}{5}}$; б) $9^{x+1} + 3^{x+2} = 18$;

в) $0,5^{x^2+x-2,5} = \sqrt{2}$; г) $3^{x+2} - 3^x = 72$.

3) Тигезсезлекне чишегез:

а) $5^{x^2-1} > \frac{1}{5}$; б) $0,2^{x^2-2} > 5$;

в) $3x < \frac{1}{9}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > 4$.

6. 1) Санның логарифмына билгеләмә бирегез.

2) Табыгыз:

а) $\log_2 16\sqrt{2}$; б) $\log_{0,2} 25$; в) $\lg 0,01$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$.

3) Төп логарифмик бердәйлекне языгыз һәм исәпләгез:

а) $3^{2+\log_3 5}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\log_2 3}$; в) $5^{-1+\log_5 2}$; г) $0,2^{1+\log_{0,2} 5}$.

7. 1) Логарифмнарның төп үзлекләрен санап чыгыгыз.

2) a нигезе буенча аңлатманы логарифмлагыз ($c > 0$, $b > 0$):

а) $a = 2$ булганда $16b^7\sqrt[5]{c}$;

б) $a = 10$ булганда $\frac{c^4}{\sqrt[3]{100b^n}}$;

в) $a = 3$ булганда $\frac{27\sqrt{b}}{c^4}$;

г) $a = 0,7$ булганда $\frac{0,49b^2}{c^5\sqrt{c}}$.

3) а) $\log_3 x = 2\log_3 7 + \frac{2}{3}\log_3 27 - \frac{3}{2}\log_3 16$;

б) $\log_2 x = 2\log_2 5 - \frac{1}{3}\log_2 8 + \log_2 0{,}2$;

в) $\log_5 x = \log_5 1{,}5 + \frac{1}{3}\log_5 8$;

г) $\lg x = 1 + 2\lg 3 - \frac{2}{3}\lg 125$

булса, x ны табыгыз.

8. 1) Логарифмик функциягә билгеләмә бирегез һәм аның төп үзлекләрен санап чыгыгыз.

2) Функциянең графигын төзегез:

а) $y = \log_4 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x - 1)$;

в) $y = \log_5 x$; г) $y = \log_{\frac{1}{4}}(x + 1)$.

3) Кайсы сан зуррак?

а) $\lg 7$ яки $3\lg 2$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ яки $\log_{\frac{1}{3}} 6$;

в) $\log_3 5$ яки $\log_3 6$; г) $\log_2 3$ яки $\log_3 2$.

9. 1) а) $\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) тигезләмәсенең барлык тамырларын күрсәтегез.

б) $\log_a x > \log_a c$ тигезсезлеген чишегез (ике очракны карагыз: $0 < a < 1$, $a > 1$).

2) Тигезләмәне чишегез:

а) $\log_2(x - 15) = 4$; б) $\lg^2 x + 2\lg x = 8$;

в) $\ln^2(x - 2) = 4$; г) $\lg(x^2 - 2x - 4) = \lg 11$.

3) Тигезсезлекне чишегез:

а) $\log_{0,6} x > 2$; б) $\lg x \leqslant -2$;

в) $\ln x \geqslant -3$; г) $\log_7 x < 1$.

10. 1) $y = e^x$, $y = a^x$ функцияләре өчен чыгарылма формуласын языгыз.

2) Функциянең чыгарылмасын табыгыз:

а) $v(x) = 5 - 2e^{4-3x}$; б) $u(x) = 3 \cdot 5^{7x-1}$;

в) $g(x) = e^{-3x}$; г) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$.

3) Түбәндәге функция өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыгыз:

а) $v(x) = e^{5x} - 7e^{-4x}$; б) $u(x) = 5e^{0,7x}$;

в) $g(x) = e^{-3x}$; г) $f(x) = e^{2x}$.

11. 1) $y = \log_a x$ функциясенең чыгарылмасы нинди? $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясе өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыгыз.

2) Функциянең чыгарылмасын табыгыз:

а) $y = x \ln 3x$; б) $y = \log_2 (7 - 2x)$;

в) $y = 2 \log_3 x$; г) $y = \ln \frac{x}{5}$.

3) Түбәндәге функция өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвешен табыгыз:

а) $f(x) = \frac{1}{5x}$; б) $g(x) = \frac{1}{x-2}$; в) $u(x) = \frac{5}{x}$; г) $h(x) = \frac{2}{x+1}$.

12. 1) $y = x^a$ дәрәҗәле функциясенең чыгарылмасы нинди?

2) Түбәндәге функциянең графигын төзегез һәм аның чыгарылмасын табыгыз:

а) $y = x^7$; б) $y = x^{-4}$; в) $y = x^{-0,3}$; г) $y = x^{\sqrt{2}}$.

3) Якынча кыйммәтне табыгыз:

а) $\sqrt[5]{32,02}$; б) $\sqrt[7]{127,9}$; в) $\sqrt[3]{64,3}$; г) $\sqrt[4]{80,6}$.

13. 1) Нинди тигезләмәләрне иррациональ тигезләмәләр дип атыйлар?

2) Тигезләмәне чишегез:

а) $\sqrt{x-3} = 2x - 7$; б) $\sqrt[3]{2x+3} = 2$;

в) $x - \sqrt{x} = 12$; г) $x + 3 = \sqrt{33 + x^2}$.

3) Тигезләмәләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3, \\ x - y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 6, \\ xy = 16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ x - y = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ x^2 y = 12. \end{cases}$

14. 1) Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасының чишелеше дип нәрсәне атыйлар?

2) Тигезләмәләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2^{6y-x} = \frac{1}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^{2x-y} = 0,2 \\ 5^{y-x} = 125; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2xy = 9, \\ 4^{x-2y} = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3^{3x+y} = \sqrt{3}, \\ 5x - 4y = 15. \end{cases}$

3) Тигезләмәләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} x - y = 4, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{x-2y} = 1, \\ \lg x + \lg(y+5) = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_3 (5x - y) = 2, \\ xy = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26, \\ \log_5 x = 1 + \log_5 y. \end{cases}$

V
бүлек

Кабатлауга мәсьәләләр

§ 1.
Реаль саннар

1. Рациональ һәм иррациональ саннар

1. Түбәндәге раслаулар дөресме?
а) Әгәр натураль сан 6 га бүленсә, ул 3 кә бүленә.
б) Әгәр ике санның суммасы җөп сан булса, кушылучыларның һәркайсы җөп сан була.
в) Әгәр ике санның тапкырчыгышы нульгә тигез булса, тапкырлаучыларның һәркайсы нульгә тигез.
г) Әгәр ниндидер санның кубы 8 гә бүленсә, бу җөп сан була.

2. Эзлекле килүче өч натураль сан суммасының 3 кә бүленүен, ә аларның тапкырчыгышының 6 га бүленүен исбатлагыз.

3. 523 санының уң ягына ике сан өстәп языгыз, килеп чыккан бишурынлы сан а) 3 һәм 5 кә; б) 8 һәм 9 га бүленсен.

4. $10^{56}-1$ санының 3 кә һәм 11 гә бүленүен исбатлагыз.

5. Икеурынлы санның берәмлекләр цифры дистәләр цифрыннан 2 берәмлеккә зуррак. Сан үзе 30 дан зуррак һәм 40 тан кечкенәрәк. Бу санны табыгыз.

6. Әгәр $\frac{a}{b}$ вакланмасы кыскартылмас вакланма булса, $\frac{ab}{a+b}$ вакланмасының да кыскартылмас икәнен исбатлагыз.

7. а) $|a|=|-a|$; б) $x\leqslant|x|$; в) $|x|^2=x^2$
икәнен исбатлагыз.

8. Аңлатмаларның кыйммәтләрен табыгыз (8—9).

а) $\dfrac{2{,}75:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot\left(-3\frac{1}{3}\right)}$; б) $\dfrac{3\frac{1}{3}:10+0{,}175:\frac{7}{20}}{1\frac{3}{4}-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}$;

в) $\left(1{,}4-3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2{,}4+3{,}4:2\frac{1}{8}$; г) $\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6-\frac{46}{1+2{,}2\cdot10}}$.

9. а) $\dfrac{0{,}5^2-0{,}5}{0{,}4^2+0{,}1^2+2\cdot0{,}4\cdot0{,}1}$; б) $\dfrac{1{,}2^2-1{,}8^2}{1{,}2\cdot0{,}2-1{,}2\cdot0{,}8}$;

в) $\dfrac{0{,}6^2+0{,}1^2-2\cdot0{,}6\cdot0{,}1}{1{,}5-1{,}5^2}$; г) $\left(1\frac{3}{5}\right)^2-\left(4\frac{5}{8}-2{,}4\right):\frac{5}{8}$.

10. Санның якынча кыйммәте язылышындагы дөрес цифрларны күрсәтегез:
а) $3{,}82 \pm 0{,}1$; б) $1{,}980\cdot10^4 \pm 0{,}001\cdot10^4$;
в) $7{,}891 \pm 0{,}1$; г) $2{,}8\cdot10^4 \pm 0{,}3\cdot10^4$.

11. $(1+x)^n \approx 1+nx$ формуласыннан файдаланып, якынча исәпләп чыгарыгыз:
а) $1{,}002^5$; б) $0{,}997^4$; в) $2{,}004^3$; г) $3{,}01^5$.

12. $a \approx 11{,}5$, $b \approx 3{,}8$ икәне билгеле. а) $a+b$; б) $3a-b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$ аңлатмасының якынча кыйммәтен табыгыз.

13. Гади вакланма рәвешендә языгыз:
а) 2,(3); б) 0,(66); в) 1,0(8); г) 1,(33).

14. а) $\sqrt{5}$; б) $2\sqrt{7}$; в) $\sqrt{5}+1$, г) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ саннарының һәркайсының рациональ сан булмавын исбатлагыз.

15. а) a һәм b — рациональ саннар;
б) a һәм b — иррациональ саннар;
в) a — рациональ, а b иррациональ сан булса, a һәм b саннарының суммасы (тапкырчыгышы) рациональ (иррациональ) сан була дип әйтү дөресме?

16. 0,01 төгәллеккә кадәр табыгыз:
а) $\sqrt{2}+\frac{5}{9}$; б) $\sqrt{5}-\frac{2}{7}$; в) $\sqrt{3}-\frac{5}{6}$; г) $\sqrt{6}-\frac{1}{11}$.

17. Саннарны үсә бару тәртибендә тезегез. Аларның кайсысы — рациональ, ә кайсысы иррациональ сан икәнен күрсәтегез.
а) $\sqrt{2}$; -2; $-1{,}7$; $\frac{\pi}{3}$; б) $\log_2 3$; -1; $\frac{5}{6}$; $-\sqrt{5}$;

в) $0{,}(2)$; $\frac{7}{8}$; $-\frac{\sqrt{5}}{2}$; г) e; $-1{,}(6)$; $\sqrt{10}$; $\lg 100$.

Саннарны чагыштырыгыз (18—19).

18. а) $\dfrac{4}{\lg\frac{1}{3}}$ һәм $\dfrac{7}{\lg\frac{1}{2}}$; б) $\left(\sqrt{5}+2\right)$ һәм $\sqrt{17}$.

в) $\log_3 7$ һәм $\log_7 3$; г) $\left(\sqrt{7}+3\right)$ һәм $\sqrt{31}$.

19. а) $15^{\log_3 10}$ һәм $10^{\log_3 15}$; б) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ һәм $\left(\sqrt{30}-\sqrt{3}\right)$;

в) sin 2,1 һәм sin 7,98; г) $\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)$ һәм $\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)$.

20. Санның рациональлеген исбатлагыз:

а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$;

б) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}+1\right)\left(\sqrt{7}-1\right)$;

в) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\sqrt{35}$; г) $\left(3\sqrt{18}+2\sqrt{8}+4\sqrt{50}\right):\sqrt{2}$.

2. Процентлар. Пропорцияләр

21. Әгәр: а) x саны 320 нең 2,5% ы булса; б) x санының 2,5% ы 75 кә тигез булса; в) 2,8 саны 84 санының ничә процентын тәшкил итсә, x шул процентлар санына тигез була; г) x саны 35 нең 140% ын тәзесә, x санын табыгыз.

22. 1987 елда предприятиенең продукция эшләп чыгаруы — 4% ка, ә икенче елда 8% ка артты. Ике ел вакыт эчендә уртача еллык продукция үсешен табыгыз.

23. Бирелгән дүрт санның беренче өчесе 5, 3, 20 саннарына пропорциональ, ә дүртенче сан өченчесенең 15% ын тәшкил итә. Әгәр икенче сан калганнарының суммасыннан 375 кә кимрәк булса, ул саннарны табыгыз.

24. Көзге-кышкы чорда яшелчәләргә бәя 25% ка артты. Яшелчәләрнең бәясе элеккечә булсын өчен, яз көне аларның бәясен ничә процентка төшерергә кирәк?

25. Пропорциянең билгесез буынын табыгыз:

а) $12:\frac{1}{8}=x:\frac{5}{36}$; б) $x:(-0{,}3)=0{,}15:1{,}5$;

в) $\frac{0,13}{x}=\frac{26}{3\frac{1}{3}}$; г) $\frac{x}{2,5}=\frac{-6,2}{15}$.

26. Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{x-2}{2,5}=\frac{6}{x}$; б) $\frac{x}{x+5}=\frac{4,8}{1,2}$;

в) $\frac{x-3}{x-2}=\frac{6,5}{1,5}$; г) $\frac{4-x}{1,2}=\frac{5}{x+3}$.

27. ABC өчпочмагында AB ягының E ноктасы аша AC ягына параллель итеп туры үткәрелгән.
а) $AB=22{,}5$ см, $AE=18$ см, $BC=15$ см булса, BC ягының туры бүлгән кисемтәләрен;
б) $AB=7{,}5$ см, $AE=5$ см, ә ABC өчпочмагының мәйданы 72 см^2 булса, ABC өчпочмагының бүлгәләнгән фигура мәйданнарын табыгыз.

3. Прогрессияләр

28. Беренче буыны 2 гә, ә җиденче буыны 20 гә тигез булса, арифметик прогрессиянең 20 буынының суммасын табыгыз.

29. 4 һәм 40 саннары арасыннан, бу саннарны да кертеп, арифметик прогрессия төзерлек дүрт сан табыгыз.

30. $\frac{1}{\log_3 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_{12} 2}$ саннары арифметик прогрессиянең эзлекле килүче өч буыны булуын исбатлагыз.

31. Арифметик прогрессиянең беренче һәм бишенче буыннарының суммасы 26 га, ә икенче һәм дүртенче буыннарының тапкырчыгышы 160 ка тигез. Прогрессиянең беренче алты буынының суммасын табыгыз.

32. a, b, c, d саннарының шушы тәртиптә алганда геометрик прогрессия төзүләре билгеле булса, $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2$ аңлатмасын гадиләштерегез.

33. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$ һәм $\frac{1}{2}$ саннарының геометрик прогрессия төзүен исбат итегез.

34. Геометрик прогрессиянең дүртенче буыны икенчесеннән 24 кә зуррак, ә икенче һәм өченче буыннарының суммасы 6 га тигез. Беренче буынны һәм прогрессиянең тапкырлыгын табыгыз.

35. Беренче, икенче һәм соңгы буыннары тиңдәшле рәвештә 3 кә, 12 гә һәм 3072 гә тигез булган чикле геометрик прогрессиянең буыннары санын табыгыз.

36. Чикле геометрик прогрессиянең тапкырлыгы $\frac{1}{3}$ гә тигез, аның дүртенче буыны $\frac{1}{54}$ гә, ә барлык буыннары суммасы $\frac{121}{162}$ гә тигез. Бу прогрессиядә барлыгы ничә буын?

37. Кырыйдагылары суммасы 14 кә, ә уртадагылары суммасы 12 гә тигез һәм беренче өчесе — геометрик прогрессияне, ә соңгы өчесе арифметик прогрессияне төзегән дүрт санны табыгыз.

38. Чиксез кими баручы геометрик прогрессиянең тапкырлыгын һәм суммасын табыгыз. Монда $b_1=\sqrt{3}$, $b_2=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

39. Чиксез кими баручы геометрик прогрессиянең беренче өч буыны суммасы 10,5 кә, ә прогрессия суммасы 12 гә тигез. Аның беренче буынын һәм тапкырлыгын табыгыз.

40. Һәркайсы a нигезле ($a>0$, $a\neq1$) дәрәҗә булган өч сан геометрик прогрессия төзиләр. Әлеге саннарның логарифмнары арифметик прогрессия төзүен исбатлагыз.

§ 2.
Бердәй рәвешүзгәртүләр

4. Алгебраик аңлатмаларның рәвешен үзгәртү

41. Тапкырлаучыларга таркатыгыз.

а) $a^2 + b^2 + 2a - 2b - 2ab$; б) $x^3 + (y - 1)x + y$;

в) $a^6 - 8$; г) $x^4 - x^2(y^2 + 1) + y^2$.

42. а) $n \in N$ булса, $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ ның 24 кә бүленүен;
б) $n \in N$ булса, $(n^2 + 4n + 3)(n^2 + 6n + 8)$ нең 24 кә бүленүен;
в) $n \in N$ булса, $n^3 - n$ ның 6 га бүленүен;
г) $n \in N$, n — җөп сан булса, $n^3 - 4n$ ның 48 гә бүленүен исбатлагыз.

43. Ваклапманы кыскартыгыз:

а) $\dfrac{a^3 + a^2 - a - 1}{a^2 + 2a + 1}$; б) $\dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 + 8x + 16}$;

в) $\dfrac{2a^2 - 5a + 2}{ab - 2b - 3a + 6}$; г) $\dfrac{x^3 - 27}{x^2y + 3xy + 9y}$.

Аңлатмаларны гадиләштерегез (44, 45).

44. а) $\left(m + n - \dfrac{4mn}{m+n}\right) : \left(\dfrac{m}{m+n} - \dfrac{n}{n-m} - \dfrac{2mn}{m^2+n^2}\right)$;

б) $\dfrac{a^3 + b^3}{a+b} : (a^2 - b^2) + \dfrac{2b}{a+b} - \dfrac{ab}{a^2 - b^2}$;

в) $\left(\dfrac{x}{x^2-4} - \dfrac{8}{x^2+2x}\right) \cdot \dfrac{x^2 - 2x}{4 - x} + \dfrac{x+8}{x+2}$;

г) $\left(\dfrac{1}{c^2+3c+2} + \dfrac{2c}{c^2+4c+3} + \dfrac{1}{c^2+5c+6}\right)^2 \cdot \dfrac{(c-3)^2 + 12c}{2}$.

45. а) $\left(\dfrac{3}{2x-y} - \dfrac{2}{2x+y} - \dfrac{1}{2x-5y}\right)^2 : \dfrac{4y^2}{4x^2 - 4y^2}$;

б) $\left(\dfrac{3}{a-3} + \dfrac{4}{a^2-5a+6} + \dfrac{2a}{a-2}\right) : \left(\dfrac{3}{2a+1}\right)^{-1} - \dfrac{a-12}{3(3-a)}$;

в) $\left(\dfrac{x^3-8}{x-2} + 2x\right) \cdot (4 - x^2)^{-1} - \dfrac{x-1}{2-x}$;

г) $\dfrac{k^2}{3+k} \cdot \dfrac{9-k^2}{k^2-3k} + \dfrac{27+k^3}{3-k} : \left(3 + \dfrac{k^2}{3-k}\right)$.

5. Радикаллар һәм вакланма күрсәткечле дәрәҗәләр кергән аңлатмаларның рәвешен үзгәртү

46. **Ваклаучыда иррациональлектән котылыгыз:**

а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; в) $\frac{2}{\sqrt{15}}$; г) $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

47. **Исәпләгез:**

а) $\sqrt{(\sqrt{5}-2,5)^2}-\sqrt[3]{(1,5-\sqrt{5})^3}-1$;

б) $\frac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$;

в) $\left(\sqrt{(\sqrt{2}-1,5)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2+0,75$;

г) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{20}}{2\sqrt{5}+\sqrt{24}}\cdot(11+2\sqrt{30})$.

Аңлатмаларны гадиләштерегез (48—51).

48. а) $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$;

б) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

в) $\frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$;

г) $\left(\frac{\sqrt{c}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}-\frac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}\right)$.

49. а) $\left(\sqrt{k}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+1}{\sqrt[4]{k}+1}\right)^{-1}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}$;

б) $\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

в) $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})\right)\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}+1\right)$;

г) $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{b^5}+\sqrt[4]{a^4b}-\sqrt[4]{ab^4}-\sqrt[4]{a^5}}$.

50. а) $\dfrac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} : \dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1} + \dfrac{2}{x^{-0,5}}$;

б) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - \dfrac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right) : \dfrac{(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$;

в) $\left(\dfrac{2x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)$;

г) $\left(\dfrac{1-c^{-2}}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}} - \dfrac{2c^{\frac{1}{2}}}{c^{2}} + \dfrac{c^{-2}-c}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1+\dfrac{2}{c^{2}}\right)^{-2}$.

51. а) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}-2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b} \cdot a^{-\frac{1}{3}}$;

б) $\left(\dfrac{2\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}} - x - y\right) : \dfrac{y-x}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$;

в) $\dfrac{c-1}{c^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}+1} \cdot c^{\frac{1}{4}}+1$;

г) $\dfrac{3(ab)^{\frac{1}{2}}-3b}{a-b} + \dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{3}+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$.

6. Тригонометрик аңлатмаларның рәвешен үзгәртү

Аңлатмаларны гадиләштерегез (52, 53).

52. а) $\mathrm{tg}^2\,\alpha - \sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\,\alpha\,\sin^2\alpha$;

б) $\sqrt{\sin^2\beta\,(1+\mathrm{ctg}\,\beta)+\cos^2\beta\,(1+\mathrm{tg}\,\beta)}$;

в) $(3\sin\alpha+2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha-3\cos\alpha)^2$;

г) $\dfrac{\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin^2\beta} - \mathrm{ctg}\,\beta\,\cos\beta$.

53. а) $2\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha - \pi) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

б) $\frac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$;

в) $\frac{\operatorname{tg}(\pi - \beta)\cos(\pi - \beta)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{16\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{18}}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)\cos\frac{5\pi}{18}\sin\frac{11\pi}{9}\cos 2\pi}$.

Бердәйлекне исбатлагыз (54, 55).

54. а) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}\beta$; б) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

в) $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{ctg}\alpha$; г) $\frac{\sin\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha$.

55. а) $\pi < \alpha < 2\pi$ булганда, $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}} = \cos\frac{\alpha}{4}$;

б) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ булганда, $\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

в) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ булганда, $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha}} = -\cos\frac{\alpha}{2}$;

г) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ булганда, $\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)$.

56. **Тигезлекнең дөреслеген исбатлагыз:**

а) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$;

б) $\operatorname{tg} 20° - 4\sin 20°\sin 50° = -2\sin 20°$;

в) $\frac{1}{\sin 10°} - 4\sin 70° = 2$;

г) $\cos 20° + 2\sin^2 55° - \sqrt{2}\sin 65° = 1$.

57. **Тигезлекнең дөреслеген исбатлагыз:**

а) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ булганда, $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2$;

б) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)}+2\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant 2\sqrt{3}$;

в) $(1+\sin\varphi+\cos\varphi)\ (1-\sin\varphi+\cos\varphi)\ (1+\sin\varphi-\cos\varphi)\times$
$\times(\sin\varphi+\cos\varphi-1)\leqslant 1$;
г) $2\sin 4\alpha\sin 2\alpha+\cos 6\alpha\geqslant -1$.

Исәпләгез (58, 59).

58. а) $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}$ булса, $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m$ булса, $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$;

в) $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ булса, $\cos\alpha$;

г) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ булса, $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos\frac{\alpha}{2}$.

59. а) $\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\ldots+\lg\operatorname{tg}89^\circ$;
б) $\lg\operatorname{tg}1^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}89^\circ$.

60. Санны нуль белән чагыштырыгыз:
а) $\lg\sin 32^\circ\cdot\lg\cos 7^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}40^\circ\cdot\lg\operatorname{ctg}20^\circ$;
б) $\lg\operatorname{tg}2^\circ+\lg\operatorname{tg}4^\circ+\lg\operatorname{ctg}2^\circ+\lg\operatorname{ctg}4^\circ$.

61. $\cos x=\frac{a}{b+c}$, $\cos y=\frac{b}{c+a}$, $\cos z=\frac{c}{a+b}$, $a+b+c\neq 0$ булса,

$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}$ суммасын табыгыз.

7. Дәрәҗә һәм логарифмнар кергән аңлатмаларның рәвешен үзгәртү

Саннарны чагыштырыгыз (62, 63).

62. а) 3^{400} һәм 4^{300}; б) $-\log_5\frac{1}{5}$ һәм $7^{\log_7 1}$;

в) 5^{200} һәм 2^{500}; г) $\log_4\sqrt{2}$ һәм $\log_3\frac{1}{81}$.

63. а) $\log_2 2+\log_2 7$ һәм $\log_2(2+7)$;
б) $\log_4 5-\log_4 3$ һәм $\log_4(5-3)$;
в) $3\log_7 2$ һәм $\log_7(3-2)$;
г) $\log_3 1{,}5+\log_3 2$ һәм $\log_3 1{,}5^2$.

64. Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}$; б) $2^{4\log_4 a}-5^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}a}-a^0$.

65. Санны унарлы вакланма рәвешендә языгыз:

а) $49^{1-\log_7 2}+5$; б) $36^{\frac{1-\log_6 5}{2}}+2^{-\log_2 10}$.

66. Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\frac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}$; б) $2\log_{0,3}3-2\log_{0,3}10$;

в) $\frac{3\lg 2+3\lg 5}{\lg 13-\lg 130}$; г) $(2\log_{12}2+\log_{12}3)(2\log_{12}6-\log_{12}3)$.

67. Аңлатманы a нигезе буенча логарифмлагыз:

а) $a=5$ булганда, $25b^3\sqrt[4]{c^7}$;

б) $a=0,2$, $b>0$, $c>0$ булганда, $\frac{0,0016b^4}{c\sqrt[3]{c^2}}$.

68. а) $\log_4 x=2\log_4 10+\frac{3}{4}\log_4 81-\frac{2}{3}\log_4 125$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} x=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 16-\log_{\frac{1}{3}} 8+\log_{\frac{1}{3}} 28$ булса, x ны табыгыз.

69. Таблица ярдәмендә исәпләгез:

а) $\frac{7,832\sqrt[4]{12,98}}{5,256^2}$; б) $\frac{102,3^2}{\sqrt[3]{92,14\cdot 6,341}}$.

70. Аңлатманы гадиләштерегез һәм якынча кыйммәтен табыгыз:

$$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\ldots\cdot\log_{10}9.$$

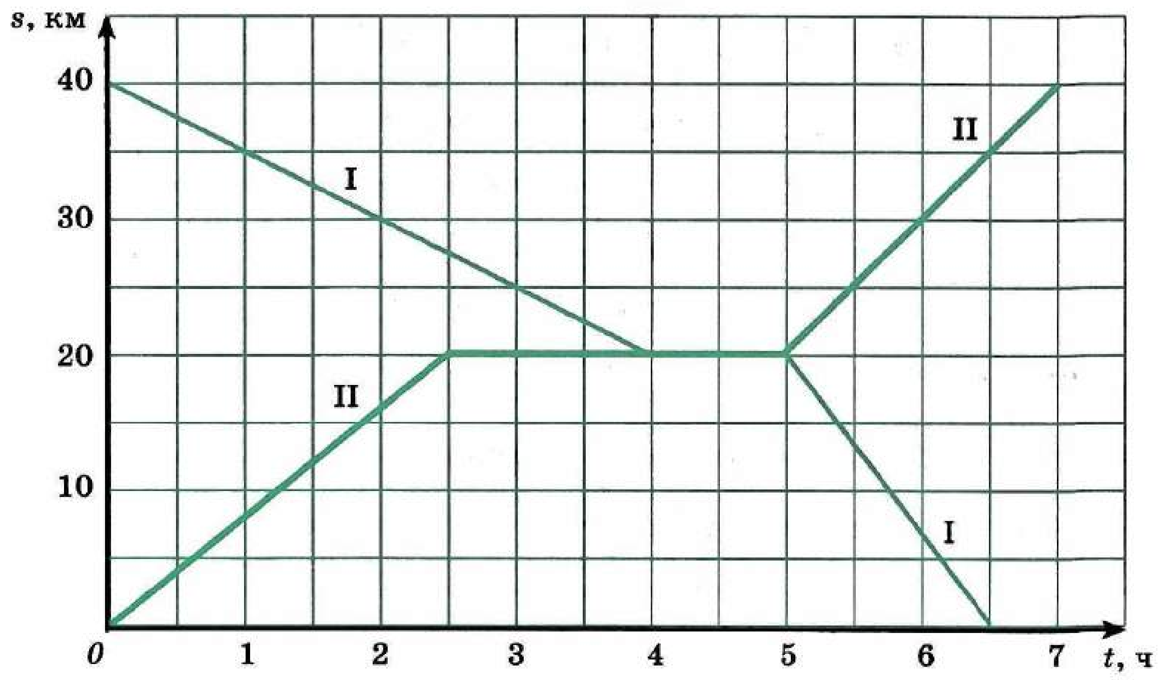
71. $\log_2(\sqrt{3}+1)+\log_2(\sqrt{6}-2)=A$ икәне билгеле. $\log_2(\sqrt{3}-1)+\log_2(\sqrt{6}+2)$ суммасын табыгыз.

§ 3.
Функцияләр

8. Рациональ функцияләр

72. Тигезьянлы трапециянең бер нигезе ян ягына тигез, нигез янындагы почмагы 30°.
а) Трапециянең мәйданын ян ягының функциясе буларак;
б) трапециянең периметрын аның биеклеге функциясе буларак формула белән күрсәтегез.

73. Өчпочмаклы төзек призманың ян кабыргасы нигез ягына тигез.
а) Нигез ягының функциясе буларак призманың күләмен;
б) күләмнең функциясе буларак призманың ян өслеге мәйданын формула белән бирегез.

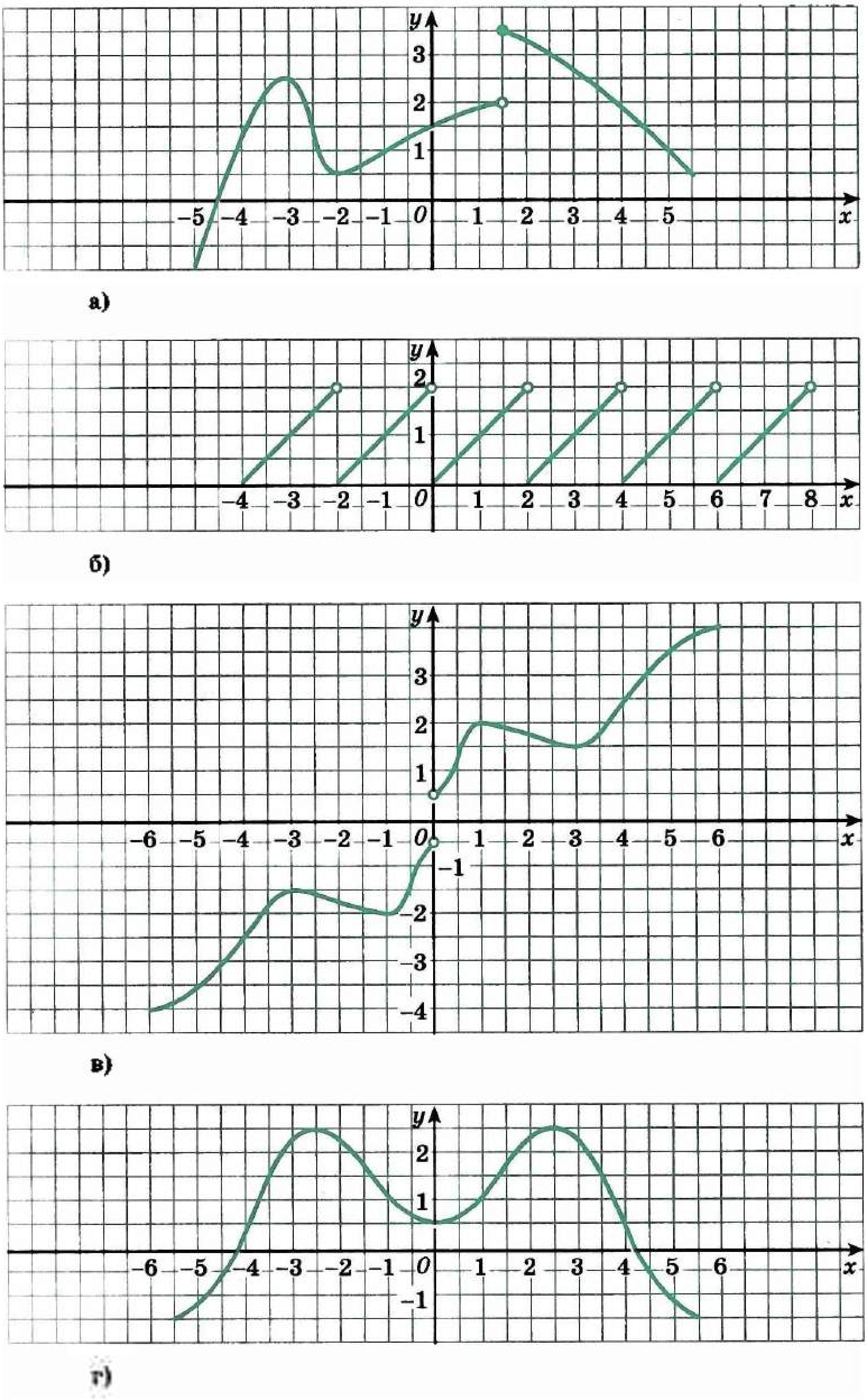


150 нче рәсем

74. Материаль нокта, турысызыклы хәрәкәт итеп, гармоник тирбәнешләр ясый.
а) Вакытның функциясе буларак ноктаның координатасын;
б) вакытның функциясе буларак ноктаның тизлеген формула белән бирегез.

75. 150 нче рәсемдә A һәм B пунктларыннан бер үк вакытта кара-каршы чыгучы ике туристның хәрәкәт графиклары сурәтләнгән.
а) Туристлар A һәм B пунктларына кайсы вакытта килеп җиткәннәр?
б) Аларның һәркайсы юлда күпме вакыт булган?
в) Туристның һәркайсы тукталыш урынына кайсы вакытта килеп җиткән?
г) Аларның һәркайсы күпме вакыт ял иткән?
д) Тукталышка кадәр һәм аннан соң һәр турист нинди тизлек белән хәрәкәт иткән?
е) Һәр туристның уртача хәрәкәт итү тизлеге нинди?

76. Функциянең графигы буенча (151 нче рәсем) сорауларга җавап бирегез:
1. Функциянең үсү аралыклары нинди?
2. Функциянең кимү аралыклары нинди?
3. Функциянең максимум һәм минимум ноктaларын әйтегез. Бу нокталарда функция нинди кыйммәтләр ала?
4. [−2; 2] кисемтәсендә функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләре күпмегә тигез?
5. Функция нинди нокталарда өзлексез түгел һәм функциянең бу нокталарда кыйммәтләре нинди?
6. Функция нинди аралыкларда өзлексез?
7. Функцияләрнең кайсылары җөп һәм кайсылары так?



151 нче рәсем

77. Функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз:

а) $y = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$; б) $y = \frac{x^2}{x^4-1}$;

в) $y = \frac{x^2-1}{x^4-9x^2+20}$; г) $y = \frac{x}{3x^2-5x+4}$.

78. Функция өчен өзлексез аралыкларын табыгыз:

а) $y = \frac{x-4}{x^2-x}$; б) $y = x^2 + \frac{4}{x-1}$;

в) $y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$; г) $y = \frac{1}{3x^3-2x^2+5}$.

79. Функциянең җөп (так) икәнен исбатлагыз:

а) $y = x^3 - 3x$; б) $y = \frac{5x^3}{1-x^2}$;

в) $y = x^4(x^2+2)$; г) $y = \frac{|x|+2}{x^2}$.

80. Функциянең даими тамга аралыкларын табыгыз:

а) $y = \frac{x-1}{3x}$; б) $y = \frac{x^2-4x-5}{9-x^2}$;

в) $y = 1 - \frac{2x-3}{5-x}$; г) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

81. Функциянең үсү (кимү) аралыкларын һәм минимум нокталарын табыгыз:

а) $y = 4x^2 + 3x - 1$; б) $y = 1 - \frac{2}{x}$;

в) $y = (x-1)^4 - 2$; г) $y = \frac{x+4}{x-1}$.

Функцияне тикшерегез һәм аның графигын төзегез (82, 83).

82. а) $y = 3x - 5$; б) $y = 2x^2 - 7x + 3$;

в) $y = 2 - \frac{1}{4}x$; г) $y = 12 - 4x - x^2$.

83. а) $y = 2 - \frac{3}{x+1}$; б) $y = (x-2)^3 - 1$;

в) $y = \frac{x^4+1}{x^4}$; г) $y = 4 - (x+2)^4$.

Функцияләрнең һәркайсының графигын төзегез (84—86).

84. а) $y = 3x - 2$; б) $y = x^2 - 4x - 5$; в) $y = \frac{1}{x} - 1$; г) $y = x^3 + 2$.

85. а) $y = 3x + |x|$; б) $y = |-x^2 - x + 2|$;

в) $y = 2x - |x-3|$; г) $y = x^2 - 4|x| + 3$.

86. а) $y = \frac{x+1}{|x|}$; б) $y = \frac{1}{x^2} + 2$; в) $y = \frac{|x|-2}{x}$; г) $y = \frac{2x^2-1}{x^2}$.

87. Функция графикларының уртак нокталары бармы?

а) $y = x^2$ һәм $y = x + 6$;
б) $y = \frac{3}{x}$ һәм $y = 4(x + 1)$;
в) $y = x^4$ һәм $y = 2x^2 + 1$;
г) $y = \frac{1}{x^2}$ һәм $y = x^2 - 2$.

88. Тигезләмәнең бирелгән I аралыгында тамыры барлыгын исбат итегез:

а) $x^3 - 6x + 2 = 0$, $I = [0; 1]$;
б) $x^4 - 3x^2 + \frac{2}{9} = 0$, $I = [1; 2]$;
в) $x^5 + 3x = 5$, $I = [1; 2]$;
г) $4 + 2x^3 - x^5 = 0$, $I = [-1; 2]$.

Тигезләмәләрне (тигезсезлекләрне) график юл белән чишегез (89, 90).

89. а) $4 - 3x \leqslant x + 2$;
б) $x^2 - 2x = -x$;
в) $\frac{1}{x} = 4x$;
г) $x^2 + 2x + 2 \geqslant x + 1$.

90. а) $x^3 = \frac{8}{x-1}$;
б) $|1 - x| = 2 - |x|$;
в) $x^2 = \frac{1}{x}$;
г) $|x - 1| = 3 - |x|$.

91. $y = ax + b$ функциясенең графигы $A(2; 1)$, $B(5; 10)$ нокталары аша үтә. a һәм b ны табыгыз.

92. Квадрат функция графигы буенча (152 нче рәсем) a, b, c һәм D дискриминантының тамгаларын билгеләгез.

93. Сызыкча яки квадратик функция а) җөп; б) так; в) периодик була аламы?

94. Функцияне җөп һәм так функцияләрнең суммасы рәвешендә күрсәтегез:

а) $y = \frac{x+1}{|x|}$;
б) $y = x^3 - x|x| + 3$;
в) $y = \frac{x^4 + x^2 - x}{x^4 - 1}$;
г) $y = 2x^5 + x^4 - 3x + 8$.

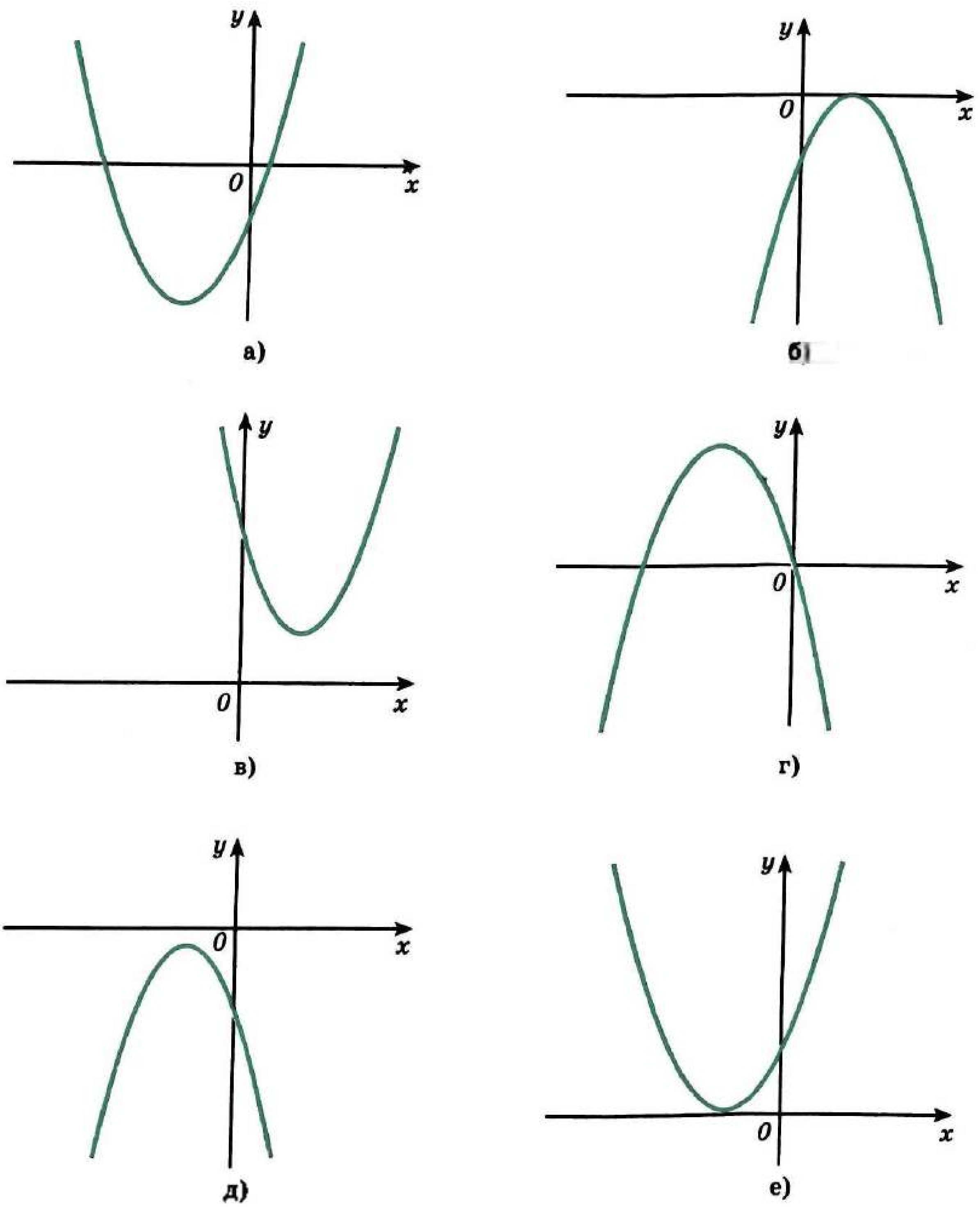
95. Функция җөпме яки такмы?

а) $y = 5x^5 - 2x^2 - 3$;
б) $y = 4x^5 - 2x^3 + x$;
в) $y = \frac{3}{x^2} + 1$;
г) $y = -\frac{2}{x^3}$.

9. Тригонометрик функцияләр

Функцияләрнең билгеләнү өлкәсен табыгыз (96, 97).

96. а) $y = \frac{2}{\cos^2 x}$;
б) $y = \frac{1}{1 + 2\sin 2x}$;
в) $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos x - \frac{3}{2}}$;
г) $y = \frac{x}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$.



152 нче рәсем

97. а) $y = \sqrt{\sin x \cos x}$; б) $y = \sqrt{x}\ \mathrm{tg}\, x$;

в) $y = \sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}$; г) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$.

Функцияләрнең кыйммәтләр өлкәсен табыгыз (98, 99).

98. а) $y = 1 - 3 \sin \frac{x}{2}$; б) $y = 2 \cos x\ \mathrm{tg}\ x$;

в) $y = 2 + 3 \cos 5x$; г) $y = 2|\sin x| - 1$.

99. а) $y = \frac{1}{1+\sin 2x}$; б) $y = \sqrt{1-\cos 4x}$;

в) $y = \frac{3}{\cos x - 1}$; г) $y = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x$.

100. **Функциянең даими тамга аралыкларын табыгыз:**

а) $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = 1 - \mathrm{tg}\, 3x$;

в) $y = 1 - \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$; г) $y = 1 + 2\cos 2x$.

101. **Бирелгән функцияләрнең кайсылары җөп, кайсылары так була?**

а) $y = \mathrm{tg}\, 3x - \mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}$; б) $y = \frac{\sin x \cos^2 x}{x}$;

в) $y = \sin\frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$; г) $y = \frac{\sin x}{x} - \cos x$.

102. **Бирелгән функцияләр арасыннан периодик функцияләрне күрсәтегез һәм ул функцияләрнең иң кечкенә уңай периодларын табыгыз:**

а) $y = 1 - \sin 5x$; б) $y = x\sin^2 x - x\cos^2 x$;

в) $y = 3\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = (\sin x + \cos x)^2$.

103. **Функциянең үсү (кимү) аралыкларын, максимум һәм минимум нокталарын табыгыз:**

а) $y = 1 + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \frac{2}{1-\cos x}$;

в) $y = 0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$; г) $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

104. **Функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыгыз (әгәр алар булса):**

а) $y = \cos 2x + \sin^2 x$; б) $y = 1 - 4\sin 3x$;

в) $y = \sin x - \cos x$; г) $y = 1 + |\mathrm{tg}\, x|$.

Функцияләрнең графикларын төзегез (105, 106).

105. а) $y = 2\sin^2\frac{x}{2}$; б) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

в) $y = 1 + 2\cos 2x$; г) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

106. а) $y = \frac{|x|\sin x}{x}$; б) $y = (\sin x - \cos x)^2$;

в) $y = \cos x + |\cos x|$; г) $y = \sin x\, \mathrm{ctg}\, x$.

107. **Функцияне тикшерегез һәм аның графигын төзегез:**

а) $y = \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \frac{1}{3}\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; г) $y = 1 - \mathrm{tg}\, 2x$.

108. x_0 нең $\frac{x}{10} = x^3$ тигезләмәсенең тамыры икәнлеге билгеле. Моннан $(-x_0)$ саны әлеге тигезләмәнең тамыры була дип әйтеп буламы?

109. Саннарны чагыштырыгыз:

а) $\sin\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)$ һәм $\cos\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)$; б) $\operatorname{tg} \pi^2$ һәм $\operatorname{ctg} \pi^2$;

в) $\operatorname{tg} 2$ һәм $\operatorname{ctg} 2$; г) $\sin 1$ һәм $\cos 1$.

110. а) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ булса, $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$;

б) $\cos(\sin \alpha) > 0$, $\alpha \in R$ икәнен исбатлагыз.

111. Тигезләмәне график юл белән чишегез:

а) $\sin x = -x$; б) $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

в) $\operatorname{tg} x = x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; г) $\cos x = 1 - x^2$.

10. Дәрәҗәле, күрсәткечле һәм логарифмик функцияләр

Функцияләрнең билгеләнү өлкәсен табыгыз (112—114).

112. а) $y = \sqrt{16x - x^3}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 8}}$;

в) $y = \sqrt[6]{5 - x - \frac{4}{x}}$; г) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 20}}$.

113. а) $y = \sqrt{x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1}}$; б) $y = \sqrt[8]{2^{\sin x} - 1}$;

в) $y = \log_3\left(4 - 3x + x^2\right)$; г) $y = \log_2 \sin x$.

114. а) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\lg(x + 10)^2}$; б) $y = \sqrt{\log_5 \cos x}$;

в) $y = \frac{\ln(3x - 2)}{x^2 - x - 2}$; г) $y = \sqrt[4]{\lg\left(3x^2 - 2x\right)}$.

Функцияләрнең һәркайсының билгеләнү өлкәсен табыгыз (115, 116).

115. а) $y = 2\sqrt{x + 1}$; б) $y = 5^{2-x} - 1$;

в) $y = 2 \lg x + 1$; г) $y = 3x^{-2}$;

116. а) $y = 2^{\cos x}$; б) $y = 2 - \sqrt[4]{x}$;

в) $y = 1 + \left|\log_2 x\right|$; г) $y = 1 + \left|\sqrt[3]{x}\right|$.

Функцияләрнең даими тамга аралыкларын табыгыз (117, 118).

117. а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 4$; б) $y = \log_4 (x + 3)$;

в) $y = 2 - 3^x$; г) $y = \sqrt{x} - 4$.

118. а) $y = 4^{x+2} - 4^x$; б) $y = \lg (x - 2) - 1$;

в) $y = \sqrt{x} + 3$; г) $y = 2 - \sqrt[3]{x}$.

Бирелгән функцияләр арасыннан җөп һәм так функцияләрне табыгыз (119, 120).

119. а) $y = 5^x + 5^{-x}$; б) $y = \lg (1 - x^2)$;

в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; г) $y = x\sqrt[3]{x}$.

120. а) $y = x^{\frac{2}{3}}$; б) $y = 3^x - 3^{-x}$;

в) $y = 2^{\cos x}$; г) $y = \sqrt[3]{x^4} + 1$.

121. Функцияне тикшерегез һәм аның графигын төзегез:

а) $y = 2\sqrt{x} - 1$; б) $y = 4^{x-1} - 2$;

в) $y = \frac{1}{2} \log_2 (x + 1)$; г) $y = \sqrt[3]{x - 2} + 1$.

Функцияләрнең графикларын төзегез (122, 123).

122. а) $y = \sqrt{x - 2} + 1$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$;

в) $y = 2 - \sqrt[3]{x + 1}$; г) $y = 1 + \log_2 (x + 2)$.

123. а) $y = 5^{\log_5 (x-1)}$; б) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| - 1$;

в) $y = 2^{|x|}$; г) $y = \log_2 x^2$.

124. Функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыгыз (әгәр алар булса):

а) $y = \sqrt{36 - x^2}$; б) $y = \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 7 \text{ булганда, } \frac{1}{x+1}, \\ -2 \leqslant x < 0 \text{ булганда, } x^3 + 1; \end{cases}$

в) $y = 3^{\sin x}$; г) $y = \begin{cases} (x - 1)^2, \ -1 \leqslant x < 1 \text{ булганда,} \\ \log_2 x \leqslant x \leqslant 8 \text{ булганда.} \end{cases}$

125. Тигезләмәне график юл белән чишегез:

а) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 3$; б) $\sqrt{x - 2} = \frac{3}{x}$;

в) $\log_2 x = 2^{5-x}$; г) $2^{|x|} = 11 - |x|$.

126. Тигезсезлекне график юл белән чишегез:

а) $\log_{\frac{1}{2}} x > x - 3$; б) $\sqrt{x-2} \leqslant \frac{3}{x}$;

в) $2^{|x|} \geqslant x^2 + 1$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2x - 7$.

127. $y = (\log_2 3)^{\sin x}$ һәм $y = (\log_3 2)^{\cos x}$ функцияләренең иң зур кыйммәтләре тигез булуын исбатлагыз.

128. а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+1}} - \sqrt{1-x^2}$, $f(x_0) = 0$;

б) $f(x) = \lg(x+15) + \lg x$, $f(x_0) = 2$ булса, x_0 аргументының кыйммәтен табыгыз.

129. а) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ функциясенең R күплегендә кимүен;

б) $f(x) = \log_2 3x$ функциясенең $(0; \infty)$ аралыгында үсүен исбатлагыз.

§ 4.
Тигезләмәләр, тигезсезлекләр, тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр системалары

11. Рациональ тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр

Тигезләмәләрне чишегез (130, 131).

130. а) $3(x-2) - 5 = 4 - (5x-1)$; б) $|2x-3| = 5$;

в) $7 - 2(3-x) = 4(x-1) + 5$; г) $|4-3x| = 2$.

131. а) $\frac{3x+1}{5} = 2 - \frac{4(x-3)}{15}$; б) $\left|\frac{x-3}{2} + 5\right| = 4$;

в) $1 - \frac{x-3}{2} = x - \frac{3(5-2x)}{7}$; г) $\left|1 - \frac{x+2}{3}\right| = 5$.

132. a ның нинди кыйммәтләре өчен тигезләмәнең бердәнбер чишелеше бар; чишелешләре юк; чишелешләре чиксез күп?

а) $ax - 2x = 3(x-1)$; б) $a(1-x) + 2 = 3x - ax$;

в) $x(2-a) - x = 5 + x$; г) $5 + 3(x+3a) = 9a + 5$.

Тигезсезлекләрне чишегез (133—135).

133. а) $\frac{x-1}{2} + x < 1{,}5x + 3{,}5$; б) $\frac{5x-2}{3} - \frac{3-x}{2} > 1$;

в) $x - 4(3-x) \geqslant 2x + 7$; г) $3 + \frac{2-3x}{4} \leqslant 2x$.

134. а) $|4x-3|<5$; б) $|2x+5|\geqslant 1$;

в) $\frac{|x-7|}{3}\leqslant 2$; г) $4|2-x|\leqslant 12$.

135. а) $\frac{2x-3}{x}>5$; б) $\frac{x+2}{|x+4|}\leqslant 0$;

в) $(x-4)|5-3x|<0$; г) $|2x+7|(3-x)\leqslant 0$.

136. Тигезләмәне чишегез:

а) $x^2+2x-15=0$; б) $7x^2+5x=0$;

в) $(x-3)(x-2)=6(x-3)$; г) $x^2-\frac{11x}{6}+\frac{1}{2}=0$.

137. a нинди кыйммәт алганда тигезләмәләрнең уртак тамырлары була?

а) $x^2-ax=0$ һәм $x^2-x-3a=0$;

б) $x^2-(a-1)x=3$ һәм $4x^2-(4a+3)x+9=0$;

в) $x^2+ax+8=0$ һәм $x^2+x+a=0$;

г) $2x^2+(3a-1)x=3$ һәм $6x^2-(2a-3)x=1$.

138. Тигезләмәнең бер генә тамыры булсын өчен, k ның кыйммәтләрен табыгыз:

а) $(k-1)x^2+(k+4)x+k+7=0$; б) $9x^2-2x+k=6-kx$;

в) $(2k-5)x^2-(2k-1)x+3=0$; г) $3kx^2-6x+k-2=0$.

139. $3x^2-5x-2=0$ тигезләмәсен чишми генә а) тамырлары суммасын; б) тамырлары тапкырчыгышын; в) тамырларының квадратлары суммасын; г) тамырларының кублары суммасын табыгыз.

Тигезләмәләрне чишегез (140, 141).

140. а) $\frac{6x-x^2-6}{x-1}-\frac{2x-3}{x-1}=1$; б) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$;

в) $\frac{2}{x^2+5x}-\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$; г) $\frac{14}{x^2-4}+\frac{3}{(2-x)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$.

141. а) $\frac{14}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$; б) $2x^4-5x^2+2=0$;

в) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)+2=0$; г) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2,5$.

Тигезсезлекләрне чишегез (142—144).

142. а) $2x^2+6x+17>0$; б) $x^2-3,2x<0$;

в) $(3x-2)^2-4x(2x-3)\geqslant 0$;

г) $(6x-1)(1+6x)+14<7x(2+5x)$.

143. а) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\geqslant 0$; б) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}\leqslant 0$;

в) $\frac{x-2}{(x-3)(x-5)}<0$; г) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}>0$.

144. а) $(x-1)(x+2)(x-3)(x-4) \leqslant 0$; б) $x^4-3x^2+2 \leqslant 0$;

в) $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$; г) $1+\frac{12}{x^2} < \frac{7}{x}$.

145. Тигезсезлекнең дөреслеген исбатлагыз:

а) $m+\frac{4}{m} \geqslant 4$, $m > 0$ булганда; б) $\frac{2m}{1+m^2} \leqslant 1$;

в) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$, $a > 0$, $b > 0$ булганда;

г) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a < b$ булганда.

12. Иррациональ тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр

Тигезләмәләрне чишегез (146—149).

146. а) $\sqrt{x^2+2x+10} = 2x-1$; б) $\sqrt{x^2-16} = x^2-22$;

в) $\sqrt{17+2x-3x^2} = x+1$; г) $\sqrt{x^2+9} = x^2-11$.

147. а) $\sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} = 4$; б) $2\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 3$;

в) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9$; г) $2\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[6]{x+1} = 6$.

148. а) $\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{2+x}} + \sqrt{2+x} = 0$; б) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 2 = 0$;

в) $\frac{x-\sqrt{x+5}}{x+\sqrt{x+5}} = \frac{1}{7}$; г) $\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt{3x+1} = 0$.

149. а) $\sqrt{225+x^2} = x^2-47$; б) $\sqrt[3]{x-2} = x-2$;

в) $\sqrt{x^2+36} = x^2-54$; г) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5} = x-2$.

Тигезсезлекләрне чишегез (150, 151).

150. а) $\sqrt{x^2-5} \geqslant 2$; б) $\sqrt{(x-2)(1-2x)} > -1$;

в) $\sqrt{x^2-16} \geqslant 1$; г) $(\sqrt{x}-3)(x^2+1) > 0$.

151. а) $\sqrt{x^2-6x+9} > 3$; б) $\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{3x^2+x+1} \geqslant 0$;

в) $\sqrt{25-20x+4x^2} \leqslant 1$; г) $\sqrt{2x-x^2+15}\,(3x-x^2-4) \leqslant 0$.

13. Тригонометрик тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр

Тигезләмәләрне чишегез (152—158).

152. а) $\cos x + 2\cos 2x = 1$; б) $4\sin 2x - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 5$;
в) $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$; г) $\cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin^2 2x$.

153. а) $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$;
в) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$.

154. а) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$; б) $4(1 + \cos x) = 3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$;
в) $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$; г) $4(1 - \cos x) = 3\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$.

155. а) $\cos 2x - \cos 6x = 0$; б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
в) $\sin x + \sin 3x = 0$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2\cos 3x$.

156. а) $\frac{6}{\operatorname{ctg} x + 2} = 3 - \operatorname{ctg} x$; б) $1 + 2\cos 3x \cos x - \cos 2x = 0$;
в) $\frac{15}{\sin x + 1} = 11 - 2\sin x$; г) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$.

157. а) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0$; б) $\operatorname{tg} x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$;
в) $\sin x \operatorname{tg} x = \cos x + \operatorname{tg} x$; г) $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$.

158. а) $\arccos\frac{1+2x}{3} = \frac{2\pi}{3}$; б) $\operatorname{arctg}(2x - 1) = -\frac{\pi}{4}$;
в) $\arcsin\frac{x+2}{4} = -\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{arctg}(2 - 3x) = \frac{3\pi}{4}$.

Тигезсезлекләрне чишегез (159—162).

159. а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geqslant -1$;

в) $\sin 2x \sin\frac{x}{2} - \cos 2x \cos\frac{x}{2} > \frac{1}{2}$;

г) $\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

160. а) $2\sin^2 x \leqslant 1$; б) $3\operatorname{tg}^2 2x \leqslant 1$;
в) $4\cos^2 x \leqslant 3$; г) $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 1 \geqslant 0$.

161. а) $|\cos x - 1| \leqslant 0{,}5$; б) $\sin x < \cos x$;

в) $\left|\sin 2x + \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$; г) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x > 0$.

162. а) $\sin x - \sqrt{3}\cos x$; б) $\log_{0,5} \sin x > 1$;

в) $\sin x + \cos x < 1$; г) $\log_{\sqrt{3}} \cos x > -1$.

14. Күрсәткечле тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр

Тигезләмәләрне чишегез (163—167).

163. а) $(0{,}2)^{x^2-16x-37{,}5} = 5\sqrt{5}$; б) $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01\cdot(10^{x-1})^3$;

в) $2^{x^2-6x+0{,}5} = \frac{1}{16\sqrt{2}}$; г) $\frac{6x^2}{2^{-15}} = \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$.

164. а) $5^{3x} - 2\cdot 5^{3x-1} - 3\cdot 5^{3x-2} = 60$; б) $4^x - 3^{x-0{,}5} = 3^{x+0{,}5} - 2^{2x-1}$;

в) $2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} = 896$; г) $5^{2x-1} + 2^{2x} = 5^{2x} - 2^{2x+2}$.

165. а) $9^{x^2-1} - 36\cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$; б) $5^{3x+1} + 34\cdot 5^{2x} = 7\cdot 5^x$;

в) $16^x - 50\cdot 2^{2x} = 896$; г) $7^{4\sqrt{x}} - 8\cdot 7^{\sqrt{4x}} + 7 = 0$.

166. а) $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x = 5\cdot 6^x$; б) $8^x + 18^x = 2\cdot 27^x$;

в) $2\cdot 25^x - 5\cdot 10^x + 2\cdot 4^x = 0$; г) $3\cdot 16^x + 2^x\cdot 81^x = 5\cdot 36^x$.

167. а) $3^{2\sqrt{x}} + 3^{2\sqrt{x}-1} - 3^{2\sqrt{x}-2} = 11$; б) $5^{\sin^2 x} - 25^{\cos x} = 0$;

в) $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$; г) $3\cdot 9^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

Тигезсезлекләрне чишегез (168—170).

168. а) $\frac{16}{\sqrt{32}} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}$; б) $3^{x^2+x} < 10^{\lg 9}$;

в) $3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{1-3x} < \frac{1}{9}$; г) $4^{x^2+x-11} > 5^{\log_5 4}$.

169. а) $0{,}04^x - 26\cdot 0{,}2^x + 25 \leqslant 0$; б) $9^x - 84\cdot 3^{-2x} + \frac{1}{3} > 0$;

в) $4^x - 10\cdot 2^x + 16 < 0$; г) $2^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} - \frac{5}{2} \geqslant 0$.

170. а) $x^2\cdot 3^x - 3^{x+1} \leqslant 0$; б) $3{,}7^{\frac{x^2-2x-15}{x-4}} > 1$;

в) $x^2\cdot 5^x - 5^{2+x} < 0$; г) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

15. Логарифмик тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр

Тигезләмәләрне чишегез (171—175).

171. а) $\log_3^2 x = 4 - 3\log_3 x$; б) $\frac{1}{2}\lg(2x-1) = 1 - \lg\sqrt{x-9}$;

в) $\log_3\sqrt{x-5} + \log_3\sqrt{2x-3} = 1$;

г) $3\lg^2(x-1) - 10\lg(x-1) + 3 = 0$.

172. а) $2\log_5(\lg x) = \log_5(10 - 9\lg x)$;

б) $\lg(3^x + x - 17) = x\lg 30 - x$;

в) $2\lg(\lg x) = \lg(3 - 2\lg x)$;

г) $x - x\lg 5 = \lg(2^x + x - 3)$.

173. а) $\log_2 x + \frac{4}{\log_x 2} = 5$; б) $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6$;

в) $\log_{\sqrt{3}} x + \log_x \frac{1}{3} = 3$; г) $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_{x^2} + \log_8 x = 16$.

174. а) $x^{\log_2 x - 2} = 8$; б) $x^{\log_5 x} = 125x^2$;

в) $x^{\lg x} = 10\,000$; г) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$.

175. а) $3\log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$;

б) $\log_{0,1}\sin 2x + \lg\cos x = \lg 7$;

в) $\log_7 5^{\sqrt{x+2}} = (x-4)\log_7 5$;

г) $\lg(3\cdot 5^x + 24\cdot 20^x) = x + \lg 18$.

Тигезсезлекләрне чишегез (176—179).

176. а) $\log_2(x^2 - x - 4) < 3$; б) $\log_{\sqrt{3}-1}(5 - 2x) > 2$;

в) $\lg(x^2 - x + 8) \geqslant 1$; г) $\log_{\sqrt{7}-1}(3 - 2x) < 2$.

177. а) $2\log_2 x < \log_2(x+3)$;

б) $\log_{\frac{1}{6}}(10 - x) + \log_{\frac{1}{6}}(x - 3) \geqslant -1$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) + \log_{\frac{1}{3}}(12 - x) \geqslant -2$;

г) $\log_{0,5}(4 - x) \geqslant \log_{0,5} 2 - \log_{0,5}(x - 1)$.

178. а) $\lg(x^2 + x - 6) - \lg(x + 3) \leqslant \lg 3$; б) $\log_3\frac{3x-1}{2-x} < 1$;

в) $\ln(x^2 + 3x - 10) - \ln(x - 2) \geqslant \ln 4$; г) $\log_3\frac{3x-5}{x+1} \leqslant 1$.

179. а) $\log_2(4x - 5\cdot 2^x + 8) > 2$; б) $\log^2_{0,5} x + 6 \geqslant 5\log_{0,5} x$;

в) $\lg^2 x \geqslant \lg x + 2$; г) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(6^{x+1} - 36^x) \geqslant -2$.

16. Рациональ тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр системалары

Тигезләмәләр системасын чишегез (180—183).

180. а) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 5x + 4y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 9y = 12, \\ 4x - 12y = 16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 2x - 3y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x - 8y = 0, \\ x - 1{,}6y = 1. \end{cases}$

181. а) $\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{y}{x} = 2, \\ (x - y)^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$

182. а) $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 45, \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2y^3 = 16, \\ x^3y^2 = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - xy = 28, \\ y^2 - xy = -12. \end{cases}$

183. а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3y^3 = -8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 5, \\ xy^2 = 12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ xy = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13. \end{cases}$

184. *a* нинди кыйммәткә ия булганда тигезләмәләр системасының берданбер чишелеше бар; чишелешләре юк; чишелешләре чиксез күп?

а) $\begin{cases} x - 5y = 7, \\ ax - y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y = a, \\ 2x + 4y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + ay = a, \\ 3x - 2y = -6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x - 2y = 2a. \end{cases}$

185. Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} 2x > 3 - \frac{13x - 2}{11}, \\ \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x - 7) < \frac{3x - 20}{9}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+4}{3} < \frac{x-1}{4} - 2, \\ 1{,}5x - 2{,}5 < x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} > \frac{x-1}{4} - x - 2, \\ 0,5x < 2 - x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2(3x-1) < 3(4x+1) + 16, \\ 4(2+x) < 3x + 8. \end{cases}$

17. Иррациональ тигезләмәләр системалары

Тигезләмәләр системасын чишегез (186—188).

186. а) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{xy} = 12, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7. \end{cases}$

187. а) $\begin{cases} x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = 30, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ xy = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6, \\ x - y = 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = 64, \\ x - y + \sqrt{xy} = 20. \end{cases}$

188. а) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 26, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3\frac{3}{4}, \\ xy = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3, \\ xy = 8. \end{cases}$

18. Тригонометрик тигезләмәләр системалары

Тигезләмәләр системасын чишегез (189, 190).

189. а) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0,25, \\ \sin y \cos x = 0,75; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2(\pi x) - \cos^2(\pi y) = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4 \sin x \sin y = 3, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$

190. а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 3, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{2}, \\ \sin x + \cos 2y = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \cos 2y + \cos x = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

19. Күрсәткечле һәм логарифмик тигезләмәләр системалары

Тигезләмәләр системасын чишегез (191—196).

191. а) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 16, \\ x + y = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \left(\sqrt{5}\right)^{x-y} = 25, \\ 2^{6y-x-1} = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28, \\ x - y = 3. \end{cases}$

192. а) $\begin{cases} 4^{\log_4 2x} - y = -1, \\ 5^{2x-y} + 5^x = 5,2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17, \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^{\log_3(x+y)} = 2, \\ 2^{2x+y} = 16; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4, \\ 3^x + 2 \cdot 3^{y-2} = 171. \end{cases}$

193. а) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63, \\ 3^x + 7^y = 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ \sqrt{3^x} - 2^y = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4^x \cdot 4^y = 64, \\ 4^x + 4^y = 63; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt{2^x} - 3^y = -7, \\ 2^x - 3^y = -5. \end{cases}$

194. а) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_2\left(x^2 + y^2\right) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \log_2(x + 1) = \log_2\left(y + \frac{1}{4}\right), \\ \log_2 x - 2\log_2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0. \end{cases}$

195. а) $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^{1+\log_3\left(x^2+y^2\right)} = 15, \\ \log_3\left(x^2 - y^2\right) - \log_3(x - y) = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5^{1+\log_5\left(x^2-y^2\right)} = 25, \\ \log_5\left(x^2 - y^2\right) = \log_5(x + y). \end{cases}$

196. а) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15, \\ 3^y \log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1}. \end{cases}$

20. Тигезләмәләр һәм тигезләмәләр системалары төзүгә мәсьәләләр

197. Автобус яңа расписание буенча 325 км араны элеккегә караганда 40 мин ка тизрәк үтә. Автобус элекке расписаниедә каралган уртача тизлеген 10 км/сәг кә арттыра. Автобусның яңа расписание буенча уртача тизлеген табыгыз.

198. Акмый торган суда тизлеге 15 км/сәг булган моторлы көймә, агым уңаена $139\frac{1}{3}$ км араны үтеп, кире кайткан. Әгәр ул барлык юлны 20 сәг тә үткән булса, елганың агым тизлеген табыгыз.

199. Поезд 220 км араны билгеле бер вакытта үтәргә тиеш иде. 2 сәг баргач, ул 10 мин туктап торырга мәҗбүр була һәм, калган юлны билгеләнгән вакытта үтү өчен, тизлеген 5 км/сәг кә арттыра. Поездның баштагы тизлеген табыгыз.

200. Ике теплоход очрашканнан соң, аларның берсе — көньякка, ә икенчесе көнбатышка таба китә. Очрашудан соң 2 сәг үткәч, алар арасындагы ераклык 60 км була. Әгәр берсенең тизлеге икенчесенекеннән 6 км/сәг кә артыграк икәне билгеле булса, һәр теплоходның тизлеген табыгыз.

201. Аралары 390 м булган ике ноктадан бер-берсенә каршы ике җисем хәрәкәт итә. Җисемнең берсе беренче секундта 6 м юл үтә, ә аннан соңгы һәр секундта алдагысына караганда 6 м га күбрәк үтә. Икенче җисем 12 м/с тизлек белән тигез хәрәкәт итә һәм беренче җисемгә караганда 5 с ка соңрак хәрәкәт итә башлый. Алар беренче җисем хәрәкәт итә башлаганнан соң ничә секунд үткәч очрашырлар?

202. Тимер юл магистрале төзелешендә төзүчеләр бригадасы план буенча берничә көндә 2160 м³ балчык күчерергә тиеш иде. Беренче өч көндә бригада план буенча билгеләнгән көнлек норманы үти, ә аннан соң һәр көн норманы 80 м³ га арттырып үти һәм шуңа күрә срогыннан бер көн элек 2320 м³ балчык күчерә. Бригаданың план буенча көнлек нормасы күпме булган?

203. Эшчеләрнең ике бригадасы, бергә эшләп, тәҗрибә участогында агач утыртуны 4 көндә тәгәлләгән. Бер бригада үзе генә бу эшне икенчесенә караганда 6 көн тизрәк тәгәлли

алса, аларның һәркайсына бу эшне башкару өчен ничә көн кирәк булыр иде?

204. 60 т йөкне ташу өчен берничә машина кирәк була. Һәр машинага планда каралганнан 0,5 т га кимрәк төяү сәбәпле, өстәмә рәвештә тагын 4 машина сорала. Башта ничә машина планлаштырылган була?

205. Ике кисек җизнең массасы 30 кг. Беренче кисәктә — 5 кг, ә икенчесендә 4 кг саф бакыр бар. Әгәр икенче кисәктә бакырның концентрациясе беренчесенә караганда 15% ка артык булса, җизнең беренче кисәгендә бакыр ничә процент?

206. 40 г тозы булган эремәгә 200 г су өстәделәр, шуннан соң аның концентрациясе 10% ка кимеде. Эремәдә күпме су бар һәм аның концентрациясе нинди булган?

207. Ике автомашина бер пункттан бер үк вакытта һәм бер үк юнәлештә юлга чыгалар. Машиналарның берсе — 50 км/сәг, икенчесе 40 км/сәг тизлек белән хәрәкәт итә. Ярты сәгатьтән соң шул ук пункттан шул ук юнәлештә өченче машина юлга чыга. Ул беренче машинаны икенчесенә караганда 1 сәг 30 мин ка соңрак узып китә. Өченче машинаның тизлеген табыгыз.

208. Хәрәкәтсез күзәтүче янынннан даими тизлек белән 7 с та үткән һәм шул ук тизлек белән озынлыгы 378 м булган платформа буйлап үтү өчен, 25 с сарыф иткән поездның тизлеген һәм озынлыгын табыгыз.

209. Аралары 50 км булган A һәм B пунктларыннан бер үк вакытта бер-берсенә каршы ике җәяүле чыга, 5 сәг тән соң алар очрашалар. Очрашканнан соң, A дан B га баручы җәяүле тизлеген 1 км/сәг кә киметә, ә икенчесе 1 км/сәг кә арттыра. Беренче җәяүле B га, икенче җәяүле A га барып җиткәнгә караганда, 2 сәг кә иртәрәк килеп җитә. Һәр җәяүленең баштагы тизлеген табыгыз.

210. Заводта A тибындагы бер электр двигателен җитештерү өчен — 2 кг бакыр һәм 1 кг кургаш, B тибындагы бер электр двигателен җитештерү өчен 3 кг бакыр һәм 2 кг кургаш тотыла. Әгәр 130 кг бакыр һәм 80 кг кургаш тотылган булса, электр двигателенең һәр тибы ничәшәр данә җитештерелгән?

211. Ике эшче бергә бер эшне 12 көндә үти алалар. Әгәр эшнең яртысын — бер эшче, ә аннан соң икенче яртысын икенче эшче үтәсә, бу эш 25 көндә тәмамланыр иде. Һәр эшче бу эшне үзе генә ничә көндә башкара ала?

212. Тыгызлыклары 1,2 г/см^3 һәм 1,6 г/см^3 булган ике сыеклыктан 60 г катнашма ясалган. Әгәр 8 см^3 катнашманың массасы катнашмадагы җиңелрәк сыеклыкның барлык массасы кадәр булса, һәр сыеклык ничәшәр грамм алынган һәм катнашманың тыгызлыгы күпме?

213. Эретмәне 3 кг чиста көмеш белән эреткәндә, 90% көмеше булган эретмә табалар, ә аны 90% көмеше булган 2 кг эретмә белән эретеп, 84% масса өлеш көмеше булган эретмә табалар. Көмешнең баштагы бакыр белән эретмәсендәге массасын һәм масса өлешен (процентларда) исәпләгез.

214. Озынлыгы 60 м булган әйләнә буйлап ике нокта бер үк юнәлештә тигез хәрәкәт итә. Нокталарның берсе икенчесенә караганда тулы әйләнешне 5 с ка тизрәк ясый һәм минут саен аны куып җитә. Нокталарның тизлекләрен табыгыз.

215. Икеурынлы уңай санның цифрлары квадратлары суммасы 13 кә тигез. Әгәр ул саннан 9 ны алсаң, шул ук цифрлар белән язылган кире тәртиптәге сан килеп чыгар. Ул санны табыгыз.

216. Квадратлары аермасы 55 кә тигез булган натураль саннарның барлык парларын табыгыз.

§ 5.
Чыгарылма, башлангыч функция, интеграл һәм аларның кулланылышлары

21. Чыгарылма

217. а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$;

б) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}21$;

в) $f(x) = 3 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}2$

булса, f функциясе өчен $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ чагыштырмасын табыгыз.

218. а) $f(x) = 1 - 4x$, $x_0 = 3$; б) $f(x) = 1{,}5\,x^2$, $x_0 = 2$;
в) $f(x) = 3x + 2$, $x_0 = 5$; г) $f(x) = x^3 + 1$, $x_0 = -1$

булса, билгеләмәдән файдаланып, x_0 ноктасында f функциясенең чыгарылмасын табыгыз.

Функцияләрнең чыгарылмаларын табыгыз (219—222).

219. а) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5$;

б) $f(x) = (4 - x^2)\sin x$;

в) $f(x) = (x^2 + 5)(x^3 - 2x + 2)$;

г) $f(x) = \frac{\cos x}{2 - x^2}$.

220. а) $f(x)=\frac{3}{x^3}-\sqrt[5]{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}$; б) $f(x)=\left(2-\sqrt{x}\right)\operatorname{tg}x$;

в) $f(x)=\frac{x^4-3x}{1-2x}$; г) $f(x)=\frac{\sin x}{1-2\cos x}$.

221. а) $f(x)=2^x+\lg x$; б) $f(x)=e^{-3x}+2\log_3 2x$;

в) $f(x)=x^2\cdot 5^{2x}$; г) $f(x)=\frac{\ln x}{e^x+e^{-x}}$.

222. а) $f(x)=\sin 3x+\cos 5x$; б) $f(x)=\sqrt[4]{1+x^2}+\frac{1}{(2x-1)^3}$;

в) $f(x)=(3-2x^3)^5$; г) $f(x)=\lg(3x)-3\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

223. а) $f(x)=x^4-2x^2+1$; б) $f(x)=1{,}5\sin 2x-5\sin x-x$;

в) $f(x)=-\frac{x^5}{5}+\frac{10x^3}{3}-9x$; г) $f(x)=x+\cos 2x$

булса, $f'(x)=0$ тигезләмәсен чишегез.

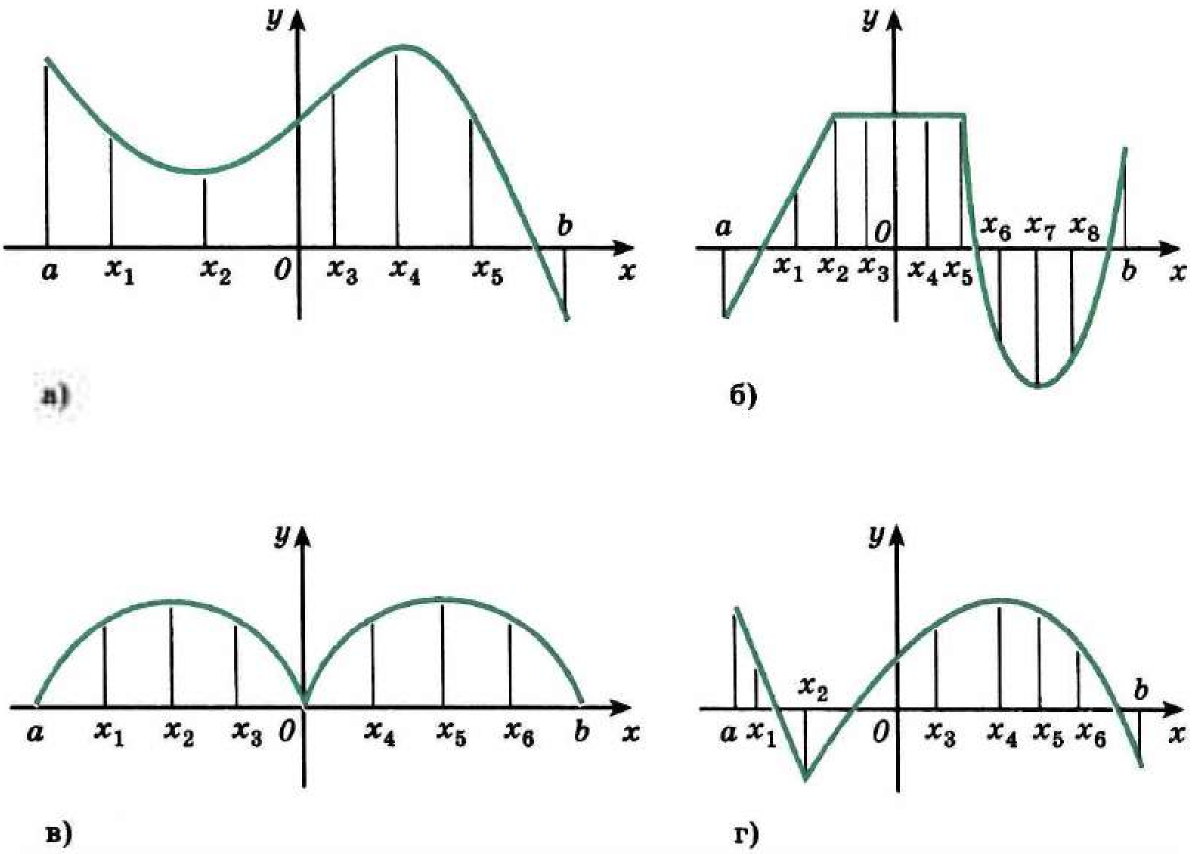
224. Функция график белән бирелгән (153 нче рәсем).

1) Билгеләнгән нокталарның кайсыларында

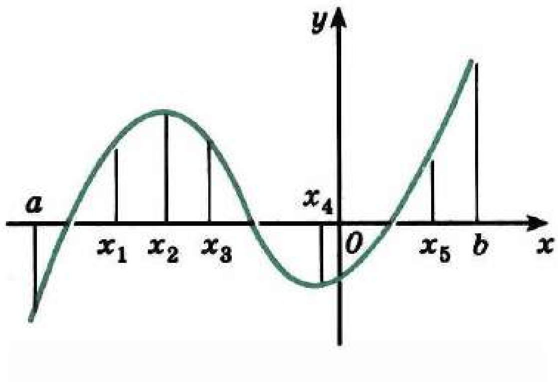
а) $f'(x)>0$; б) $f'(x)<0$; в) $f'(x)=0$ икәнен күрсәтегез;

2) а) $f'(x)>0$; б) $f'(x)<0$; в) $f'(x)=0$ булган аралыкларны күрсәтегез.

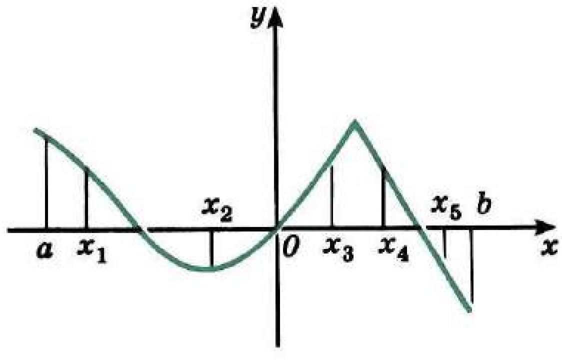
3) $(a;\,b)$ интервалының кайсы нокталарында f функциясенең чыгарылмасы юк?



153 нче рәсем



154 нче рәсем



155 нче рәсем

Чыгарылмаларның кыйммәтләрен бирелгән нокталарда чагыштырыгыз (225, 226).

225. а) x_1 һәм x_2; б) x_1 һәм x_3; в) x_2 һәм x_4; г) x_3 һәм x_5 (154 нче рәсем).

226. а) x_1 һәм x_2; б) x_3 һәм x_5; в) x_4 һәм x_5; г) x_2 һәм x_4 (155 нче рәсем).

227. u, v, w функцияләре x ноктасында дифференцирланалар. $(u, v, w)' = u' v w + u v' w + u v w'$ икәнен исбатлагыз.

22. Чыгарылманы функция тикшерүдә куллану

228. Функциянең x_1 һәм x_2 нокталарындагы якынча кыйммәтен исәплəгез:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, $x_1 = 2{,}0057$, $x_2 = 1{,}979$;

б) $f(x) = 2 + 4x - x^2 + \frac{1}{4}x^4$, $x_1 = 3{,}005$, $x_2 = 1{,}98$.

229. Аңлатманың якынча кыйммәтен исәпләгез:

а) $\sqrt{9{,}009}$; б) $1{,}0001^{15}$; в) $0{,}999^6$; г) $\sqrt[3]{8{,}008}$.

Функцияләрнең үсү һәм кимү аралыкларын, максимум һәм минимум нокталарын табыгыз (230, 231).

230. а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + 18$; б) $f(x) = \frac{2x^2}{3-x}$;

в) $f(x) = \frac{x(x^3-4)}{2}$; г) $f(x) = \frac{x}{4-x}$.

231. а) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$; б) $f(x) = 2 - \sin\frac{x}{2}$;
в) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$; г) $f(x) = 3x - \cos 3x$.

Функцияне тикшерегез һәм аның графигын төзегез (232—234).

232. а) $f(x) = x^2(x-2)^2$; б) $f(x) = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$;

в) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$; г) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$.

233. а) $f(x) = 1 - 2\sin 2x$; б) $f(x) = \cos^2 x - \cos x$;

в) $f(x) = 3 - \cos\frac{x}{2}$; г) $f(x) = \sin^2 x - \sin x$.

234. а) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$; б) $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

в) $f(x) = 2^{x^2-4x}$; г) $f(x) = x - \ln x$.

235. f функциясенең бирелгән аралыкта иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен (әгәр алар булса) табыгыз:

а) $f(x) = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4$, $[1; 3]$;

б) $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$, $[0; \pi]$;

в) $f(x) = \frac{2}{x} + x^2$, $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$;

г) $f(x) = \sin x - x$, $[-\pi; \pi]$.

236. 10 санын саннарның кублары суммасы а) иң зур; б) иң кечкенә булырлык итеп, тискәре булмаган ике кушылучының суммасы рәвешендә күрсәтегез.

237. Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары озынлыгы суммасы 20 см га тигез. Өчпочмакның мәйданы иң зур булсын өчен, катетлар нинди озынлыкта булырга тиеш?

238. Параллелограммның диагональләре озынлыгы суммасы 12 см га тигез. Аның барлык якларының квадратлары суммасының иң кечкенә кыйммәтен табыгыз.

239. Ике урам буйлап 40 км/сәг һәм 50 км/сәг даими тизлек белән юл чатына таба ике машина килә. Урамнарның туры почмак ясап кисешүен искә алып һәм нindидер вакыт моментында автомашиналарның юл чатыннан 2 км һәм 3 км ераклыкта (тиңдәшле рәвештә) булуларын белеп, алар арасындагы ераклык күпме вакыттан соң иң кечкенә булуын белегез.

240. 1,4 м лы картинаның түбәнге кырые күзәтүче күзеннән 1,8 м биеклектә итеп эленгән. Картинаны карау уңай булсын өчен (ягъни вертикаль буенча күрү почмагы иң зур булсын өчен), күзәтүче стенадан нинди ераклыкта торырга тиеш?

241. 4 м лы статуяны биеклеге 5,6 м булган колоннага куйганнар. Буе (күзгә кадәр алганда) 1,6 м булган кеше, статуяны иң зур почмак белән күрү өчен, нинди ераклыкта басарга тиеш?

242. Күләмнәре 16 π м^3 булган барлык цилиндрлар арасыннан тулы өслеге иң кечкенә мәйданлы цилиндрны табыгыз.

243. R радиуслы шарга камарга мөмкин булган иң зур күләмле цилиндрның биеклеген табыгыз.

244. Нигез радиусы R, биеклеге H булган конус эченә тулы өслеге иң зур булган цилиндр камарга кирәк. Цилиндрның радиусын табыгыз.

245. Бирелгән цилиндрны камаучы иң кечкенә күләмле конус төзергә (цилиндр һәм конусның нигез яссылыклары тәңгәл киләләр).

246. R радиуслы шарны камаучы иң кечкенә күләмле конусның биеклеген табыгыз.

247. Конус нигезенең үзәге шар үзәгендә ятарлык итеп, R радиуслы ярымшарны камаучы иң кечкенә күләмле конус төзелгән. Конусның биеклеген табыгыз.

248. 40 см диаметрлы түгәрәк бүрәнәдән, кисемендә нигезе b, биеклеге h булырдай турыпочмаклык килеп чыгарлык итеп, балка кисеп алырга кирәк. Балканың ныклыгы bh^2 ка пропорциональ. b һәм h ка нинди кыйммәтләр биргәндә, балканың ныклыгы иң зур булыр?

249. Тәрәзә ярымтүгәрәк белән тәмамланган турыпочмаклык формасында. Бирелгән периметр өчен мәйданы иң зур булган тәрәзәнең үлчәнешләрен табыгыз.

250. Әйләнә өстендә A ноктасы бирелгән. A ноктасындагы орынмага параллель булган BC хордасын ABC өчпочмагының мәйданы иң зур булырлык итеп үткәрегез.

251. Бирелгән тигезьянлы өчпочмакка камаулы түгәрәкнең радиусы иң зур булсын өчен, бу өчпочмакның мәйданы билгеле булганда, аның түбә янындагы почмагы нинди булырга тиеш?

252. $y = x^2$ параболасында A (2; 0,5) ноктасына кадәрге ераклыгы иң кечкенә булган ноктаны табыгыз.

253. Өчпочмаклы төзек призманың күләме V га тигез. Призманың тулы өслеге иң кечкенә булсын өчен, нигезенең ягы нинди булырга тиеш?

23. Чыгарылманы физикада һәм геометриядә куллану

254. Туры буенча ике нокта хәрәкәт итә. Әгәр:

а) $x_1(t) = 2\frac{2}{3}t^3$, $x_2(t) = 2t - 3$;

б) $x_1(t) = 9t^2 + 1$, $x_2(t) = t^3$

булса, беренче ноктаның тизлеге икенчесеннән кимрәк булгандагы вакыт аралыгын табыгыз.

255. Җисемнең көчәр тирәсендә борылу почмагы вакытка бәйле рәвештә $\varphi(t) = 0{,}1t^2 - 0{,}5t + 0{,}2$ законы буенча үзгәрә. Җисемнең $t = 20$ с вакыт моментындагы почмакча тизлеген табыгыз. (Почмак радианнарда үлчәнә.)

256. Түгәрәк металл диск җылытканда киңәеп, радиусы 0,01 см/с ка бертөрле арта. Дискның радиусы 2 см га тигез булган моментта дискның мәйданы нинди тизлек белән арта?

257. A пунктыннан арадагы почмаклары $60°$ булган ике туры буйлап бер үк вакытта ике җисем хәрәкәт итә башлый. Беренчесе — 5 км/сәг тизлек белән тигез, икенчесе $s(t) = 2t^2 - t$ законы буенча хәрәкәт итә. $t = 3$ сәг моментында алар берберсеннән нинди тизлек белән ераклашалар? (s — километрларда, t сәгатьләрдә үлчәнә.)

258. 5 м озынлыктагы AB кисемтәсенең очлары координаталар күчәре буйлап шуышалар. A очының күчү тизлеге 2 м/с ка тигез. A очы координаталар башлангычыннан 3 см ераклыкта булганда, B очының күчү тизлеге нинди булыр?

259. Вертикаль торучы баскычның озынлыгы 5 м га тигез. Баскычның түбәнге очы 2 м/с даими тизлек белән шуыша башлый. t вакыты моментында баскычның югарыгы очы нинди тизлек һәм нинди тизләнеш белән түбән төшә?

260. Бериш булмаган AB таякчыгының озынлыгы 12 см. Аның AM өлешенең массасы M ноктасының A очыннан ераклыгы квадратына пропорциональ рәвештә үсә һәм, $AM = 2$ см булганда, 10 г га тигез. 1) AB таякчыгының барлык массасын һәм аның теләсә кайсы ноктасындагы сызыкча тыгызлыгын; 2) таякчыкның A һәм B нокталарындагы сызыкча тыгызлыгын табыгыз.

261. Тәгәрмәч борылу почмагы вакытның квадратына пропорциональ булырлык итеп әйләнә. Беренче әйләнешне тәгәрмәч 8 с та башкара. Тәгәрмәчнең әйләнә башлауга 48 с вакыт үткәннән соңгы почмакча тизлеген табыгыз.

262. Җисем 10 м биеклектән 40 м/с башлангыч тизлек белән вертикаль юнәлештә югарыга ыргытылган. Түбәндәге сорауларга җавап бирегез: а) 5 с тан соң ул җир өслегеннән нинди биеклектә булыр? б) Ничә секундтан соң җисем иң югары ноктага җитәр һәм ул җирдән нинди ераклыкта булыр ($g = 10$ м/с^2 дип исәпләргә)?

263. $y = -\frac{x^2}{2} - 1$ параболасының кайсы ноктасында орынма абсциссалар күчәренә а) $45°$, б) $135°$ почмак белен авышкан?

264. Орынмалары абсциссалар күчәренә $135°$ лы почмак белән авышса, $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 3$ функциясе графигы нокталарының абсциссаларын табыгыз.

265. $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ функциясе графигына теләсә нинди орынманың абсциссалар күчәрен кисеп үтүен исбатлагыз.

266. $f(x) = x^5 + 2x - 7$ функциясе графигына теләсә нинди орынманың абсциссалар күчәре белән кысынкы почмак төзүен исбатлагыз.

267. $f(x) = (x + 2)^2$ һәм $g(x) = 2 - x^2$ функцияләре графикларының уртак ноктасы һәм шул үк нокта аша үтүче уртак орынмасы булуын исбатлагыз.

24. Башлангыч функция

268. Түбәндәге функцияләр өчен башлангыч функцияләрнең гомуми күренешен табыгыз:

а) $f(x) = 4\sin x + \cos 3x$; б) $f(x) = x^2 + x^{-5} + x^{2+\sqrt{3}}$;

в) $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$; г) $f(x) = \frac{3}{\cos^2 2x} + \frac{3}{\sin^2 3x}$.

269. f функциясе өчен графигы M ноктасы аша үтүче башлангыч функцияне табыгыз:

а) $f(x) = \frac{2}{x}$, $M\left(\frac{1}{e}; 2\right)$; б) $f(x) = x^{-2} + \cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; -\frac{2}{\pi}\right)$;

в) $f(x) = x^{-4}$, $M(2; -3)$; г) $f(x) = \sin 2x$, $M(0; 1)$.

270. Теләсә нинди x ноктасында чыгарылмасы $2x - 3$ кә һәм 2 ноктасындагы кыйммәте 2 гә тигез булган функцияне табыгыз.

271. Абсциссасы x булган ноктадагы орынманың почмакча коэффициенты $3x^2$ ка тигез булганда, $A(2; 3)$ ноктасы аша үтүче кәкренең тигезләмәсен табыгыз.

272. Материаль нокта координаталар турысы буйлап $v(t) = \sin t \times$ $\times \cos t$ тизлеге белән хәрәкәт итә. $t = \frac{\pi}{4}$ өчен аның координатасы 3 кә тигез булса, нокта хәрәкәтенең тигезләмәсен табыгыз.

25. Интеграл

273. Исәпләгез:

а) $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(1{,}5\pi + 0{,}5x)\,dx$; б) $\int_{1}^{2} (x^{-2} + x^2)\,dx$;

в) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 3x - \sin 2x)\,dx$; г) $\int_{-6}^{-2} (5 - 6x - x^2)\,dx$.

274. Интегралның иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыгыз:

а) $\int_0^a \cos\frac{x}{2}\,dx$, $a \in R$; б) $\int_0^{a+\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx$, $a \in R$.

275. Түбәндәге сызыклар белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз:

а) $y = 0{,}5x^2 - 2x + 3$, $y = 7 - x$;
б) $y = (x-2)^2$, $y = 4 - x^2$;
в) $y = x^2 - 3x + 4$, $y = x + 1$;
г) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 4x - x^2$.

276. $y = x + 4$ турысы фигураны $y = \frac{1}{2}x^2$ һәм $y = 8$ сызыклары белән чикләнгән фигураларга бүлгәли. Һәр фигураның мәйданын табыгыз.

277. $y = 2{,}5 + 2x - 0{,}5x^2$, $x = -1$ сызыклары һәм бирелгән парабола абсциссасы $x = 3$ булган нокта аша үткәрелгән орынма белән чикләнгән фигураның мәйданын табыгыз.

278. $y = x^2 - 4x + 5$ параболасы һәм аның абсциссалары $x = 1$ һәм $x = 3$ булган нокталары аша үткәрелгән орынмалар белән чикләнгән фигураның мәйданын табыгыз.

279. Квадратның мәйданы аның ике чиктәш түбәсе аша үтүче һәм бер ягына аның уртасында орынучы парабола белән нинди чагыштырмада бүленә?

280. a нинди кыйммәткә ия булганда $y = x^2 + 4x + a$ $(a > 0)$, $x = 0$, $x = 2$ һәм $y = 2$ сызыклары белән чикләнгән фигураның мәйданы 12 гә тигез? (Фигураның өске ярымъяссылыкта ятуы билгеле.)

281. $f(x) = a \sin \pi x + b$ функциясе $f'(2) = 2$, $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$ шартларын канәгатьләндергән a һәм b саннары парларын табыгыз.

VI бүлек
Катлаулырак мәсьәләләр

§ 1
Саннар. Аңлатмаларның рәвешен үзгәртү

1. Бөтен саннар

1. Исбатлагыз: а) әгәр p — гади сан һәм $p > 3$ булса, $p^2 - 1$ саны 24 кә бүленә; б) әгәр $a + b + c$ саны 6 га бүленсә, $a^3 + b^3 + c^3$ саны 6 га бүленә (a, b, c — бөтен саннар); в) әгәр $a^2 + b^2$ саны 7 гә бүленсә, $a^2 + b^2$ саны 49 га да бүленә (a һәм b — бөтен саннар); г) $n^2 + 5n + 16$ саны n теләсә нинди бөтен сан булганда да 169 га бүленми.
2. a ның нинди бөтен кыйммәтендә $x^2 + ax + 6 = 0$ тигезләмәсенең ике тамыры да бөтен сан була?
3. Исбатлагыз: а) төзелмә N санының иң кечкенә бүлүчесе (1 гә тигез булмаган) $\sqrt{N}$ нан артмый; б) N — төгәл квадрат булганда һәм шул вакытта гына N санының так сандагы бүлүчеләре була.
4. n санының бүлүчеләре санын табыгыз: а) $n = 1024$ булса; б) $n = 210$ булса; в) $n = p_1^{\alpha_1} p_1^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ — натураль, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — төрле гади саннар) булса; г) $n = 10!$ ($k! = 1 \cdot 2 \times \times 3 \cdot \ldots \cdot k$ тапкырчыгышның тамгаланышы) булса.
5. а) Төгәл квадратларны 3 кә, 4 кә бүлгәндә нинди калдыклар булуы мөмкин?

   б) Бөтен коэффициентлы квадрат тигезләмәнең дискриминанты 23 кә тигез булуы мөмкинме?

   в) Турыпочмаклы өчпочмакның барлык якларының озынлыклары — бөтен саннар. Катетларының озынлыклары так саннар булуы мөмкинме?

   г) 12 урынлы N санының унарлы язылышында 2 һәм 9 цифрлары 2 шәр тапкыр очрый, ә калганнары — берәр тапкыр. N төгәл квадрат буламы?
6. а) Санның унарлы язылышында 300 берлек һәм берничә нуль бар (башка цифрлар юк). Бу сан төгәл квадрат буламы?

   б) 1987 урынлы a саны 9 га бүленә. a ның цифрлары суммасы — b саны, b ның цифрлары суммасы — c саны, c ның цифрлары суммасы — d саны. d ны табыгыз.
7. а) 5 кә; б) 3 кә; в) 9 га бүленүчәнлек билгеләрен исбатлагыз.

Тигезләмәләрне бөтен саннарда чишегез (8—9).

8. а) $3^x = 1 + y^2$; б) $2^x - 1 = y^2$;
в) $x^2 - y^2 = 91$; г) $2^x + 1 = y^2$.

9. а) $13x - 7y = 6$; б) $x! + y! = (x + y)!$;
в) $27x - 9y = 15$; г) $1! + 2! + ... + x! = y^2$.

10. $\frac{5l+6}{3l+2}$ вакланмасын (биредә l — бөтен сан) нинди бөтен k саннарына кыскартып була?

11. Бирелгән: $\lg 16 = 1{,}20412...$. 125^{100} санының цифрлары санын һәм беренче цифрын табыгыз.

2. Математик индукция методы

12—15 нче мәсьәләләрнең чишелеше математик индукция принцибына нигезләнә, бу принципны еш кына арифметиканың бер аксиомасы буларак кабул итәләр. Әлеге принцип түбәндәгечә тәгъбирләнә:

> Натураль n санына бәйле раслау:
> а) ниндидер $n = n_0$ башлангыч кыйммәт өчен дөрес булса һәм
> б) ул $n = k$ (биредә $k \geqslant n_0$ — ирекле натураль сан) өчен дөрес дип кабул иткәннән соң, $n = k + 1$ өчен дә дөрес раслау чыкса, бу раслау теләсә нинди натураль $n \geqslant n_0$ өчен дә дөрес була.

Тигезләмәләрне математик индукция методы белән исбатлагыз ($n \in N$) (12—13).

12. а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

в) $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n - 1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)$;
г) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

13. а) $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + ... + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$;

б) $2^2 + 6^2 + ... + (4n - 2)^2 = \frac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

в) $\frac{7}{1 \cdot 8} + \frac{7}{8 \cdot 15} + \frac{7}{15 \cdot 22} + ... + \frac{7}{(7n-6)(7n+1)} = 1 - \frac{1}{7n+1}$;

г) $\frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 16} + ... + \frac{1}{4n(4n+4)} = \frac{1}{16} - \frac{1}{16(n+1)}$.

14. Тигезсезлекләрне математик индукция методы белән исбатлагыз ($n \in N$):

а) $|\sin nx| < n|\sin x|$; б) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$;

в) $(1+h)^n > 1 + nh$, теләсә нинди натураль $n \geq 2$, $h > -1$ һәм $h \neq 0$ өчен *(Бернулли тигезсезлеге)*;

г) $(1+h)^n > 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$, теләсә нинди натураль $n \geq 3$ һәм $h > 0$ өчен.

15. Математик индукция методы белән исбатлагыз. Теләсә нинди натураль n өчен:

а) $6^{2n+1} + 1$ саны 7 гә кабатлы;
б) $3^{3n+2} + 2^{4n+1}$ саны 11 гә кабатлы;
в) $4^n + 15n - 1$ саны 9 га кабатлы;
г) $7^{2n} - 1$ саны 48 гә кабатлы.

3. Реаль саннар

16. Теләсә нинди рациональ санны чиксез периодик унарлы вакланма рәвешендә күрсәтергә мөмкин икәнен исбатлагыз.

17. Теләсә нинди чиксез периодик унарлы вакланманың ниндидер рациональ санның язылышы булуын исбатлагыз.

18. Натураль a саны тулы квадрат булмаса, $\sqrt{a}$ ның иррациональ сан булуын исбатлагыз.

19. Түбәндәгеләрнең рациональ сан булуы мөмкинме:
а) ике иррациональ санның суммасы;
б) иррациональ санның иррациональ дәрәҗәсе?

Саннарның иррациональ булуын исбатлагыз (20—22).

20. а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{3}$; в) $\lg 5$; г) $\log_2 9$.

21. а) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

22. а) $k\sqrt{2} + k\sqrt{3}$, биредә k һәм p — нульгә тигез булмаган бөтен саннар;
б) 3,272772777277772... (беренче икелектән соң бер җиде, икенчесеннән соң — ике, өченчесеннән соң — өч һ. б., n нчы икелектән соң — n җиделек һ. б.).

Аңлатмаларны гадиләштерегез (23—24).

23. а) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{129-56\sqrt{5}}$;

в) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$; г) $\sqrt{57+12\sqrt{15}}$.

24. а) $\sqrt{67-42\sqrt{2}} + \sqrt{19-6\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt{51-4\sqrt{77}} - \sqrt{47-4\sqrt{33}}$.

25. **Ваклаучыдагы иррациональлектән котылыгыз:**

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}$.

26. **Түбәндәге саннар бер үк геометрик прогрессиянең буыннары булырга мөмкинме?**
а) 10, 11, 12; б) 81, –36, 24.

27. $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}$ **санының рациональ булуын исбатлагыз.**

28. **Теләсә нинди M саны өчен**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

суммасы M нан зуррак булырлык натураль n саны табылуын исбатлагыз.

4. Аңлатмаларның рәвешен үзгәртү

29. **Тапкырлаучыларга таркатыгыз:**

а) x^4+4; **б)** x^4+x^2+1; **в)** x^5+x+1;

г) $(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$;

д) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$;

е) $x^3+y^3+z^3-3\,xyz$.

30. **Бердәйлекне исбатлагыз:**
$(a^2+b^2)\,(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$.

31. **Формулаларны исбатлагыз:**

а) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$;

б) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

32. **$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ булуы билгеле, биредә α, β, γ — уңай.**
Бердәйлекне исбатлагыз:

а) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

б) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

в) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

г) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

33. Тигезлекне исбатлагыз:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, теләсә нинди $x \in [-1; 1]$ өчен;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$; в) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

г) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, теләсә нинди $x \in [-1; 1]$ һәм $x \neq 0$ өчен.

Исәпләгез (34—35).

34. а) $\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ}$;

б) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, әгәр $\sin \alpha + \cos \alpha = m$ булса;

в) $\cos 84^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 12^\circ$;

г) $\cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha$, әгәр $\cos 2\alpha = m$ булса.

35. а) $\arcsin(\sin 10)$; б) $\arccos(\cos 12)$;

в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2)$; г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 3)$.

36. x_0 саны $\operatorname{arctg} = \frac{\pi}{12}$ тигезләмәсенең тамыры булуын тикшерегез, $x_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

37. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$ икәне билгеле. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ икәнен исбатлагыз, өстәвенә α, β, γ ның уңай саннар булмавы да мөмкин.

38. $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$ икәнен исбатлагыз.

39. а) $\log_x u = a$, $\log_y u = b$, $\log_z u = c$ булса, $\log_{xyz} u$ ны табыгыз.

б) $\log_7 12 = a$, $\log_{12} 24 = b$ булса, $\log_{54} 168$ не табыгыз.

40. а) $x > 1$ булса, $2^{\sqrt{\log_2 x}} = x^{\sqrt{\log_x 2}}$ икәнен исбатлагыз.

б) Таблица кулланмыйча гына исәпләгез: $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

5. Прогрессияләр

41. Тигезләмәне бөтен саннарда чишегез:

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \ldots + \frac{1}{x} = 3.$$

42. Теләсә нинди $\varphi \in (0; \frac{\pi}{4})$ өчен тигезлекнең дөреслеген исбатлагыз:

$$1 - \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^3 \varphi + \ldots = \frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}.$$

43. Геометрик прогрессияне тәшкил итүче дүрт санның суммасы -40 ка, ә аларның квадратлары суммасы 3280 гә тигез. Бу саннарны табыгыз.

44. Өчурынлы санның цифрлары — геометрик прогрессия, ә аңардан 400 гә кечерәк санның цифрлары арифметик прогрессия тәшкил итсә, әлеге өчурынлы санны табыгыз.

45. a ның нинди кыйммәтендә $5^{1+x}+5^{1-x}$, $\frac{a}{2}$, 25^x+25^{-x} саннары (бирелгән тәртиптә) арифметик прогрессия тәшкил итәрлек x лар табылыр?

46. x, y, z саннары (бирелгән тәртиптә) геометрик прогрессия тәшкил итәләр, $x+y$, $y+z$, $z+x$ саннары — арифметик прогрессия. Геометрик прогрессиянең тапкырлыгын табыгыз.

47. Арифметик прогрессиянең беренче m һәм n буыннарының суммалары тигез икәне билгеле, ягъни $S_m=S_n$. S_{m+n} ны табыгыз.

48. Геометрик прогрессиянең беренче n буынының суммасы A һәм аларга кире булган зурлыкларның суммасы B $(B\neq 0)$ икәнлеге билгеле булса, беренче n буынның тапкырчыгышын табыгыз.

49. Арифметик (a_n) һәм геометрик (b_n) прогрессияләрнең буыннары $a_{40}=b_{40}>0$, $a_{60}=b_{60}>0$ шартларын канәгатьләндерә. Кайсы зуррак: a_{50} яки b_{50}?

50. Сумманы табыгыз:

а) $1+11+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n\text{ берлек}}$; б) $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n$;

в) $\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+1)}+\ldots+\frac{1}{(k+n-1)(k+n)}$;

г) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$.

§ 2.
Элементар функцияләр һәм аларның үзлекләре

6. Функцияләрне тикшерү

51. Функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз:

а) $y=\frac{\sqrt{|x|-x}}{\lg 2x}$; б) $y=\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{\cos x}$;

в) $y=\frac{\arcsin 0{,}5x}{\sqrt{x^2-1}}$; г) $y=\sqrt{\cos(\sin x)}$;

д) $y=\log_{2\sin x}\cos x$; е) $y=\frac{1}{\lg\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)}$.

52. $y = f(x)$ функциясенең билгеләнү өлкәсе — $[-1; 2]$ кисемтәсе. Функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз:

а) $y = f(x) + 1$; б) $y = f(x+1)$; в) $y = 2f(x)$;
г) $y = f(2x)$; д) $y = f(-x)$; е) $y = -f(x)$;
ж) $y = |f(x)|$; з) $y = f(|x|)$; и) $y = f(1-x)$;
к) $y = f(1-|x|)$; л) $y = f(\sqrt{x})$; м) $y = f(x^2)$.

Һәр функциянең кыйммәтләре өлкәсен табыгыз (53—54).

53. а) $y = \cos^2 x - \cos x$; б) $y = \sqrt{1-\sin x \operatorname{ctg} x}$;
в) $y = 3\cos x - 4\sin x - 1$; г) $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2}$.

54. а) $y = \cos^2 x - \cos^4 x$; б) $y = [x]^2$;
в) $y = 3\sin^2 x - 4\sin x - 2$; г) $y = \left|\dfrac{1}{x^4+\frac{1}{2}}\right|$.

55. Функция җөпме (яки такмы)?

а) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$; б) $f(x) = \log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;
в) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x-5)^2}}{x\cos x}$; г) $f(x) = \log_a\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

56. а) Билгеләнү өлкәсе 0 ноктасына карата симметрик булган теләсә нинди f функциясе өчен $y = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ функциясе җөп, ә $y = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ функциясе так булуын исбатлагыз.
б) Билгеләнү өлкәсе 0 ноктасына карата симметрик булган теләсә нинди функцияне җөп һәм так функцияләрнең суммасы рәвешендә (өстәвенә бер генә рәвештә) күрсәтергә мөмкин булуын исбатлагыз.
в) Бер үк вакытта җөп һәм так булган барлык функцияләрне табыгыз.

57. f һәм g функцияләре — уртак T периоды белән периодик функцияләр. $y = f(x) + g(x)$ һәм $y = f(x)g(x)$ функцияләренең T периодлы периодик функцияләр булуын исбатлагыз.

58. Барлык саннар турысында билгеләнгән һәм уртак периоды булмаган ике өзлексез периодик функция суммасының периодик булмавын исбатлагыз.

59. а) Барлык рациональ саннар — бу функциянең периоды, ә барлык иррациональ саннар периоды булмаган; б) барлык иррациональ саннар — бу функциянең периоды, ә барлык рациональ саннар периоды булмаган периодик функцияләр бармы?

60. Функциянең периодик булмавын исбатлагыз:

а) $f(x) = \cos x \cos\left(x\sqrt{2}\right)$; б) $f(x) = \cos x + \cos\left(x\sqrt{2}\right)$;

в) $f(x) = \sin x^2$; г) $f(x) = \sin\sqrt{x}$.

61. Функциянең иң кечкенә уңай периодын табыгыз:

а) $y = \cos^3 x$; б) $y = \sqrt{|\sin 2x|}$;

в) $y = \cos\left(x\sqrt{2}\right) + \cos\frac{x}{\sqrt{2}}$; г) $y = \{-1 - 2x\}$.

62. Функциянең периодик булмавын исбатлагыз:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sin|x|$;

в) $y = x^2 + x + 1$; г) $y = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$.

63. Саннарны чагыштырыгыз:

а) $\log_2 3$ һәм $\log_5 8$; б) $\log_9 10$ һәм $\lg 11$;

в) $2^{3^{100}}$ һәм $3^{2^{150}}$; г) $\operatorname{cosec}\frac{1}{2}$ һәм $4\left(1 - \sin\frac{1}{2}\right)$.

64. Саннарны үсү тәртибендә урнаштырыгыз:

а) $\sin 4°$, $\cos 2$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{ctg} 6$;

б) $\sin 10°$, $\cos 275°$, $\operatorname{tg} 190°$, $\operatorname{ctg} 100°$.

65. $y = f(x)$ функциясенең I аралыгында 1) үсүе; 2) кимүе билгеле. Әгәр: а) $k > 0$; б) $k < 0$ булса, $y = kf(x)$ функциясе I аралыгында үсүче (яки кимүче) функция буламы?

66. f — барлык саннар турысында үсүче һәм уңай функция булсын.

Түбәндәге расламаны исбатлагыз:

а) $y = f^2(x)$ функциясе R да үсә;

б) $y = \frac{1}{f(x)}$ функциясе R да кими;

в) $y = \sqrt{f(x)}$ функциясе R да үсә;

г) $y = \lg f(x)$ функциясе R да үсә.

67. Әгәр f: а) җөп; б) так; в) периодик функция икәнлеге билгеле булса, n ның нинди кыйммәтләрендә f функциясенең төгәл n экстремумы була?

68. $f(x) = ax + b$ рәвешендәге функцияләр арасыннан теләсә нинди x өчен: а) $f(f(x)) = f(x)$; б) $f(f(x)) = x$ булганнарын табыгыз.

69. Әгәр: а) $f(x) = 3 - x$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ булса, $f_2(x) = f(f(x))$, $f_3(x) = f(f(f(x)))$ һ. б., $f_n(x) = f(f(f \ldots (f(x)\ldots))$ функцияләрен һәм $f_n(x)$ ның билгеләнү өлкәсен табыгыз.

70. $y = \frac{1}{ax+b}$; б) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ рәвешендәге функцияләр арасыннан үзләренең кире функцияләре белән тәңгәл килүче барлык функцияләрне дә табыгыз.

71. [0; 1] кисемтәсендә билгеләнгән һәм ике экстремум ноктасы булган кайтма функциягә мисал китерегез.

Бирелгәнгә кире функцияне табыгыз. Табылган функцияләрнең графикларын төзегез (72—73).

72. а) $y = \sqrt{x+1}$; б) $y = \lg(1-x)$; в) $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$; г) $y = \sqrt{\lg x}$.

73. а) $y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $y = \cos x,\ x \in (0; \pi)$;

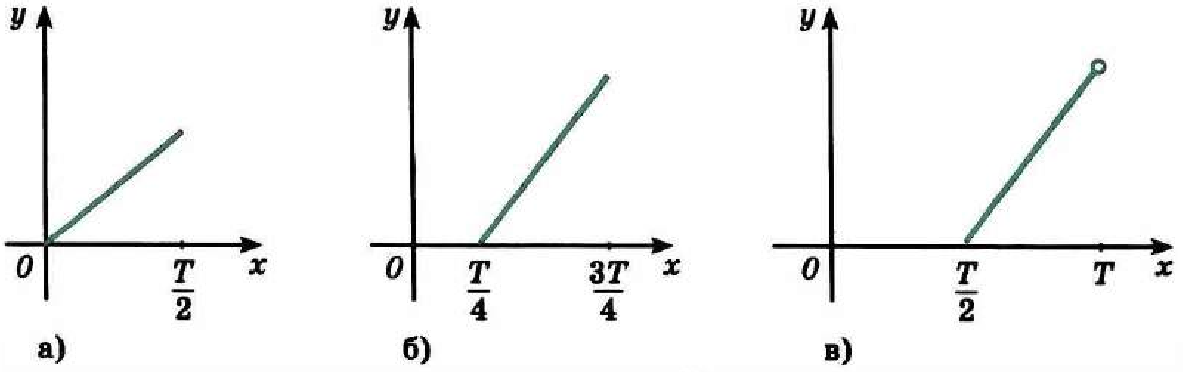
в) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in (0; \pi)$.

7. Функцияләрнең графиклары

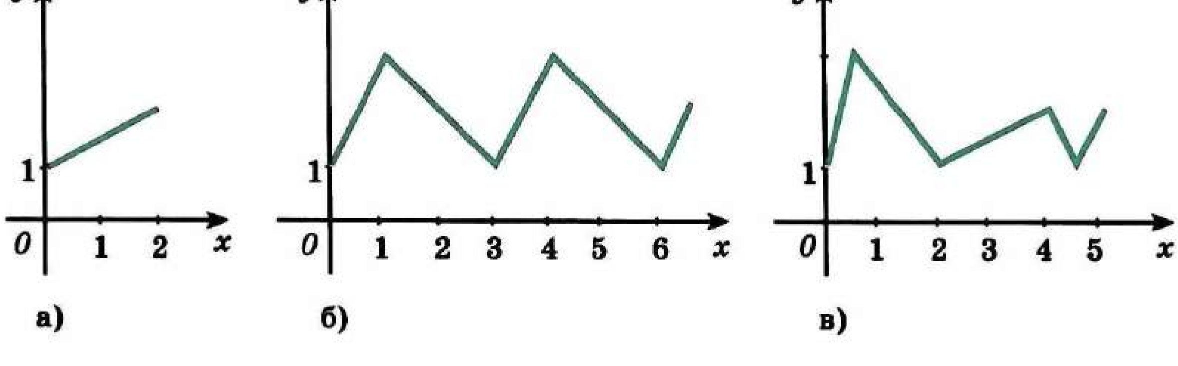
74. а) Җөп функциянең графигы ординаталар күчәренә карата симметрик; б) так функциянең графигы координаталар башлангычына карата симметрик булуын исбатлагыз.

75. 156 нчы рәсемдә сурәтләнгән функцияләрнең графикларын иң кечкенә уңай T периодлы периодик функция графикларына кадәр өстәп төзегез (әгәр бу мөмкин булса), шуның өстенә алар: а) җөп; б) так булсын.

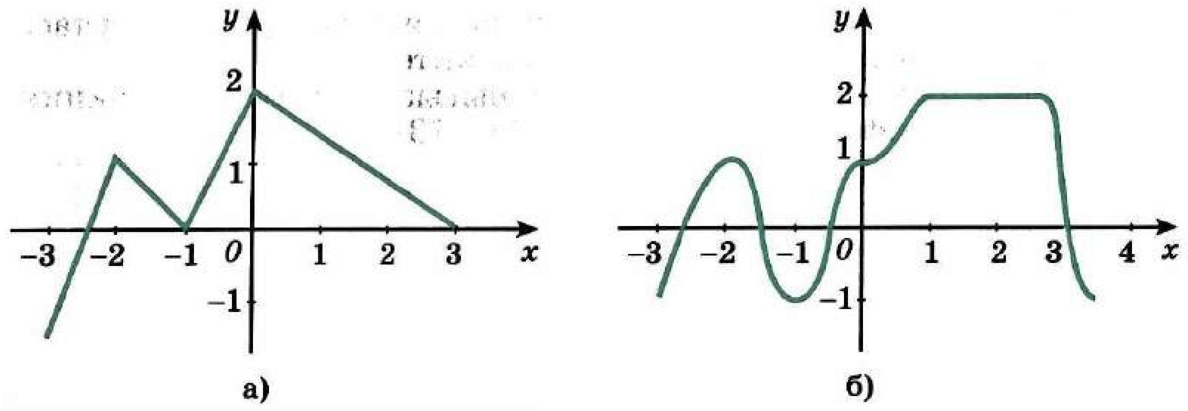
76. 157 нче рәсемдә барлык саннар турысында билгеләнгән периодик функция графигының бер өлеше сурәтләнгән. f функциясенең иң кечкенә уңай периоды нинди булыр?



156 нчы рәсем



157 нче рәсем



158 нче рәсем

$y = f(x)$ функциясенең графигы сурәтләнгән (158 нче рәсем). Функция графигының эскизын төзегез (77—78).

77. а) $y = f(-2x)$; б) $y = f(|x|)$; в) $y = f(1 - x)$; г) $y = |f(x)|$.

78. а) $y = -2f(x)$; б) $y = \frac{1}{f(x)}$;
в) $y = f(2x + 4)$; г) $y = -f(-|x|)$.

79. f функциясе графигы ярдәмендә φ функциясе графигы табылырга мөмкин булган рәвешүзгәртүләр эзлеклелеген табыгыз:
а) $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = \sin x + \cos x$;
б) $f(x) = \sin^2 x$, $\varphi(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

80. Теләсә нинди вакланмалы сызыкча $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ һәм $ad - bc \neq 0$) функциясенең графигы $y = \frac{k}{x}$ функциясе графигыннан параллель күчерү ысулы ярдәмендә табылырга мөмкин булуын исбатлагыз. k коэффициентын табыгыз.

81. R да функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыгыз:

а) $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 4x + 3}}$;

в) $f(x) = 2\sin^2 x - \cos 2x$; г) $f(x) = \cos^2 x + \cos x + 3$.

82. Функциянең үсү (кимү) аралыкларын, максимумнарын һәм минимумнарын табыгыз:

а) $y = 2\sin x + 3\cos x$; б) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$;

в) $y = \cos 2x - 2\cos x$; г) $y = \lg \sin x$.

83. Функция графигының асимптоталарын табыгыз:

а) $y = \frac{x}{x-2}$; б) $y = \frac{x^2+1}{x}$; в) $y = \frac{x^2}{|x|+1}$; г) $y = \frac{x^2+4}{x^2-9}$.

Функциянең графигын төзегез (84—85).

84. а) $y = \{1{,}5\,x - 1\}$; б) $y = \frac{12 + x - x^2}{x^2 - 16}$;

в) $y = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$; г) $y = \frac{\sqrt{1 + 2x + x^2}}{x + 1}$.

85. а) $y = \sin x \sqrt{\cos^2 x} + \cos x \sqrt{\sin^2 x}$;

б) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x} + \sin x$;

в) $y = \sin^2(\sqrt{\operatorname{tg} x}) + \cos^2 x(\sqrt{\operatorname{tg} x})$; г) $y = \sqrt{1 - \sin^2 x} + \cos x$.

Функциянең графигын төзегез (86—89).

86. а) $y = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$; б) $y = 2^{\text{[illegible]}}$; в) $y = 2^{|\log_2 x| + 1}$; г) $y = \log_x \frac{x}{2}$.

87. а) $y = \sqrt{[x]}$; б) $y = \sqrt{\{x\}}$; в) $y = \{x\}^2$; г) $y = \{x^2\}$; д) $y = \frac{\{x\}}{|x|}$.

88. а) $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$; б) $y = \sqrt{\log_{2000} \cos^{2000} x}$;

в) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \sin x$; г) $y = \{\cos x\}$.

89. а) $y = \sin(\arcsin x)$; б) $y = \arcsin(\sin x)$;

в) $y = \cos(2 \arccos x)$; г) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

90. Графикларның эскизлары ярдәмендә тигезләмәнең чишелешләре санын табыгыз:

а) $\sin x = 100\,x$; б) $\arcsin x = x$;

в) $\lg x = \cos x$; г) $x^3 + \operatorname{tg}^2 x = 100$.

91. 159 нчы рәсемдә

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

функциясенең графигы сурәтләнгән. a, b, c, d коэффициентларының тамгаларын билгеләгез.

Координаталар яссылыгында координаталары түбәндәге шартларны канәгатьләндерүче нокталар күплеген сурәтләгез (92—96).

92. а) $x(y - 2) = 0$; б) $|y| = |x^3 - 2x|$;

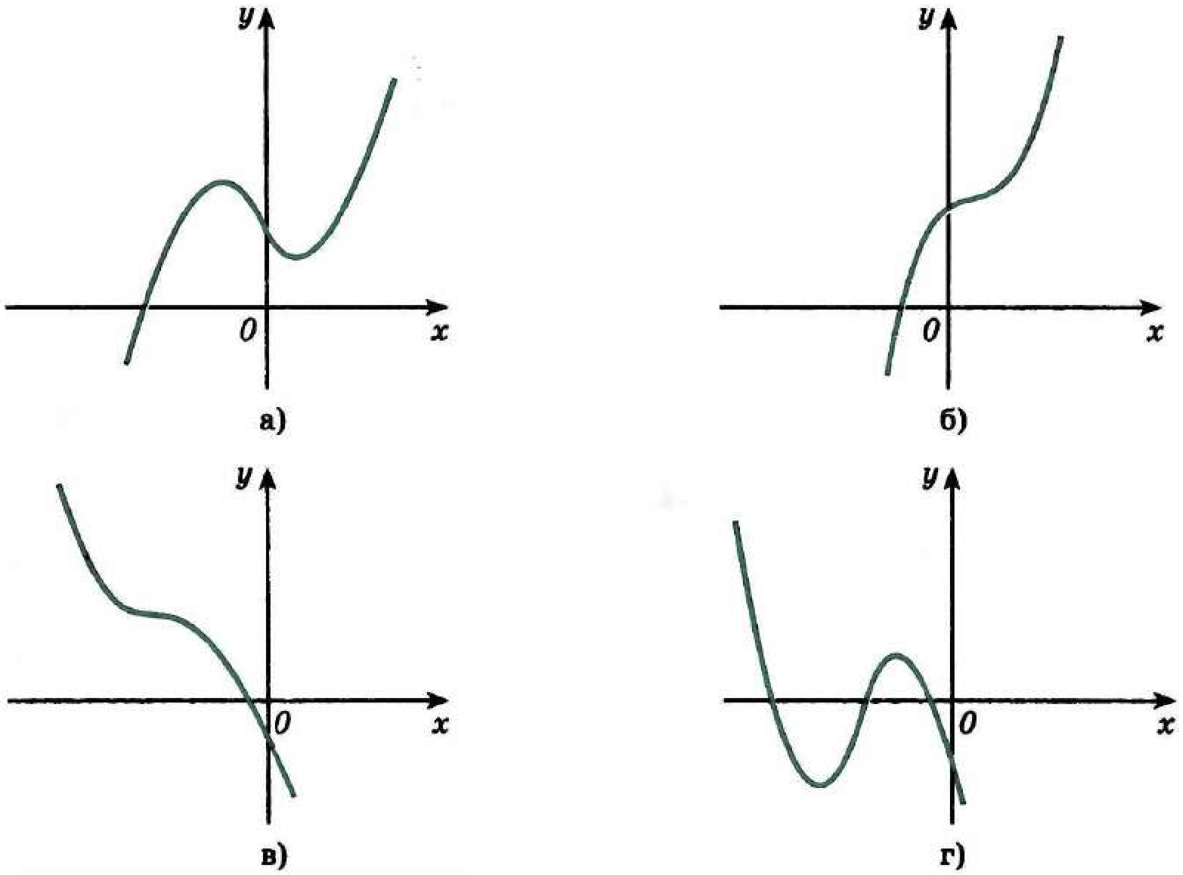
в) $(x - 2)(y + 4) = 0$; г) $|y| = \sin x$.

93. а) $|x| < 1$, $|y| < 1$; б) $|x - 3| \leqslant 1$, $|y - 4| \leqslant 1$;

в) $|y| > |x + 1|$; г) $|x + y| + |x - y| \geqslant 2$.

94. а) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \leqslant 0$; б) $|x| + |y| = 4$;

в) $\sqrt{x + y} \geqslant |x|$; г) $\frac{xy + 1}{xy - 1} \geqslant \frac{y + 1}{y - 1}$.



159 нчы рәсем

95. а) $y^2 + \cos^2 x = 1$; б) $x^2 + y^2 = x^2 y^2 + 1$;
в) $|y| = \log_{\frac{1}{2}} \big||x + 2| - 1\big|$.

96. а) $\sqrt{x + y} \geqslant \sqrt{|x|}$; б) $|x| - |y| < a$; в) $[x] \leqslant [y]$; г) $\{x\} \geqslant \{y\}$;
д) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$; е) $\sin x > \sin y$; ж) $\min(x; y) = 1$; з) $xy + 1 \geqslant 0$.

§ 3.
Тигезләмәләр, тигезсезлекләр һәм системалар

8. Рациональ алгебраик тигезләмәләр

97. a ның кыйммәтләре нинди булганда бирелгән тигезләмәнең чишелеше була?
а) $x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1 = 0$;
б) $(a - 3)x^2 - 2(3a - 4)x + 7a - 6 = 0$.

98. а) a ның нинди кыйммәтләре өчен

$$(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$$

тигезләмәсе тамырларының берсе 3 тән зурак, ә икенчесе 2 дән кечерәк була?

б) a ның нинди кыйммәтләре өчен

$$(2a + 3)\ x^2 + (a + 1)\ x + 4 = 0$$

тигезләмәсенең ике тамыры да $[-2;\ 0]$ кисемтәсендә ятар?

99. x_1 һәм x_2 саннары — $x^2 + px + q = 0$ тигезләмәсенең тамырлары.
а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$;
в) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; г) $x_1^4 + x_2^4$ не p һәм q аша белдерегез.

100. $x^2 - 4x + p = 0$ тигезләмәсе тамырларының квадратлары суммасы 16 га тигез. p ны табыгыз.
б) a ның нинди кыйммәтләрендә $x^2 + 2a(x - 1) + 1 = 0$ тигезләмәсенең тамырлары суммасы бу тамырларның квадратлары суммасына тигез була?

101. $ax^2 + bx + c = 0$ тигезләмәсенең тамырлары юк, өстәвенә $a + b + c < 0$. C ның тамгасын билгеләгез.

102. Әгәр $ax^2 + bx + c = 0$ һәм $bx^2 + cx + a = 0$ $(a \neq 0)$ тигезләмәләренең уртак тамыры булса, $cx^2 + ax + b = 0$ тигезләмәсенең дә тамыры шул ук булуын исбатлагыз.

103. Исбатлагыз: а) әгәр бөтен коэффициентлы $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$ тигезләмәсенең $x_0 = \frac{p}{q}$ тамыры кыскармаслык вакланма булса, p — a_n ның бүлүчесе, ә q саны a_0 нең бүлүчесе була; б) $P(x)$ күпбуынын $(x - a)$ бербуынына бүлгәндәге калдык бу күпбуынның a ноктасындагы кыйммәтенә тигез (аерым алганда, a саны — $P(x)$ күпбуынының тамыры булса, бу күпбуын $(x - a)$ га калдыксыз бүленә).

104. 103 нче мәсьәлә нәтиҗәсеннән файдаланып, тигезләмәне чишегез:
а) $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$;
б) $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$;
в) $x^4 + x^3 + x^2 - x - 2 = 0$;
г) $2x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 7x - 6 = 0$.

Тигезләмәне чишегез (105—114).

105. а) $(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 40$;
б) $(x - 1)^5 + (x + 3)^5 = 242\ (x + 1)$;
в) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 100$;
г) $x^4 + (x + 2)^4 = 17$.

106. а) $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$; б) $6 - \frac{21}{x^2-4x+10} = 4x - x^2$;
в) $\frac{1}{(x+2)(x-7)} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} = 1$;
г) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = -30$.

107. а) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 6$; б) $\frac{6x}{x^2+2x+3} + \frac{11x}{x^2+7x+3} = 2$.

108. а) $x^4 - 2x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1 = 0$; б) $2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$;
в) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$; г) $x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 = 0$.

109. а) $8x^4 + 8x^3 - x - 190 = 0$; б) $4x^4 - 4x^3 + \frac{x}{2} = 66$.

110. а) $x^4 + 4x - 1 = 0$; б) $x^4 - 4x^3 - 1 = 0$.

111. а) $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$;
б) $(x^2 - x + 1)^2 + 2(x^2 + 1) = (x + 1)^2$.

112. а) $x^2 + \frac{9x^2}{(3+x)^2} = 7$; б) $x^2 + \frac{x^2}{(1+x)^2} = 1$.

113. а) $x^2 + |x| - 2 = 0$; б) $x^2 - 2x - 3 = |3x - 3|$.

114. а) $\big|\,\big|\,\big||x - 1| + 2\big| - 1\big| + 1\big| = 2$;

б) $2|x + 6| - |x| - |x - 6| = 18$;
в) $|2x - 3| = |x^2 - 2x - 6|$;
г) $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = x + 2$.

9. Рациональ алгебраик тигезсезлекләр

Тигезсезлекләрне чишегез (115—118).

115. а) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geqslant 5$; б) $\frac{3(x-1)(x+2)^2}{(x^2+1)(x+1)^2(x-2)} \geqslant 0$.

116. а) $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1 > 0$;
б) $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) \geqslant 17$.

117. а) $x^{16} - x^{13} + x^{10} - x^7 + x^2 - x + 1 > 0$;
б) $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 < 0$.

118. а) $|x^2 - 2x| < x$; б) $3x^2 - |x - 3| > 9x - 2$.

119. Тигезсезлекне исбатлагыз:

а) $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ $(a > 0,\ b > 0)$; б) $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ $(a > 0)$;

в) $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$ (a, b, c, d — уңай саннар);

г) $\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

Тигезсезлекләрне исбатлагыз (120—124).

120. а) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$;
б) $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0)$;

в) әгәр $a + b + c = 1$ булса, $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$;
г) $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c)$.

121. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$.

122. $(a+b)(a^3+b^3) \leqslant 2(a^4+b^4)$.

123. $5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0 \ (a^2+b^2 \neq 0)$.

124. $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \ (a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0)$.

10. Рациональ алгебраик тигезләмәләр системалары

Тигезләмәләр системаларын чишегез (125—134).

125. а) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 3a^3, \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15a^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0. \end{cases}$

126. а) $\begin{cases} u + v = 2, \\ |3u - v| = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-1| + |y-2| = 1, \\ y + |x-1| = 3. \end{cases}$

127. а) $\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x - y + 4z = 1, \\ -x + 6y - z = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = -2, \\ x - y + 2z = -7, \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$

128. а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^4 + y^4 = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + xy = 0, \\ x^3 + y^3 + x^3y^3 = 12. \end{cases}$

129. а) $\begin{cases} x - y + xy = 17, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) = 10, \\ (x-y)(xy+1) = -3. \end{cases}$

130. а) $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = z, \\ x^2 + z^2 = 13x^2, \\ 2(x^2 + z^2) = zy^2. \end{cases}$

131. а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x^2+y^2)\frac{x}{y} = 6, \\ (x^2-y^2)y = x. \end{cases}$

132. а) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x-y), \\ x^3 + y^3 = 7(x+y); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = x + 5y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y + z = 2, \\ x + y^2 + z = 2, \\ x + y + z^2 = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 2yz = 1, \\ y^2 + 2xz = 2, \\ z^2 + 2xy = 1. \end{cases}$

133. а) $\begin{cases} 2x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)=15, \\ 3y\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)=20, \\ 6z\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{xy}{x+y}=\frac{6}{5}, \\ \frac{xz}{x+z}=\frac{3}{4}, \\ \frac{zy}{z+y}=\frac{2}{3}. \end{cases}$

134. а) $\begin{cases} x^3+y^3-z^3-xyz=-4, \\ x^3-y^3+z^3-xyz=8, \\ -x^3+y^3+z^3-xyz=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x^2+4y+1=0, \\ 4y^2+4z+1=0, \\ 4z^2+4x+1=0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ xy+xz+yz=9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^2+xz+z^2=28, \\ y^2+yz+z^2=19. \end{cases}$

11. Тигезләмәләр һәм тигезләмәләр системаларын төзүгә мәсьәләләр

135. 1,2 м озынлыктагы әйләнә буенча даими тизлекләр белән ике нокта хәрәкәт итә. Алар, төрле юнәлештә хәрәкәт итсәләр, һәр 15 с саен очрашалар. Бер юнәлештә хәрәкәт иткәндә, бер нокта икенчесен һәр 60 с саен куып җитә. Һәр ноктаның тизлеген табыгыз.

136. Өчурынлы санның цифрлары суммасы 17 гә тигез, аларның квадратлары суммасы 109. Бирелгән саннан 495 не алгач, шул ук цифрлар белән, ләкин кире тәртиптәге язылган сан килеп чыга. Санны табыгыз.

137. Метродагы пассажир хәрәкәт итүче эскалатор буйлап 24 с та төшә. Әгәр хәрәкәтсез торган эскалатор буйлап шул ук тизлек белән барса, 42 с та аска төшеп җитә. Пассажир хәрәкәт итүче эскалатор баскычында басып торса, күпме вакыт эчендә аска төшеп җитәр?

138. *A*, *B* һәм *C* пунктлары турысызыклы юллар белән тоташкан. *AB* юлының кисемтәсенә ягы $\frac{1}{2}$ *AB* га тигез булган квадрат формадагы кыр тоташа, *BC* кисемтәсенә ягы *BC* га тигез булган квадрат кыр тоташа, *AC* кисемтәсенә буе *AC* га тигез, ә киңлеге 4 км булган турыпочмаклык рәвешендәге урман участогы тоташа. Урманның мәйданы квадрат кырларның мәйданнары суммасыннан 20 км² га зуррак. Урманның мәйданын табыгыз.

139. Мәктәп олимпиадасында җиңүчеләрне тәбрикләү өчен, бертөрле китаплар һәм бер үк төрле значоклар сатып алганнар. Китаплар өчен — 1056 сум, значоклар өчен 56 сум түләгәннәр. Китапларны значокларга караганда 6 данәгә артыграк сатып алганнар. Ничә китап сатып алганнар?

140. Портфель, авторучка һәм китаплар сатып алу өчен, укучы берникадәр акча сарыф иткән. Үз бәясенә караганда портфель 5 тапкыр арзанрак, авторучка 2 тапкыр арзанрак, китап 2,5 тапкыр арзанрак торса, сатып алынган әйберләр 80 сум торыр иде. Әгәр портфель 2 тапкыр арзанрак, китап 3 тапкыр арзанрак, ә авторучка 4 тапкыр арзанрак торса, шул ук сатып алынган әйберләргә укучы 120 сум түләгән булыр иде. Барлык сатып алынган товар күпме тора һәм кайсы әйбергә күбрәк түләнгән: портфельгәме яки авторучкагамы?

141. Алтын белән көмешнең өч төрле эретмә кисәкләре бар. Өченче кисәкнең 2 г эретмәсендәге алтын беренче һәм икенче эретмәдән 1 әр грамм алынган кисәкнеке кадәр. Өченче кисәкнең массасы 10 г алтын кергән беренче кисәк белән 80 г алтын кергән икенче кисәкнең суммар массасына тигез. Беренче кисәккә караганда 4 тапкыр зуррак булган өченче кисәктә 75 г алтын бар. Беренче кисәктә күпме алтын бар?

142. A пунктыннан В пунктына иртән сәгать 8 дә тизйөрешле поезд чыга. Шул ук вакытта B дан A га таба пассажир һәм курьер поездлары чыга, пассажир поездының тизлеге курьер поездына караганда 2 тапкыр кечерәк. Тизйөрешле поезд B пунктына шул ук көнне 17 сәг 50 мин та килеп җитә, ә курьер поезды белән ул иртәнге 10 сәг 30 мин тан да иртәрәк очрашмый. Әгәр тизйөрешле поезд һәм курьер поезды очрашкан вакыт белән тизйөрешле поезд һәм пассажир поезды очрашкан вакыт арасы бер сәгатьтән дә ким булмаса, пассажир поездының A пунктына килеп җитү вакытын табыгыз.

143. Самолет очып килеп җиргә төшкәннән соң берникадәр вакыт дәвамында v тизлеге белән тигез хәрәкәт итә. Моннан соң очучы тормозлый, самолетның хәрәкәте тигез акрыная башлый һәм һәр секунд саен тизлеге 2 м/с ка кечерәя. Җиргә төшү урыныннан тәмам туктаганга кадәрге юл 4 км га тигез. Самолетның беренче 400 м юлны үткән вакытының җир буйлап үткән барлык юл вакытына чагыштырмасы 4 : 65 кә тигез. v тизлеген табыгыз.

12. Иррациональ тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр

Тигезләмәләрне чишегез (144—152).

144. а) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1;$

б) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3;$

в) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1;$ г) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=4\frac{1}{4}.$

145. а) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x-1} = 1$;   б) $\sqrt[3]{10-x} - \sqrt[3]{3-x} = 1$;

в) $x + \sqrt[3]{x} = 2$;   г) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$.

146. а) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$;   б) $\sqrt{1-2\cos x} = \sin x$;

в) $\sqrt{4-3\cos x} = -2\cos x$;   г) $\sqrt{2\sin 2x} = -2\sin x$.

147. а) $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 2$;

б) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

148. а) $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 17$;

б) $\sqrt{x(2-x)} + \sqrt{x^4(2-x)^7(x+3)^5} + \sqrt[6]{(x-2)(x+1)x^2} +$
$+ \sqrt[5]{(x+2)(x+6)} = 2$.

149. а) $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} = 8\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

б) $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = \sqrt[3]{(7+x)(2-x)}$.

150. а) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$;   б) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$.

151. а) $\frac{\sqrt[7]{12+x}}{x} + \frac{\sqrt[7]{12+x}}{12} = \frac{64}{3}\sqrt[7]{x}$;   б) $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$.

152. $\frac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}} = 27\,\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$.

153. Һәр реаль a саны өчен тигезләмәнең барлык чишелешләрен табыгыз:

а) $x + \sqrt{1-x^2} = a$;   б) $\sqrt{x^2-1} + x = a$.

Тигезсезлекләрне чишегез (154—158).

154. а) $\sqrt{x^2-3x+2} > 2x-5$;   б) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$;

в) $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$;   г) $x - \sqrt{1-|x|} < 0$.

155. а) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$;   б) $\frac{\sqrt{x^2-1}+1}{x} \geqslant 1$;

в) $4x^2 + 12x\sqrt{1+x} \leqslant 27(1+x)$;

г) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} < 35 - 2x$.

156. а) $x^2 - 2x + 3 < \sqrt{4-x^2}$;   б) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$.

157. а) $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > \dfrac{35}{12}$;

б) $\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{25}{9} > \dfrac{3x^2 + \frac{4}{9}}{2\left(x - \frac{1}{3}\right) + \sqrt{x\left(x - \frac{8}{3}\right)}}$.

158. а) $\sqrt{9 + 3^x - 2} \geqslant 9 - 3^x$; б) $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$;

в) $\log_2(\sqrt{x+3} - x - 1) \leqslant 0$; г) $\sqrt{4^{x+1} + 17} - 5 > 2^x$.

Тигезләмәләр системасын чишегез (159—162).

159. а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt{x}\sqrt[3]{y} = 12, \\ xy = 64; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ x + y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 2. \end{cases}$

160. а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x + 2y} + \sqrt[3]{x - y + 2} = 3, \\ 2x + y = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 2y + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1, \\ 2x + y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} = \dfrac{1}{6}, \\ \sqrt[3]{xy} = 6. \end{cases}$

161. а) $\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 36, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 72; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{6x}} = \dfrac{5}{2}, \\ xy - x - y = 0. \end{cases}$

162. а) $\begin{cases} x\sqrt{x} + 3y\sqrt{x} = 36, \\ y\sqrt{y} + 3x\sqrt{y} = 28; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y} = 3\sqrt[6]{xy}, \\ x - y = 63; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - \sqrt{xy} + 2y = 29, \\ 2x - \sqrt{xy} - y = 20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2}} = \dfrac{5 + \sqrt{7}}{5 - \sqrt{7}}, \\ x^3 + 2y^3 = 118. \end{cases}$

13. Тригонометрик тигезләмәләр, тигезсезлекләр һәм системалар

Тигезләмәләрне чишегез (163—165).

163. а) $3 + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
б) $\operatorname{tg} x - \sin x = 1 - \operatorname{tg} x \sin x$;
в) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$;
г) $\sqrt{6\sin x} - 2\cos x = 0$.

164. а) $|x|\sin x + x = 0$; б) $\sqrt{\sin x - 1} + 2x = 0$;
в) $|x|\cos x - x = 0$; г) $\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{-x}}{2}\right)^2 = \sin\frac{x}{2}$.

165. а) $\frac{1}{\cos^4 x} - \operatorname{tg}^4 x = 17$; б) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 2(\sin 4x - \sin 2x)$;
в) $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$; г) $2^{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos x} = 4$.

166. Формуланы исбатлагыз:

а) $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; б) $\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

167. Тигезләмәне чишегез:
а) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$; б) $\sin x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2$.

168. Бердәйлекне исбатлагыз:

$$a\sin x + b\cos x = A\sin(x + \varphi),$$

биредә φ түбәндәге шартларны канәгатьләндерә:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\quad \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\quad A = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тигезләмәләрне чишегез (169—175).

169. а) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$; б) $2\sin x + 3\cos x = 4$.

170. $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

171. $\cos\frac{\pi x}{31}\cos\frac{2\pi x}{31}\cos\frac{4\pi x}{31}\cos\frac{8\pi x}{31}\cos\frac{16\pi x}{31} = \frac{1}{32}$.

172. а) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$; б) $\sin^{100} x + \cos^{100} x = 1$.

173. $2\cos\frac{x}{10} = 2^x + 2^{-x}$.

174. $x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0.$

175. $8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}.$

176. $(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \sin 4x = 2$ тигезләмәсенең чишелешләре булмавын исбатлагыз.

Тигезсезлекләрне чишегез (177—178).

177. а) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - 4\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3} > 0;$ б) $\frac{15}{\sin x + 1} < 11 - 2\sin x;$

в) $\frac{2}{\mathrm{tg}\, x + 1} < 2 - \mathrm{tg}\, x;$ г) $\mathrm{tg} x + \mathrm{ctg} x \geqslant \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}.$

178. а) $\cos 2x \leqslant \cos 3x - \cos 4x;$

б) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x \geqslant 2;$

в) $\sin 2x + 2\sin x > 0;$

г) $(1 + \cos 2x)(\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3}) > 0.$

179. Тигезсезлекнең дөреслеген исбатлагыз:

а) $\sqrt{\cos\varphi} < \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}$, әгәр $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ булса;

б) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, теләсә нинди α өчен.

Тигезсезлекләрне чишегез (180—181).

180. $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\cos\pi x\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$

181. $\sqrt{5 - 2\sin x} \geqslant 6\sin x - 1.$

182. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ булса, $\cos\sin x > \sin\cos x$ булуын исбатлагыз.

183. A, B һәм C — өчпочмакның почмаклары булса, $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$ булуын исбатлагыз.

Тигезләмәләр системаларын чишегез (184—186).

184. а) $\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin(y - 3x) = 2\sin^3 x, \\ \cos(y - 3x) = 2\cos^3 x. \end{cases}$

185. $\begin{cases} \mathrm{tg}\frac{x}{2} + \mathrm{tg}\frac{y}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ \mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

186. $\begin{cases} \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{tg}\, y = \frac{\sin z}{\cos x \cos y} + 3, \\ \mathrm{tg}\, y\,\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin x}{\cos y \cos x} - 5, \\ \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin y}{\cos x \cos z} - 3. \end{cases}$

14. Күрсәткечле һәм логарифмик тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр

Тигезләмәләрне чишегез (187—189).

187. а) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10$; б) $3^x+4^x=25$;

в) $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=4$; г) $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=4^x$.

188. а) $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$; б) $x^{\frac{1}{4}-2\cos 3x}=\sqrt[4]{x}$;

в) $|x-2|^{10x^2-3x-1}=1$; г) $2^{|x|}=\sin x^2$.

189. а) $2^{\sin^2 x}+4\cdot 2^{\cos^2 x}=6$; б) $3^{\lg \operatorname{tg} x}-2\cdot 3^{\lg \operatorname{ctg} x+1}=1$;

в) $4^{3+2\cos 2x}-7\cdot 4^{1+\cos 2x}=4^{\frac{1}{2}}$; г) $(2\sin x)^{\cos x}=1$.

190. а) a ның нинди кыйммәтләрендә $a\,(2^x+2^{-x})=5$ тигезләмәсенең бердәнбер чишелеше була?

Тигезсезлекләрне чишегез (191—192).

191. а) $2^x+2^{|x|}\geqslant 2\sqrt{2}$; б) $25\cdot 2^x-10^x+5^x>25$;

в) $a^x<b^{2+x}$; г) $\dfrac{2^{x+1}-1}{2^{x+1}+1}<2$.

192. а) $(x-2)^{x^2-6x+8}>1$; б) $9^{\sqrt{x^2-3}}+3<3^{\sqrt{x^2-3}}\cdot\frac{28}{3}$.

193. а) $4^x-a\cdot 2^x-a+3<0$ тигезсезлегенең кимендә бер чишелеше булырлык итеп, a ның барлык кыйммәтләрен табыгыз.

194. Тигезләмәләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases}3^{2x}+4^{2y}=82,\\3^x-4^y=8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(2^{x+1}-3)\cdot 2^{y-1}=1,\\\sqrt{3x+y^2}=x+y;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2^{\cos x}+2^{\frac{1}{\cos y}}=5,\\2^{\cos x+\frac{1}{\cos y}}=4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}9^{2\operatorname{tg} x+\cos y}=3,\\9^{\cos y}-81^{\operatorname{tg} x}=2.\end{cases}$

Тигезләмәләрне чишегез (195—197).

195. а) $\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{4\log_4 x-2}=4$;

б) $\log_6 2^{x+3}-\log_6|3^x-3|=x$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(3+|\sin x|)=2^{|x|}-2$;

г) $\sqrt[3]{1+\lg \operatorname{tg} x}+\sqrt[3]{1-\lg \operatorname{tg} x}=2$.

196. а) $9x^{\lg x} + 91\, x^{-\lg x} = 60$; б) $|x-1|^{\log_2 x - \log_2 x^2} = |x-1|^3$;

в) $x^{2\lg\frac{100}{x} - 3\lg x} = 0{,}1$; г) $\log_{x+1}(x^2 + x - 6) = 4$.

197. а) $\lg(\operatorname{arctg} x) + \lg(\operatorname{arcctg} x) = a$;

б) $\log_{x+1}(x^2 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1}(x+1) = 3$;

в) $\arcsin(\lg x^2) + \arcsin(\lg x) = \frac{\pi}{3}$;

г) $\log_{3-4x^2}(9 - 16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3-4x^2)}$.

198. a ның нинди кыйммәтләрендә $2\log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$ тигезләмәсенең дүрт чишелеше була?

199. a ның нинди кыйммәтләрендә $3x \lg x = 1 + a \lg x$ тигезләмәсенең: а) бер чишелеше; б) ике чишелеше була?

200. a ның нинди кыйммәтләрендә $x \ln|x| = a$ тигезләмәсенең бер тамыры була?

Тигезсезлекләрне чишегез (201—203).

201. а) $\log_2(1 + \log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x) < 1$;

б) $\log_2^2(x-1)^2 - \log_{0,5}(x-1) > 5$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 \log_{x-1} 9) > 0$; г) $\log_2(\log_{\frac{1}{3}} \log_5 x) > 0$.

202. а) $\log_2(2^x - 1)\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 2) > 2$; б) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} < 6$;

в) $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg 2x + 5} - 2$; г) $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10$.

203. а) $\log_{x-3}(x-4) < 2$; б) $2^{\log_{2-x}(x^2 + 8x + 15)} < 1$;

в) $\log_x \frac{4x-5}{|x-2|} > \frac{1}{2}$; г) $\log_x(\log_9(3^x - 9)) < 1$.

204. $\log_a(x^2 - x - 2) > \log_a(3 + 2x - x^2)$ тигезсезлегенең $x = \frac{9}{4}$ булганда дөрес булуы билгеле. Бу тигезсезлекнең барлык чишелешләрен табыгыз.

Тигезләмәләр системасын чишегез (205—206).

205. а) $\begin{cases} \log_x y = 2, \\ \log_{x+1}(y + 23) = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+y)^x = (x-y)^y, \\ \log_2 x = 1 + \log_2 y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-y)^{2y-x} = 125, \\ \lg 2(x-y) = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15, \\ 3^y \cdot \log_2 x = 2^{\log_2 x} + 3^{y+1}. \end{cases}$

206. а) $\begin{cases} 3^{\cos x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos y}, \\ \log_2(\sin x - \cos x) - \log_2(\sin x + \cos x) = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_2 \sin x + \log_2 \sin y = -2, \\ \log_3 \cos x + \log_3 \cos y = 1 - \log_3 4. \end{cases}$

§ 4.
Анализ башлангычлары

15. Чыгарылма

207. а) Функциянең үсү билгесен исбатлагыз: әгәр I аралыгындагы аргументның теләсә нинди ике кыйммәте x һәм $x + \Delta x$ өчен (биредә $\Delta x \neq 0$) $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$ шарты үтәлсә һәм бары тик шул вакытта f функциясе I аралыгында үсә;
б) I аралыгында функциянең кимүе турында охшаш билгене әйтегез һәм исбатлагыз.

208. Исбатланган билгеләрдән файдаланып (207 нче күнегүне кара), функциянең үсү һәм кимү аралыкларын табыгыз:
а) $f(x) = 2x^2$; б) $f(x) = 3 - 4x$;
в) $f(x) = 3 - x^2$; г) $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$.

209. Чыгарылманың билгеләмәсеннән файдаланып, f функциясенең x_0 ноктасында дифференциаллануын исбатлагыз, әгәр:
а) $f(x) = x|x|$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = |x^2 - 1|(x + 1)$, $x_0 = -1$;

в) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x \leq 1 \text{ булса}, \\ x^3 - x, x > 1, x_0 = 1 \text{ булса}; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \text{ булса}, \\ x^3, x < 0, x_0 = 0 \text{ булса}. \end{cases}$

210. Әгәр f функциясе саннар турысының һәр ноктасында дифференциалланса һәм теләсә нинди x_1 һәм x_2 кыйммәтләре өчен $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ тигезсезлеге үтәлсә, $f'(x)$ ның даими булуын исбатлагыз.

211. а) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ функциясенең 0 ноктасында чыгарылмасы булмавын исбатлагыз.

212. а) $f_1(x)$ функциясе x_0 ноктасында дифференциалланса, ә $f_2(x)$ функциясе дифференциалланмаса;
б) ике функциянең дә x_0 ноктасында чыгарылмасы булмаса, x_0 ноктасында $\varphi(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ функциясенең чыгарылмасы булмый дип әйтү дөресме?

213. f функциясе саннар турысының һәр ноктасында дифференциалланса һәм теләсә нинди x_1 һәм x_2 кыйммәтләре өчен $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ тигезлеге үтәлсә, $f(x)=e^{ax}$ яки $f(x)=0$ булуын исбатлагыз.

214. Кире тригонометрик функцияләрнең чыгарылмалары формулаларын табыгыз:

а) $\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\arccos' x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $\operatorname{arctg}' x=\frac{1}{1+x^2}$; г) $\operatorname{arcctg}' x=-\frac{1}{1+x^2}$.

215. Функциянең чыгарылмасын табыгыз:
а) $y=x^x$; б) $y=(\sin x)^{\cos x}$.

216. Функциянең n нчы чыгарылмасын табыгыз: $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$.

217. $x>x_0$ булганда, $f(x_0)=g(x_0)$ һәм, $f'(x)>g'(x)$ булса, $x>x_0$ булганда, $f(x)>g(x)$ була.

218. Сумманы исәпләгез:

а) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}$;

б) $2+3\cdot\frac{2}{2}+4\cdot\frac{3}{2^2}+5\cdot\frac{4}{2^3}+\ldots+(n+1)\cdot\frac{n}{2^{n-1}}$.

16. Функцияләрне тикшерүдә чыгарылмалар куллану

Функциянең үсүен (кимүен) һәм экстремумнарын тикшерегез (219—220).

219. а) $f(x)=x^2(\sqrt{x}-1)$; б) $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$;
в) $f(x)=6\sin x-\cos 2x$; г) $f(x)=2\sin x+3\cos x$.

220. а) $f(x)=-0{,}2x^5+0{,}5x^4-x^3-x^2-x$;
б) $f(x)=0{,}8x^5-x^4+4x^3+2x^2+4x$.

221. f функциясе R да үсүче булырлык итеп, a ның барлык кыйммәтләрен табыгыз:

а) $f(x)=\frac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+5$;

б) $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+48ax+6x-5$.

222. Бирелгән тигезләмәнең бердәнбер тамыры булуын исбатлагыз:
а) $\cos x=\frac{\pi}{2}-x$; б) $\sin x=-x-\pi$.

223. Тигезсезлекне чишегез:

а) $2+\sin x>\frac{1}{1+x^2}$; б) $2-\cos x>\frac{1}{1+x^2}$.

224. Теләсә нинди $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ куб тигезләмәсенең кимендә бер реаль тамыры булуын исбатлагыз.

225. n дәрәҗәсендәге күпбуынның n нан да артык булмаган тамыры һәм $(n-1)$ дән дә күп булмаган экстремум ноктасы булуын исбатлагыз.

226. n нчы дәрәҗәдәге күпбуын үзенең һәр кыйммәтен n тапкырдан артыграк алмавын исбатлагыз.

227. $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ вакланмалы рациональ функция (n — $P(x)$ ның дәрәҗәсе, m — $Q(x)$ ның дәрәҗәсе) булсын.
а) $R(x)$ үзенең һәр кыйммәтен x ның $k = max(m, n)$ кыйммәтләреннән артыграк алмавын;
б) $R(x)$ ның, әгәр $m \neq n$ булса, $(m + n - 1)$ дән артыграк булмаган экстремум нокталары һәм, әгәр $m = n$ булса, $(m + n - 2)$ дән артыграк булмаган экстремум нокталары булуын исбатлагыз.

228. Функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыгыз:

а) $f(x) = 4x^3 - x|x-2|$ $[0; 3]$ да;

б) $f(x) = \max\limits_{R}\left(\frac{10}{x^2 + 4\pi x + 41} + \cos x\right)$.

229. A, B, C пунктлары бер турыда ятмыйлар, өстәвенә $\angle ABC = 60°$. Бер үк вакытта A ноктасыннан — автомобиль, ә B ноктасыннан поезд чыга. Автомобиль B юнәлешендә —80 км/сәг тизлек белән, поезд C юнәлешендә 50 км/сәг тизлек белән хәрәкәт итә. $AB = 200$ км булса, нинди вакыт моментында (хәрәкәт башлангычыннан алып) поезд белән автомобиль арасы иң кечкенә була?

230. Кәгазь битендә текст 384 см^2 биләп торырга тиеш. Өске һәм аскы буш кырлар — 3 әр см, уң һәм сул кырлар 2 шәр см булырга тиеш. Кәгазьне экономияләү ягыннан караганда, кәгазь битенең иң отышлы үлчәүләре нинди булырга тиеш?

231. Пароход өчен ягулык чыгымнары ике өлешкә бүленә. Беренчесе тизлеккә бәйле түгел һәм сәгатькә 480 сум тәшкил итә. Чыгымнарның икенче өлеше тизлекнең кубына пропорциональ, һәм, тизлек 10 км/сәг булганда, чыгымның бу өлеше сәгатенә 30 сумга тигез. Тизлек нинди булганда 1 км юлга төшкән чыгымнарның гомуми суммасы иң кечкенә була?

232. $M(0; 1)$ ноктасыннан $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}x^{-\frac{1}{2}}}$ функциясе графигына кадәрге иң кыска араны табыгыз.

233. Кайсы зуррак?

а) $3^{\sqrt{2}}$ яки $2^{\sqrt{3}}$;   б) $\left(\frac{1}{1987}\right)^{\frac{1}{1987}}$ яки $\left(\frac{1}{1988}\right)^{\frac{1}{1988}}$.

234. $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; булса, түбәндәгеләрне исбатлагыз:

а) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$; б) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$;

в) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$; г) $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

235. Тигезсезлекне исбатлагыз:

а) $x > 0$ булганда, $e^x > 1 + x$;

б) $x > 0$ булганда, $\ln(1 + x) < x$.

236. Тигезләмәне чишегез:

а) $\ln x = 1 - x$; б) $2^x = 3 - x$.

237. Бирелгән тигезләмәнең тамырлары санын a параметрына бәйләп табыгыз:

а) $x^3 - 3x = a$; б) $|x^2 - 4x + 3| = ax$.

238. a киңлегендәге елгага туры почмак белән b киңлегендәге канал үткәрелгән. Каналга керә алу өчен, пароходлар нинди максималь озынлыкта булырга мөмкин (a һәм b метрларда үлчәнә)?

239. (0; 10) интервалында функциянең минималь кыйммәтләрен табыгыз:

$$f(x) = 2x + \frac{18\pi^2}{x} + \cos x.$$

17. Чыгарылманы физика һәм геометриядә куллану

240. R радиуслы тәгәрмәч туры буйлап тәгәри. t секунд эчендә тәгәрмәчнең борылу почмагы $\varphi = t + \frac{t^2}{2}$ тигезләмәсе белән билгеләнә. Тәгәрмәч үзәге хәрәкәтенең тизлеген һәм тизләнешен табыгыз.

241. Туры горизонталь юл өстеннән 12 м биеклеккә лампа беркетелгән. Бу юл буйлап баручы кеше лампадан 50 м/мин тизлек белән ераклашса, аның күләгәсе нинди тизлек белән озыная барыр (кешенең озынлыгы 1,8 м)?

242. $y = 8 - x$ һәм $y = 4\sqrt{x + 4}$ функцияләренең графиклары үзара нинди почмак ясап кисешәләр?

243. M ноктасы аша узучы f функциясе графигына орынманың тигезләмәсен языгыз:

а) $f(x) = \frac{1}{x}$, $M(0; 3)$; б) $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $M(-1; -3)$;

в) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, $M(-1; 0)$; г) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $M(0; 6)$.

244. Аргументның $f(x) = 3\cos 5x$ һәм $g(x) = 5\cos 3x + 2$ функцияләре графикларына бу нокталардан үткәрелгән орынмалар параллель булырлык кыйммәтләрен табыгыз.

245. $y = \frac{a}{x}$ гиперболасына орынманың координаталар күчәрләре арасында яткан кисемтәсе орыну ноктасы белән урталай бүленә дигән расламаны исбатлагыз.

246. $xy = a^2$ гиперболасына орынма белән координаталар күчәрләре арасында хасил булган өчпочмакның мәйданы даими $2a^2$ ка тигез булуын, ә орыну ноктасының бу өчпочмакны камаучы әйләнәнең үзәге булуын исбатлагыз.

247. a ның нинди кыйммәтендә $f(x) = \frac{ax - x^3}{4}$ функциясенең графигы абсциссалар күчәрен 45° лы почмак белән кисә (кимендә бер кисешү ноктасында)?

248. a һәм b ның нинди кыйммәтләрендә $y = 7x - 2$ турысы $y = ax^2 + bx + 1$ функциясе графигына A (1; 5) ноктасында орына?

249. a ның теләсә нинди кыйммәтләре өчен $f(x) = x^2 - ax$ функциясе графигының $y = -x$ турысына перпендикуляр булган орынмасы барлыгын исбатлагыз.

250. Координаталар яссылыгында M_k нокталары күплеген сурәтләгез, биредә M_k ($k = 1, 2...$) — M (x, y) ноктасыннан $y = x^2$ параболасына k орынма үткәрергә мөмкин булган нокталар күплеге.

18. Башлангыч функция

R да f функцияләре өчен барлык башлангыч функцияләрне табыгыз (251, 252).

251. а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = |x - 1|$; в) $f(x) = |x^2 - 1|$.

252. а) $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$; б) $f(x) = xe^{-x^2}$;

в) $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$, $x \in (0; \pi)$; г) $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

253. а) $f'(x) = \frac{1}{x-1}$ һәм $f(3) = -1$;

б) $f''(x) = 3 - x$, $f(0) = 1$, $f'(1) = 0$;

в) $f'(x) = \cos x$ һәм $f(e) = \pi$;

г) $f''(x) = -1$ һәм $f(0) = f(2) = 0$ булса,

барлык f функцияләрен табыгыз.

254. f функциясе өчен графигы M ноктасы аша узучы башлангыч функцияне табыгыз. Башлангычның графигын төзегез.

а) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \text{ булса}, \\ 1, & x \geqslant 0 \text{ булса}, \end{cases}$ $M(0; 0)$.

б) $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \text{ булса}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \geqslant 1 \text{ булса}, \end{cases}$ $M(4; 0)$.

255. $|-a; a|$ интервалда билгеләнгән өзлексез так функциянең теләсә нинди башлангычы җөп функция булуын исбатлагыз.

256. $|-a; a|$ интервалда билгеләнгән өзлексез җөп функциянең кимендә бер так башлангычы булуын исбатлагыз.

257. Ике җисем бер ноктадан бер үк вакытта туры буйлап хәрәкәт итә башлый. Беренчесенең тизлеге $v(t) = 3t^2 - 6t$, икенчесенеке $v(t) = 10t + 20$. Алар кайсы моментта һәм башлангыч ноктадан нинди ераклыкта очрашырлар? (Тизлек м/с та үлчәнә.)

258. Туры буйлап хәрәкәт итүче m массалы җисемнең x координаталы ноктада потенциаль энергиясе $u(x)$ ка тигез. Исбатлагыз:
а) туры буйлап хәрәкәт иткәндә җисемнең $x(t)$ координатасы дифференциаль $mx''(t) = -u'(x)$ тигезләмәсен канәгатьләндерә;
б) $x'' = -\omega^2 x$ гармоник тирбәнеш башкаручы m массалы матди ноктаның потенциаль $u(x)$ энергиясе $\frac{kx^2}{2}$ гә тигез, биредә $k = m\omega^2$ ($u(0) = 0$) дип алыгыз.

259. Ньютонның икенче законы буенча туры буйлап хәрәкәт итүче m массалы матди ноктаның тулы энергиясе $E = \frac{mv^2}{2} + u(x)$ның саклануын исбатлагыз ($u(x)$ — потенциаль энергия).

260. $x_1(t)$ һәм $x_2(t)$ $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ тигезләмәсенең ике чишелеше булсын. $x_1(t) - x_2(t)$ һәм $kx_1(t)$ функцияләре (k — ирекле сан) шулай ук бу тигезләмәнең чишелешләре булуын исбатлагыз.

261. $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ тигезләмәсенең $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ рәвешендәге һәм башлангыч $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ шартларын канәгатьләндергән чишелеше барлыгын исбатлагыз.

262. 260—261 нче күнегүләрдәге мәсьәләләренең нәтиҗәләреннән файдаланып, дифференциаль тигезләмә $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ ның теләсә нинди чишелешен $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ рәвешендә язарга мөмкин икәнлеген исбатлагыз.

263. Бердәйлекне функциянең даимилек билгесеннән файдаланып исбатлагыз:
а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

264. $y'y^2 = 2$ һәм $y(2) = 2$ икәнлеге билгеле булса, y функциясен табыгыз.

265. Функцияләрнең башлангычларын табыгыз:
$$e^x \sin x \text{ һәм } e^x \cos x.$$

19. Интеграл

266. Матди нокта туры буйлап хәрәкәт итә. Исбатлагыз:

а) $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(t)\,dt$ (теләсә нинди t моментында нокталың тизлеге $v(t)$ һәм координатасы башлангыч t_0 моментында x_0 гә тигез булуы билгеле булса);

б) $v(t) = v_0 + \int\limits_{t_0}^{t} a(t)\,dt$ (теләсә нинди t моментында нокталың тизләнеше $a(t)$ һәм башлангыч t_0 моментында тизлеге v_0 гә тигез булуы билгеле булса).

267. $f(x)$ — дәрәҗәсе 3 тән зуррак булмаган күпбуын булсын. Исбатлагыз:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3),$$

биредә $y_1 = f(a)$, $y_2 = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $y_3 = f(b)$.

268. Исбатлагыз:

а) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, $f(x)$ так функция булса;

б) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a (x)\,dx$, $f(x)$ җөп функция булса.

269. 268 нче күнегүдәге мәсьәләнең нәтиҗәләреннән файдаланып исәпләгез:

а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\text{tg}\,x + \sin x)\,dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx$.

270. Исәпләгез:

а) $\int\limits_0^{28} \frac{5-x}{\sqrt[3]{1+\frac{x}{4}}}\,dx$; б) $\int\limits_0^1 xe^{x^2}\,dx$;

в) $\int\limits_2^0 x\sqrt[3]{1-\frac{x}{2}}\,dx$; г) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \cos^4 x)\,dx$.

271. Интеграл ярдәмендә чикләмәне табыгыз:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, $p>0$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n^{p-1}}{(n+1)^p}+\frac{n^{p-1}}{(n+2)^p}+\ldots+\frac{n^{p-1}}{(n+n)^p}\right)$, $p>1$.

272. Исәпләгез:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 nx dx$ $(n\in \mathrm{N})$; б) $\int\limits_0^{2\pi}\sin kx\cos mx\, dx$ $(m\in N,\ k\in N)$;

в) $\int\limits_{\pi}^{\pi}\sin^2 x\, dx$; г) $\int\limits_0^{\pi}\sin 3x\cos 5x\, dx$.

273. Интегралның геометрик интерпретациясеннән файдаланып исәпләгез:

а) $\int\limits_{-2}^{2}\left||x|-1\right| dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx$;

в) $\int\limits_0^{3}\left|x^2-1\right| dx$; г) $\int\limits_0^{5}\left|\{x\}-\frac{1}{2}\right| dx$.

274. Эллипс эчендә яткан нокталардан төзелгән фигураның мәйданын исәпләгез. (Эллипс дип нокталарының координаталары:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ тигезлеген канәгатьләндерүче фигура атала.)

275. a, b, c параметрларының нинди кыйммәтләрендә интеграл билгеләнә?

а) $\int\limits_a^b\frac{dx}{x-2}$; б) $\int\limits_0^3\frac{dx}{x-c}$; в) $\int\limits_a^b\frac{dx}{x+c}$.

276. Сызыклар белән чикләнгән фигураның мәйданын табыгыз:

а) $y=|x^2-1|$ һәм $y=5+|x|$; б) $y=2x-x^2$.

277. $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{2x-1}$, $x=2$, $x=a$, $y=0$ сызыклары белән чикләнгән фигураның мәйданы $\ln\frac{4}{\sqrt{5}}$ кә тигез. a ны табыгыз.

278. $y = x^2$ параболасы белән абсциссалар күчәренә параллель булган ирекле туры арасында яткан параболик сегментның мәйданы турыпочмаклык мәйданының $\frac{2}{3}$ сенә тигез булуын исбатлагыз. Бу турыпочмаклыкның түбәләре — туры белән параболаның кисешү нокталары һәм кисешү нокталарыннан абсциссалар күчәренә төшерелгән перпендикулярларның нигезләре.

279. Пружина 180 Н лы көч тәэсирендә 2 см га сузыла. Пружинаның баштагы озынлыгы 20 см га тигез. Пружинаны 25 см га кадәр сузу өчен, нинди эш башкарырга кирәк?

280. a ның нинди кыйммәтендә Ox күчәре, $y = x^3 + 3x^2 + x + a$ функциясе графигы һәм бу функциянең экстремум нокталарындагы $x = \text{const}$ вертикальләре белән чикләнгән фигураның мәйданы иң кечкенә кыйммәткә ия була?

281. Башлангыч массасы M булган су тамчысы авырлык көче тәэсирендә аска төшә һәм, секунд саен m массасын югалта барып, парга әйләнә. Тамчы төшә башлаганнан алып тулысынча парга әйләнеп беткәнгә кадәр вакыт эчендә авырлык көченең эше нинди?

282. Биеклеге H һәм нигез радиусы R булган конус формасындагы ком өеме ясау өчен, авырлык көченә каршы нинди минималь эш башкарырга кирәк? Комның тыгызлыгы ρ га тигез һәм комны конусның нигез яссылыгыннан күтәрәләр.

283. Нигезе $a = 40$ см һәм биеклеге $h = 30$ см булган бериш өчпочмаклы пластина үз нигезе тирәсендә даими почмакча тизлек $\omega = 5\pi$ с$^{-1}$ белән әйләнә. Әгәр пластинаның калынлыгы $d = 0,2$ см, ә материалының тыгызлыгы $\rho = 2,2$ г/см^3 булса, пластинаның кинетик энергиясен табыгыз. (Пластина калынлыгын исәпкә алмаска.)

284. R радиуслы бериш ярымтүгәрәкнең массалар үзәген табыгыз.

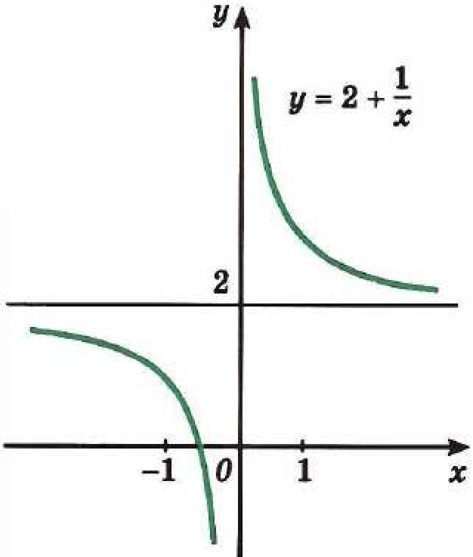
285. R радиуслы бериш ярымшарның массалар үзәген табыгыз.

286. Бериш җисемне суга батырганда, суның этеп чыгару көченә каршы башкарылган эшнен ρgVh ка тигез икәнлеген исбатлагыз, биредә ρ — суның тыгызлыгы, g — ирекле төшү тизлеге, h — суга батырылган өлешнең массалар үзәгенең батырылу тирәнлеге, V — батырылган өлешнең күләме.

Күнегүләргә җаваплар һәм күрсәтмәләр

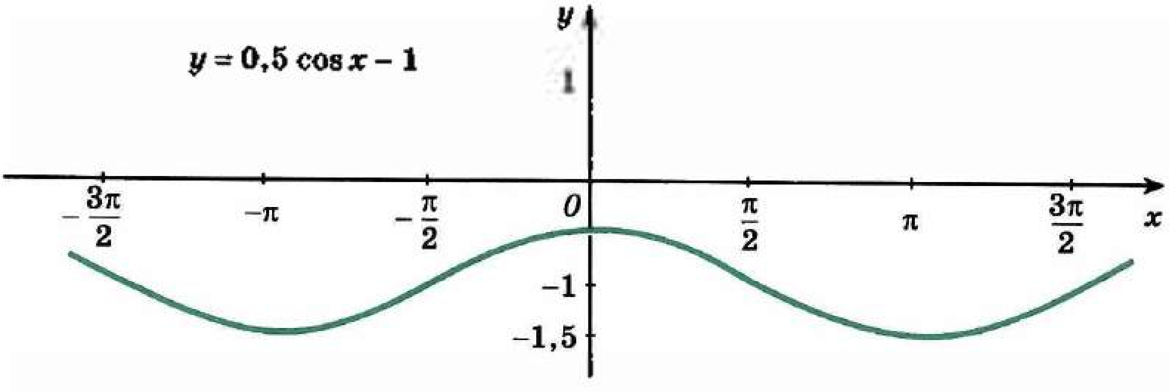
I бүлек

1. г) $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{6\pi}{5}$; $\frac{\pi}{2}$. **2.** г) 225° ; 270°; −105°. **3.** в) 4; г) 3. **4.** в) Юк; әйе; әйе. **5.** в) Юк; г) әйе. **6.** в) Юк; г) әйе. **7.** г) $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{15}{8}$. **8.** г) −1. **9.** в) 1. **10.** б) $-\frac{24}{25}$; $\frac{161}{289}$; $\frac{84}{85}$; $-\frac{77}{85}$. **11.** в) $\operatorname{tg}\alpha$. **12.** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; $-\cos\frac{\pi}{18}$; $\cos\frac{\pi}{5}$; $-\operatorname{ctg} 0{,}1\pi$. **13.** г) 1. **14.** в) Юк; г) әйе. **15.** г) $\frac{4}{\sqrt{17}}$; $-\frac{1}{\sqrt{17}}$; −4. **16.** в) 0,7833; 0,6216; 1,2602; 0,7936. **17.** б) 22°6″; 27°30′7″; 63°35′54″; 84°47′52″. **18.** в) 0,1 м; г) 9 км. **19.** в) 0,05 м². **20.** б) 1. **21.** в) 3; г) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **22.** $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$. **27.** г) −2. **30.** в) IV; IV; II. **31.** г) Плюс. **36.** в) $D(y) = R$, $E(y) = [-2; 0]$. **37.** г) $D(y) = R$, $E(y) = [-1{,}5; 1{,}5]$. **38.** г) (0; −1); $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0\right)$, $n \in Z$. **39.** в) (0; 3,5). **41.** в) $\frac{1}{x_0} + 1$; $\frac{1}{a+2} + 1$. **42.** в) Юк. **43.** в) $(-\infty; -4) \cup (-4; 2) \cup (2; \infty)$. **44.** πn саннарыннан башка санлы туры, монда $n \in Z$.



1 нче рәсем

45. в) $D(y) = E(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$. **46.** г) $D(y) = [-4; 3]$, $E(y) = [-1; 4]$. **49.** г) 1 нче рәс. **50.** в) $y = \cos x$ функциясенең графигын ординаталар күчәре буйлап сузабыз ($k = 0{,}5$), ә аннары (0; −1) векторына күчерәбез, 2 нче рәс. **52.** г) $S_1(x) = x^2$, $D(S_1) = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$; $S_2(x) = a^2 - x^2$, $D(S_2) = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. **53.** в) $[-2; 1{,}5) \cup (1{,}5; \infty)$. **54.** г) $D(y) = R$. $E(y) = [1; 1{,}5]$. **64.** г) 3π. **65.** в) π. **67.** г) $\frac{4\pi}{3}$. **68.** в), г) Юк. **69.** Так. **70.** Җөп тә түгел, так та



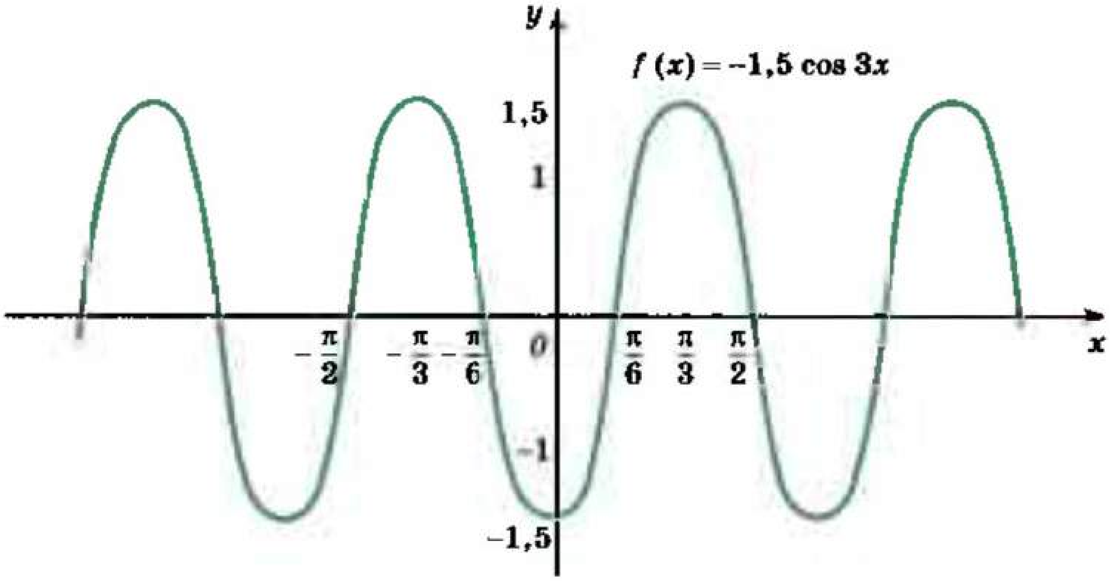
2 нче рәсем

түгел. 72. г) Җөп. 73. г) 2π. 77. г) $[-4; -2]$, $[0; 2]$, $[4; 6]$ да үсә: $[-6; -4]$, $[-2; 0]$, $[2; 4]$ да кими; $x_{max} = -2$, $x_{max} = 2$, $x_{min} = -4$, $x_{min} = 0$, $x_{min} = 4$. $y(-2) = y(2) = 3$, $y(0) = 0$, $y(-4) = y(4) = -2$. 82. г) $[3; \infty)$ да үсә, $(-\infty; 3]$ да кими; $x_{min} = 3$, $y(3) = 0$. 83. в) $(-\infty; -3)$, $(-3; \infty)$ да үсә; экстремум нокталары юк.

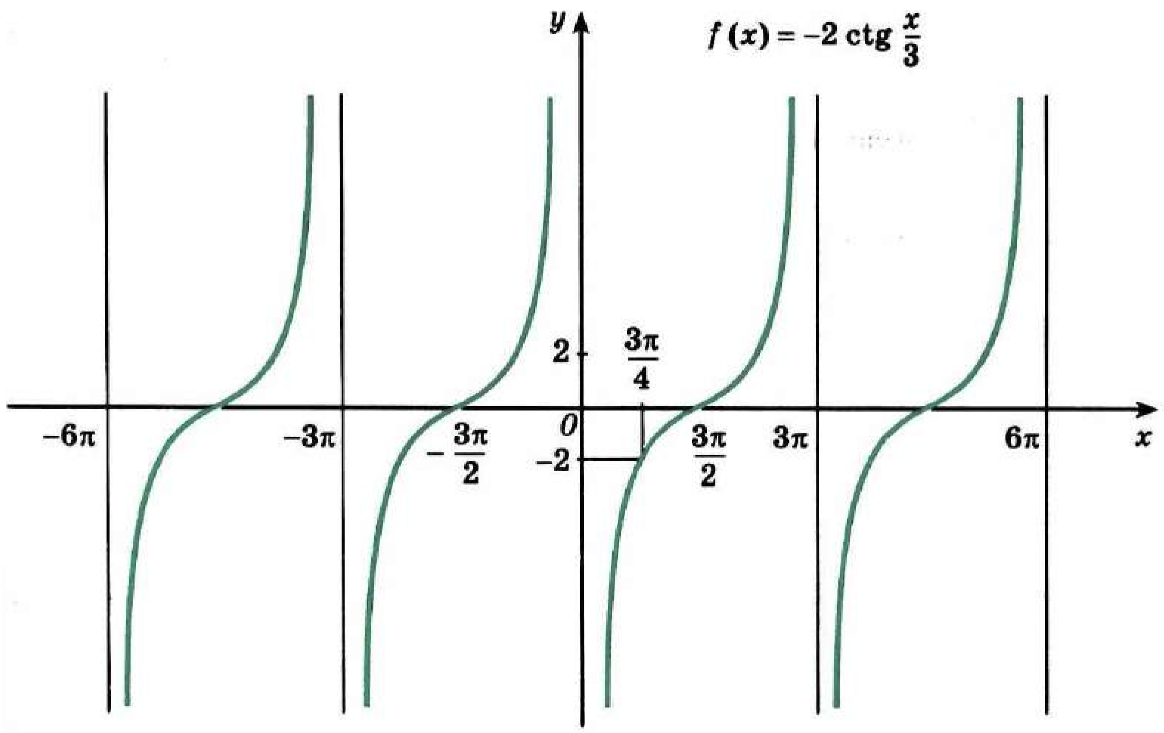
84. $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$ да үсә, $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$ да кими. $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = -1$, $x_{min} = (-\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $y(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = -2$, $n \in Z$. 85. г) $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ да үсә, $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ да кими; $x_{max} = 2\pi n$, $y(2\pi n) = 0$, $x_{min} = \pi + 2\pi n$, $y(\pi + 2\pi n) = -2$; $n \in Z$. 86. в) Беренчесе зуррак. 87. г) $\sin(-1{,}2)$, $\sin 0{,}8$, $\sin 1{,}2$. 88. г) $(-\infty; -1]$, $[0, 1]$ да кими, $[-1; 0]$, $[1; \infty)$ да үсә. $x_{max} = 0$, $y(0) = 0$, $x_{min} = \pm 1$, $y(-1) = y(1) = -1$. 89. в) $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$ да үсә, $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$ да кими, $x_{max} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $y(\frac{\pi}{3} + 2\pi n) = 1$, $x_{min} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $y(\frac{4\pi}{3} + 2\pi n) = -1$, $n \in Z$.

90. в) $\mathrm{ctg}\,\frac{9\pi}{10}$, $\mathrm{ctg}\,\frac{7\pi}{15}$, $\mathrm{ctg}\,\frac{12\pi}{5}$, $\mathrm{tg}\,\frac{6\pi}{5}$. 91. в), г) Күрсәтмә. $y = x^4$ һәм $y = x^6$ функцияләренең үзлекләреннән файдаланыгыз. 92. Күрсәтмә. $-b \leq x_1 < x_2 \leq -a$ булсын, ул вакытта $a \leq -x_2 < -x_1 \leq b$ һәм $f(-x_2) > f(-x_1)$, чөнки f $[a; b]$ да кими, димәк, $f(x_2) < f(x_1)$. 93. в) 1) $D(f) = [-6; 6]$, $E(f) = [-2; 2]$; 2) функция так; 3) $(-4; 0)$, $(0; 0)$, $(4; 0)$ — Ox күчәре белән кисешү нокталары, $(0; 0)$ — Oy күчәре белән кисешү ноктасы; 4) $(-4; 0)$, $(4; 6]$ да $f(x) > 0$, $[-6; -4)$, $(0; 4)$ да $f(x) < 0$; 5) $[-6; -2]$, $[2; 6]$ да үсә, $[-2; 2]$ да f кими. 6) $x_{min} = 2$, $f(2) = -2$, $x_{max} = -2$, $f(-2) = 2$. 96. г) 1) $D(f) = E(f) = R$; 2) $(1; 0)$, $(0; -1)$ — координата күчәрләре белән кисешү нокталары; 3) $(-\infty; 1)$ да $f(x) < 0$, $(1; \infty)$ да $f(x) > 0$; 4) f функциясе R да үсә. 97. в) 1) $D(f) = [-1; \infty)$, $E(f) = [0; \infty)$; 2) $(-1; 0)$, $(0; 1)$ — күчәрләр белән кисешү нокталары; 3) $(-1; \infty)$ да $f(x) > 0$; 4) $[-1; \infty)$ да f үсә. 98. в) 1) $D(f) = E(f) = R$; 2) функция так; 3) $(0; 0)$ — күчәрләр белән кисешү ноктасы; 4) $(-\infty; 0)$ да $f(x) < 0$, $(0; \infty)$ да $f(x) > 0$; 5) f функциясе R да үсә;

г) 1) $D(y) = [2; \infty)$, $E(f) = [-2; \infty)$; 2) $(6; 0)$ — Ox күчәре белән кисешү ноктасы; 3) $[2; 6)$ да $f(x) < 0$, $(6; \infty)$ да $f(x) > 0$; 4) f функциясе $[2; \infty)$ да үсә. 99. в) 1) $D(f) = R$, $E(f) = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$; 2) функция җөп; 3) $(0; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$ — күчәрләр белән кисешү ноктालары; 4) $(-\infty; 1)$, $(1; \infty)$ да $f(x) < 0$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$ да $f(x) > 0$; 5) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$, $[0; 0{,}5]$ да f үсә, $[-0{,}5; 0]$, $[0{,}5; \infty)$ да f кими; $x_{max} = \pm 0{,}5$, $y(-0{,}5) = y(0{,}5) = 0{,}25$, $x_{min} = 0$, $y(0) = 0$. 100. г) $-\cos\frac{\pi}{7}$, $-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{9}$. 101. в) $D(f) = \left(\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi(n+1)}{3}\right)$, $n \in Z$, $E(f) = R$. 102. г) $\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ булганда, $f(x) > 0$. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi(n+1)}{2}$ булганда, $f(x) < 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$ булганда, $f(x) = 0$. 103. $\left[-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right]$ да үсә, $\left[\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right]$ да кими, $x_{max} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $x_{min} = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. 104. в) Функциянең графигы 3 нче рәсемдә сурәтләнгән. 105. в) Функциянең графигы 4 нче рәсемдә сурәтләнгән. 108. г) $A = 0{,}5$, $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $x(t_1) = \frac{1}{4}$. 110. в) R, $2\pi n$, $n \in Z$ саннарыннан тыш. 111. в) $[0; \sqrt{2}]$; г) $(0; 2]$. 113. в) Функциянең графигы 5 нче рәсемдә сурәтләнгән. 114. в) $A = 12$, $T = 1{,}2$, $I(t) = 12\sin\frac{5\pi t}{3}$. 115. г) $2\frac{2}{3}$. 116. $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$. 120. г) $\frac{3\pi}{4}$. 121. г) $-\frac{\pi}{4}$.

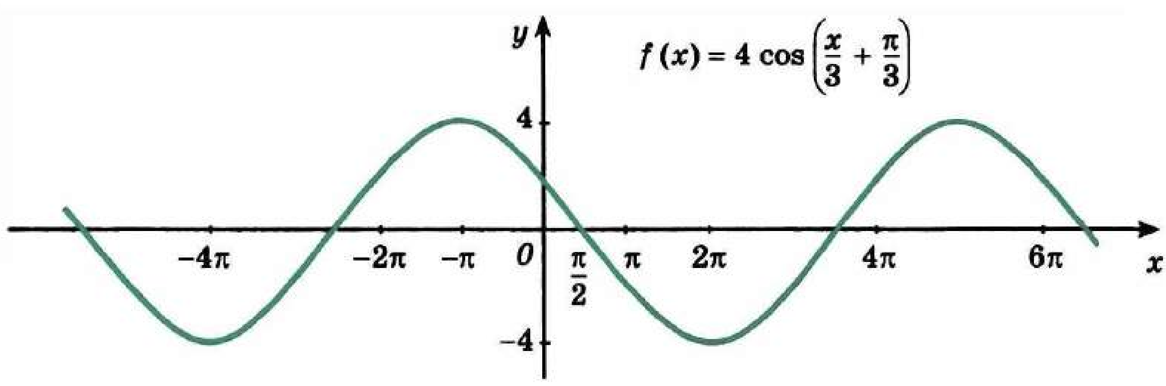


3 нче рәсем



4 нче рәсем

122. в) $\frac{5\pi}{6}$; г) 0. **124.** в) Юк; г) әйе. **125.** б) Юк. **126.** г) $-\frac{\pi}{3}$. **127.** в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{12}$. **128.** в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$. **129.** в) Беренчесе кечерәк. **130.** в) 0,8948; 0,5010. **131.** г) $-\frac{3\pi}{2}$. **132.** б) $\alpha = \arccos x_1$, $\beta = \arccos x_2$ тамгаланышларын кертәбез. $\alpha < \beta$ дип уйлыйк, α һәм β $[0; \pi]$ аралыгында ятканлыктан, косинус монда кими, $\cos\alpha > \cos\beta$, ягъни $x_1 > x_2$ не табабыз, ә бу шартка каршы килә. **133.** К ү р с ә т м ә. 132 нче б күнегүнең чишелешендә язылган алымны файдаланыгыз. **136.** в) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. **138.** г) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **139.** г) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **141.** в) $\frac{\pi}{6} + \pi n$. **142.** $(-1)^n \cdot \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in Z$. **143.** в) $\pm \arccos 0{,}3 + 2\pi n$, $n \in Z$. **145.** г) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in Z$. **146.** г) $\frac{2\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$. **147.** г) $(-1)^n \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{5} + 3\pi n$, $n \in Z$.



5 нче рәсем

148. в) $\left(\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + \pi n; 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi n; 1\right)$, $n \in Z$. **149.** г) $-\frac{3\pi}{8}$, 0, $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{3\pi}{8}$.
151. в) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$. **152.** в) $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$. **153.** г) $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$. **154.** г) $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$. **155.** в) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$. **156.** г) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **159.** в) $(4\pi n; \pi + 4\pi n)$, $n \in Z$. **160.** г) $\left(\frac{17\pi}{24} + 2\pi n; -\frac{25\pi}{24} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.
161. г) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$, $n \in Z$ **162.** г) $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{\pi} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{\pi} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$. **163.** в) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. **164.** $(-1)^n \cdot \arcsin\frac{1}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **165.** г) $2\pi n$, $\pm \arccos\frac{1}{5} + 2\pi n$, $n \in Z$. **166.** г) $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$. **167.** в) $x_1 + \pi n$, $x_2 + \pi n$, $x_1 = -\operatorname{arctg} 2 \approx -1{,}1071$, $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 0{,}4636$, $n \in Z$. **168.** г) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **169.** в) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3{,}5 + \pi n$, $n \in Z$. **171.** г) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. **172.** в) $(-1)^n \cdot \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.
173. в) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **174.** в) $\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$; $k, n \in Z$. **175.** г) $\left(\frac{\pi}{2} - \pi n; \pi n\right)$, $n \in Z$. **176.** в) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$, $k \in Z$.

II бүлек

177. б) 3) 1,2881; 4) $\pi h\,(2R + h)$. **178.** г) 0,205. **179.** г) $\Delta x = 0{,}125$, $\Delta f = 0{,}1$.
180. г) $\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$. **181.** в) 65 км/сәг. **182.** г) Тискәре юнәлештә 4 кә. $v_{ср} = -2$.
184. 1,5, кысынкы. **185.** в) $6(2x + \Delta x)\Delta x$. **186.** г) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-2x_0 - \Delta x}{\left((x_0 + \Delta x)^2 + 1\right)\left(x_0^2 + 1\right)}$.
187. в) $v_{ср} = \frac{g}{2}(2t_0 + \Delta t)$. **188.** б) Минус, плюс, минус, плюс. **191.** б) 2,5; 2,1; 2,01.
192. г) −2, −4. **193.** г) 5, −2. **194.** в) $-\frac{1}{4}$, −1. **195.** г) $y = 4x - 4$. **196.** в) 2; г) 5.
197. в) x_1, x_2 нокталарында өзлексез. x_3 ноктасында өзлексез түгел. **200.** в) 5; 4.
201. в) 6. **202.** г) 0,25. **204.** $h = 0{,}04$ дм. **206.** $h = 0{,}01$ дм. **208.** г) $3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
209. г) $-8x^4 + 9x^2 + 2$. **210.** в) $\frac{34}{(5x+8)^2}$. **211.** в) $7x^6 - 20x^4 + 2$; г) $x - 9x^4$.
212. в) 1,5; 4. **213.** в) 4; −1. **214.** г) $(-\infty; -2)$, $(2; \infty)$. **215.** в) $\frac{3x^2\left(2x^6 - 4x^3 + 5\right)}{\left(1 - x^3\right)^2}$.

216. в) -1. **217.** г) $(-\infty; 3)$, $(3; \infty)$. **218.** г) Мәсәлән, $3x^2 - \frac{1}{2}x$. **219.** а) Юк.

220. г) $f(x) = 3x + \frac{\pi}{4}$, $g(x) = \cos x$. **221.** в) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^7$.

222. в) $[-0,5; 0,5]$. **223.** г) $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$. **224.** г) $-\frac{30}{(6x-1)^6}$.

225. г) $65(5x - 2)^{12} + 24(4x + 7)^{-7}$. **226.** в) $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

227. а) $3 - 2x^2$; в) $(3 - 2x)^2$. **228.** б) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$, $[0; 1) \cup (1; \infty)$; в) $\sqrt{\cos x}$, $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$. **229.** б) $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; \infty)$; г) $f(x) = -\sqrt{x-1}$.

230. г) $-15x^2(3 - x^3)^4 + \frac{1}{\sqrt{2x-7}}$. **232.** $2 \cos x - 1,5 \sin x$. **233.** в) $\frac{1}{2\cos^2 x}$.

234. г) 0; -1. **235.** г) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **237.** б) $-\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$. **239.** г) $\pm\frac{\pi}{12} + \pi n$, $\left(-\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{\pi}{12} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **240.** в) Мәсәлән, $f(x) = -\sin x$. **241.** г) Әйе, әйе.

242. в) R; г) $(-\infty; 2)$, $(2; \infty)$. **243.** в) 0,7. Күрсәтмә. $f(0,8) < 0$, $f(0,6) > 0$ икәнен тикшерегез. **244.** г) $(-\infty; 1)$, $(2; 6)$. **245.** в) $(-\infty; -4)$, $[-2; -1)$, $[2; \infty)$. **246.** г) $(-\infty; -3] \cup (-1; 1) \cup [3; \infty)$. **247.** г) $m > 0$. **248.** г) $(-2; -1)$, $(1; 2)$. **249.** в) $(-2; 0)$, $(0; 3)$; г) $(-\infty; -5]$, $[2; \infty)$. **250.** в) $(-\infty; -4] \cup [0; 4)$. **253.** в) 3.

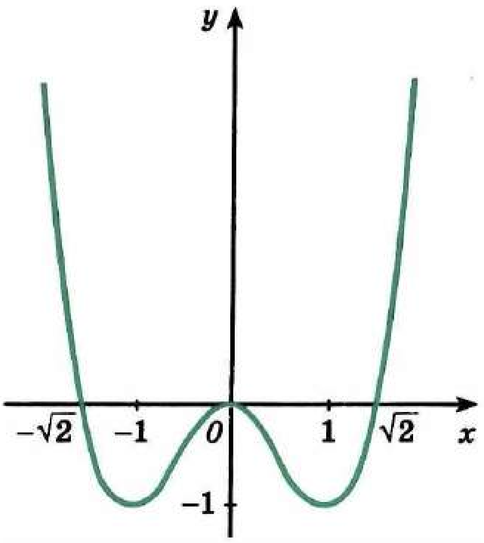
254. г) 0. **255.** г) $y = 3x + 1$, $y = 12x - 17$. **256.** в) $y = 2$, $y = 1 + \frac{\pi}{2} - x$.

257. в) $(-1; -1)$, $(0; 2)$, $(1; -1)$. **258.** г) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n - 1\right)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \sqrt{2}\left(2\pi n + 1 - \frac{\pi}{4}\right)\right)$, $n \in Z$. **259.** а) $(0; 0)$ ноктасында $\mathrm{arctg}\, 3$, $(-\sqrt{3}; 0)$ һәм $(\sqrt{3}; 0)$ нокталарында $\pi - \mathrm{arctg}\, 6$; г) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0\right)$ нокталарында $\frac{\pi}{4}$, $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0\right)$ нокталарында $\frac{3\pi}{4}$, $n \in Z$. **260.** а) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{5\pi}{6}$. **261.** в) 24,52; $-0,16$; г) 40,52, 9,86.

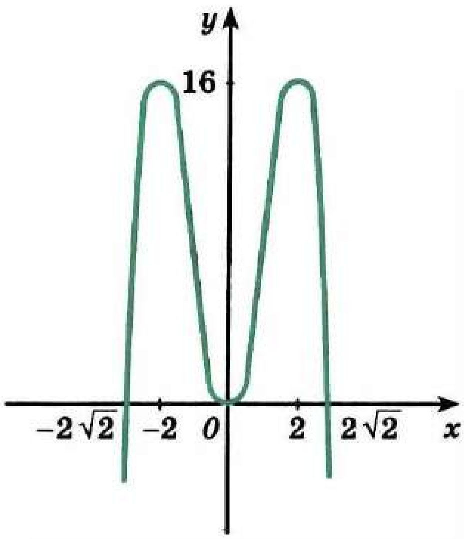
263. г) 2,0004. **264.** г) 0,9302. **265.** в) 0,526. **266.** в) 0,1247. **267.** а) $(-t^2 + 4t + 5)$ м/с; в) 5 с. **268.** 35 м/с; 22 м/с^2. **269.** $(6t - 4)$ рад/с, 20 рад/с. **270.** а) 2,8 рад/с. **271.** $12t$ см/с; а) $\frac{1}{12}$ с; б) $\frac{1}{6}$ с. **272.** а) 6 с; б) 18 м/с. **274.** $22m$. **275.** а) 0,04 Н; б) 0,0025 Дж.

276. а) 65 г/см; б) 125 г/см. **277.** $0 < t < 2\frac{2}{3}$. **278.** $t < 0$ булганда, $\frac{8t^2 - 9t + 21}{\sqrt{4t^2 - 6t + 21}}$.

280. г) $(-\infty; -3]$, $[3; \infty)$ да үсә; $[-3; 3]$ да кими. **281.** в) $(-\infty; -2]$, $[2; \infty)$ да үсә, $[-2; 2]$ да кими. **283.** г) Функциянең графигы 6 нчы рәсемдә сурәтләнгән. **284.** Функция графигы 7 нче рәсемдә сурәтләнгән. **286.** г) $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(2 - x)$, $(-\infty; 0)$ һәм $(2; \infty)$ аралыкларыннан барлык x өчен $f'(x) < 0$, шулай

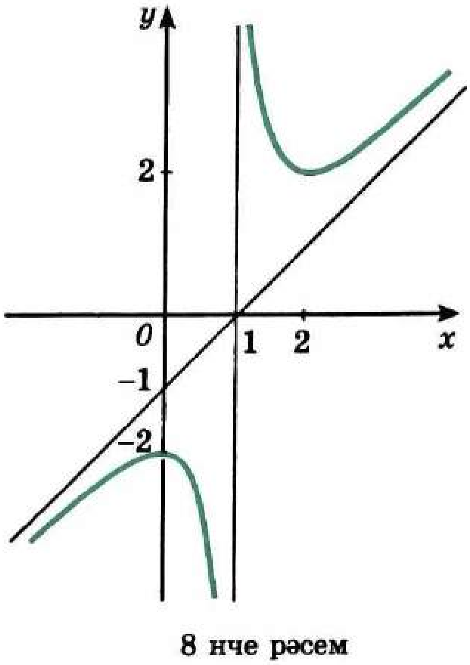


6 нчы рәсем

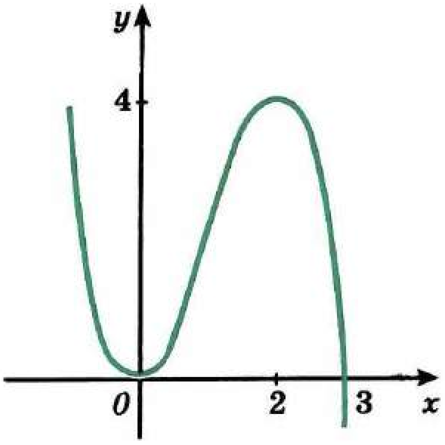


7 нче рәсем

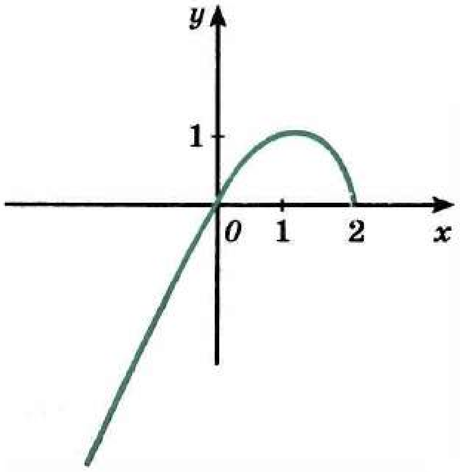
булгач. f функциясе $[-2; 0]$ һәм $[2; 3]$ да кими, $f(-2) > 0$, $f(0) < 0$, $f(2) > 0$, $f(3) < 0$, тамыр турындагы теорема буенча тигезләмәнең $[-2; 0]$, $[2; 3]$ аралыкларының һәркайсында бердәнбер чишелеше бар. **287.** б) x_2, x_4, x_5, x_6, x_7. **288.** в) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; г) ± 2. **290.** в) $x_{max} = -1$, $x_{min} = 0$; г) $x_{min} = \pm 1$, $x_{max} = 0$. **291.** в) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; берниди x өчен дә $f'(x) \neq 0$; $x = 0$ булганда, $f'(x)$ була алмый, ләкин бу нокта $[0; \infty)$ аралыгы өчен эчке нокта булмый. **292.** в) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; г) $\pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. **293.** в) ± 3; г) 0; ± 2. **295.** г) Функциянең графигы 8 нче рәсемдә сурәтләнгән. **297.** г) Функциянең графигы 9 нчы рәсемдә сурәтләнгән. **298.** г) $(-\infty; -1]$, $[5; \infty)$ да үсә, $[-1; 5]$ да кими. **300.** в) $D(f) = D(f) = R$; f — так; $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$ булганда,



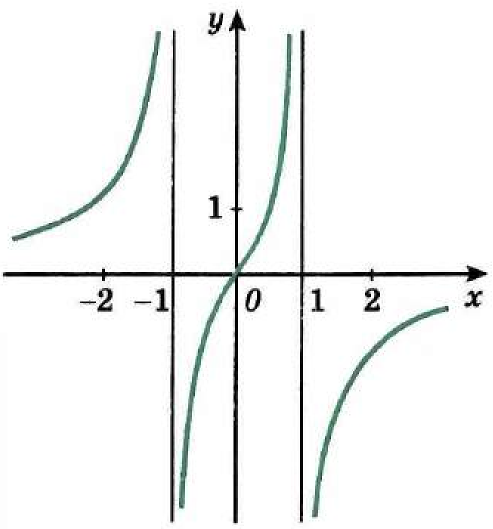
8 нче рәсем



9 нчы рәсем

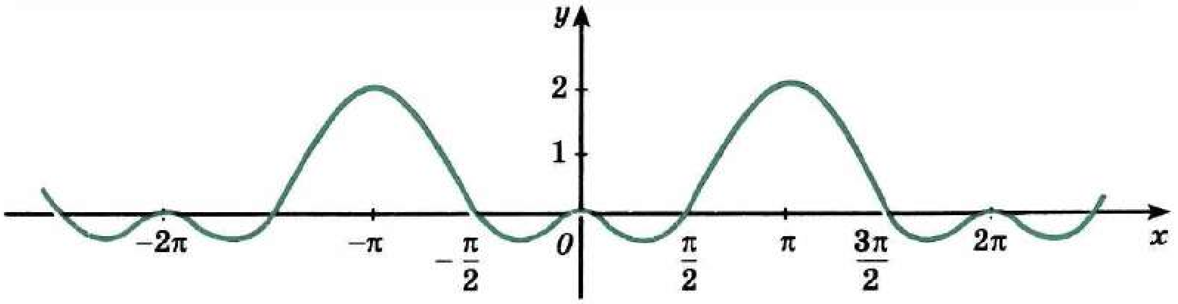


10 нчы рәсем

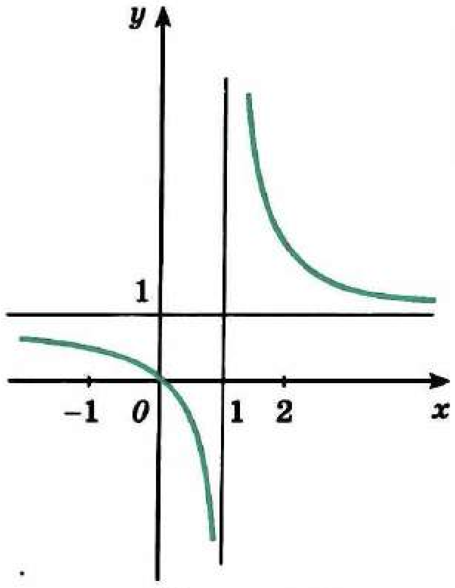


11 нче рәсем

$f(x) = 0$; әгәр $x \in \left(-\sqrt{\frac{20}{3}}; 0\right)$, $x \in \left(\sqrt{\frac{20}{3}}; \infty\right)$ икән, $f(x) > 0$ була; әгәр $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{20}{3}}\right)$, $x \in \left(0; \sqrt{\frac{20}{3}}\right)$ икән, $f(x) < 0$ була; f функциясе $(-\infty; -2]$, $[2; \infty)$ да үсә; f функциясе $[-2; 2]$ да кими: $x_{max} = -2$, $f(-2) = 4\frac{4}{15}$, $x_{min} = 2$, $f(2) = -4\frac{4}{15}$; г) $D(f) = E(f) = R$; f — так функция; $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ булса, $f(x) = 0$; $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $x \in \left(0; \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ булса, $f(x) > 0$; әгәр $x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}; 0\right)$, $x \in \left(\sqrt{\frac{5}{3}}; \infty\right)$ булса, $f(x) < 0$: f $[-1; 1]$ да үсә, $(-\infty; -1]$, $[1; \infty)$ да кими; $x_{min} = -1$, $f(-1) = -2$; $x_{max} = 1$, $f(1) = 2$. **301.** в), г) Функцияләрнең графиклары 10, 11 нче рәсемнәрдә сурәтләнгән. **302.** в), г) Функцияләрнең графиклары 12, 13 нче рәсемнәрдә сурәтләнгән. **304.** в) 2; г) 3. **305.** в) $\max f(x) = f(2) = 56$, $\min f(x) = f(1) = -2$; $\max f(x) = f(3) = 594$, $\min f(x) = f(2) = 56$; г) $\max f(x) = f(-2) = 2$,



12 нче рәсем



13 нче рәсем

$\min\limits_{[-6;-2]} f(x)\ f(-3)=1{,}5;\ \min\limits_{[1;6]} f(x)=f(1)=\frac{1}{2},$ $\max\limits_{[1;6]} f(x)=f(5)=\frac{5}{6}$. **307.** 6 с. 72 м/с. **308.** $\min\limits_{[-6;-2]} f(x)=f(-2)=9,\ \max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(2)=$ $=25$. **309.** 10 с. **310.** в) $\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=$ $=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$; г) $\max\limits_{[-4;-2,5]} f(x)=$ $=f(-3)=-4,\ \min\limits_{[-6;-2,5]} f(x)=f(-5)=-5\frac{1}{3}$. **311.** $24=12+12$. **312.** $4=2+2$. **313.** 12 м, 12 м. **314.** $54=12+24+18$. **315.** $16=4\cdot4$. **316.** 8 см, 8 см. **317.** Биеклеге — 1,5 дм, нигезенең ягы — 3 дм. Чишү. x — бак нигезенең ягы булсын ($x>0$). Аның биеклеген күләм һәм нигезенең ягы аша күрсәтәбез. $13{,}5=x^2\cdot h,\ h=\frac{13{,}5}{x^2}$. Бакның өслеген табабыз: $S=x^2+4x\cdot\frac{13{,}5}{x^2}=$ $=x^2+\frac{54}{x}$. $S(x)=x^2+\frac{54}{x}$ функциясенең $(0;\infty)$ аралыгында иң кечкенә кыйммәтен табабыз. $S'(x)=2x-\frac{54}{x^2}$, $x=3$ — критик нокта. Функция $(0;3]$ дә кими, $[3;\infty)$ дә үсә. Димәк, $\min\limits_{(0;\infty)} S(x)=S(3)=27$. **318.** 30 см, 20 см. **319.** $20\sqrt{2}$ см, $20\sqrt{2}$ см. **320.** Авылдан 3 км һәм таш юлның бораулау вышкасына иң якын ноктасыннан 12 км ераклыктагы ноктага. **321.** B дан 1 км ераклыктагы AB кисемтәсе ноктасына. **322.** −0,5. **324.** Квадрат.

III бүлек

327. г) Юк. **329.** в) Мәсәлән, $-4x$. **331.** в) Юк. **332.** в) Мәсәлән, x. **334.** г) $f(x)=$ $=3-2\sin x$. **336.** в) $x+\frac{1}{3x^3}+C$. **337.** г) $-\cos x-2$. **339.** в) $-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$. **341.** г) $x(t)=-\cos t$. **343.** г) $-\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+C$. **344.** в) $-\frac{4}{3(3x-1)}+C$. **345.** $-\frac{1}{2x^2}-2x^4+3x+4{,}5$. **346.** в) $\frac{2}{3}\operatorname{tg}(3x+1)-3\cos(4-x)+x^2+C$. **347.** г) $-\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2}x^2-4\frac{1}{2}$. **348.** $x(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2-t$. **349.** $x(t)=4\sin\frac{t}{2}+2$. **350.** $x(t)=t^4+2t^3+2t+7$. **351.** г) $x(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2+t-1\frac{2}{3}$. **352.** в) −2; икенче. **353.** в) 2; г) $\frac{1}{2}$. **354.** в) $10\frac{2}{3}$; г) $\pi+1$. **355.** в) $1\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{4}$. **356.** в) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

357. г) 1. 358. в) 0,9. 360. г) $10\frac{2}{3}$. 361. г) $5\frac{1}{3}$. 362. г) 4. 363. в) $\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}$.

364. г) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. 365. г) 4,5. 366. г) $\frac{1}{12}$. 367. $5\frac{1}{3}$. 368. 4,5. 369. а) $F(x)$ функциясе — $f(x)$ өчен башлангыч, $G(x)$ функциясе $g(x)$ өчен башлангыч функция булсын. Ул вакытта $F(x)+G(x)$ функциясе — $f(x)+g(x)$ өчен башлангыч функция. Шуңа күрә $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=(F(x)+G(x))\Big|_a^b=F(b)+G(b)-F(a)-G(a)=F(b)-F(a)+$

$+G(b)-G(a)=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$. 370. г) $\frac{16\pi}{15}$. 371. г) $\frac{\pi}{6}$. 372. а) $\frac{\pi H^2}{3}(3R-H)$;

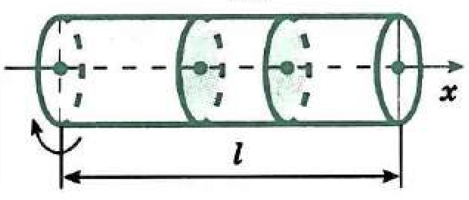
б) $\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2)$. 373. 0,16 Дж. 374. 0,16 Дж. 375. $\gamma q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$. Күрсәтмә.

$F(x)=-\frac{\gamma q}{x^2}$, монда $\gamma>0$ — ниндидер даими сан. Шуңа күрә $A=\int_a^b\left(-\frac{\gamma q}{x^2}\right)dx=$

$=\frac{\gamma q}{x}\Big|_a^b$. 376. $\frac{(a+2b)h^2}{6}\rho g$ (376 — 378 нче күнегүләрдә ρ — суның тыгызлыгы, g — иркен төшү тизләнеше). Күрсәтмә. Сыеклыкка батырылган (вертикаль) пластинкага ул сыеклыкның басым көче $P=\rho g\int_{h_1}^{h_2} S(x)dx$ формуласы буенча исәпләнә, монда $S(x)$ — пластинканың мәйданы, батыру тирәнлеге (h) h_1 дән h_2 гә кадәр үзгәрә. 377. $\frac{\pi r^2h^2\rho g}{2}$. 378. $\frac{4}{3}\pi R^4\rho g$. 379. $\frac{\rho S\omega^2l^3}{6}=4\ 160\ 000\ \pi^2$ эрг.

Чишү. Стерженьның 14 нче рәсемдә билгеләнгән өлешенең массасы $\rho S\Delta x$ ка тигез; стерженьның диаметрын исәпкә алмыйбыз (билгеләнгән өлешнең озынлыгын Δx озынлыгындагы кисемтә дип исәплибез), ул чагында бу өлешнең һәр ноктасының сызыкча тизлеге Δx тәртибендәге төгәллек белән ωx ка тигез була. Стерженьның $[0;\ x]$ өлешенең кинетик энергиясен $E(x)$ аша билгелибез. Кинетик энергиянең $[x;\ x+\Delta x]$ кисемтәсе исәбенә үсемтәсе якынча $\frac{mv^2}{2}$ гә, ягъни $\frac{\rho S\omega^2x^2\Delta x}{2}$ гә тигез, шуңа күрә $E'(x)=\frac{\rho S\omega^2x^2}{2}$, $E(0)=0$ һәм, димәк, эзләнелә торган энергия $E(l)=\int_0^l E'(x)\,dx=$ $=\int_0^l \frac{\rho S\omega^2x^2dx}{2}=\rho S\omega^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{\rho S\omega^2l^3}{6}$.

380. Түбәсеннән исәпләгәндә конус биеклегенең $\frac{3}{4}$ ераклыгында ятучы нокта.



14 нче рәсем

384. в) $-\frac{3}{2}$. 386. в) ± 2. 387. $\pm\sqrt{17}$. 388. г) -1. 391. в) 6. 392. -5. 393. г) 2.

394. в) $\frac{5}{4}$. 395. г) 1.44. 396. г) 2.22. 397. в) 1.29. 399. в), г) Беренчесе кечкенәрәк.

400. в), г) Беренчесе зуррак. 401. в) Беренчесе зуррак. 402. в) $a^3b\sqrt[3]{6b^2}$.

403. г) $\sqrt[4]{4a^3b^3}$. 404. в) $a > 0$; г) $a > 0$. 405. $a = 0$; б) $a \leqslant 0$; г) барлык a өчен.

406. г) $\frac{7+2\sqrt{6}}{5}$. 407. г) $\frac{\sqrt[3]{b^4}}{3}$. 408. г) $5\sqrt[5]{4}$. 409. г) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{320}$. 410. г) 6^6.

411. г) $(-\infty; \sqrt[3]{5}]$. 412. г) $[0; 81]$. 414. в) 0. 415. г) 2. 416. в) $\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{49}}{6}$.

417. в) ± 6. 418. г) 8. 419. г) 0, -1. 420. в) -10; 2. 421. в) $(16; 81)$. 422 г) 0; 0,4.

424. г) -12. 425. г) ± 2. 426. в) $(16; 4)$, $\left(36; 1\frac{7}{9}\right)$. 427. г) $(27; 1)$, $(-1; -27)$.

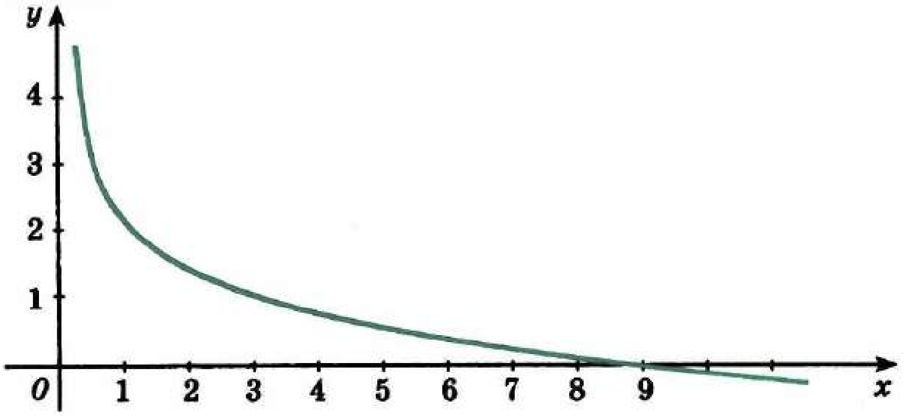
428. г) $\sqrt{6^{-3}}$. 429. в) $b^{-\frac{1}{12}}$. 430. в) 32. 431. в) $\frac{128}{27}$. 432. г) $x^{\frac{1}{2}}\left(3^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)$.

433. г) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)$. 434. г) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$. 435. г) $x-1$. 436. Беренчесе кечкенәрәк. 437. г) 10. 438. г) $-\frac{1}{\sqrt{2m}}$. 440. г) $\sqrt[12]{b^4c^6}$. 441. в) Тигезләр. 442. г) Юк. 443. в) $(0; \infty)$. 444. в) $a = \pm 1$; г) $a = 0$. 446. г) $(-2; \infty)$. 447. г) Беренчесе кимрәк. 448. г) 9. 450. г) $\left|x^{\pi}-y^{\pi}\right|$. 451. в) 169,8; 173,8. 452. $10^{\sqrt{5}} \approx 172{,}4$.

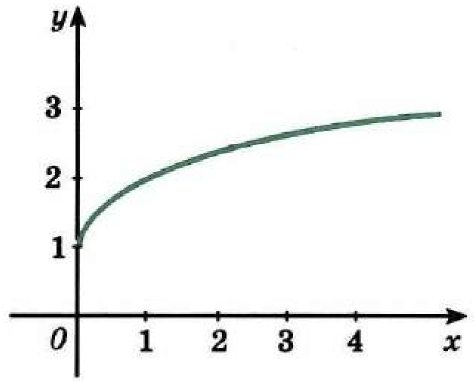
453. г) $y = (3-\sqrt{7})^x$ — кими, $y = \left(\frac{1}{3-\sqrt{7}}\right)^x$ — үсә. 454. г) $[1; \infty)$. 455. г) -1; $-1\frac{2}{3}$. 457. в) 0; г) 1. Күрсәтмә. Графикларның эскизлары ярдәмендә кисешү ноктасының абсциссасы $x = 1$ не табабыз, башка кисешү нокталарының булмавын исбатлыйсы кала. Моның өчен күрсәткечле һәм сызыкча функцияләрнең тиңдәшле үзлекләреннән файдаланабыз. $x > 1$ булганда, $y = 4^x$ функциясе — 4 тән зуррак кыйммәтләр, ә $y = 5 - x$ функциясе 4 тән кечерәк кыйммәтләр ала. ($x < 1$ булганда, функцияләр тиңдәшле рәвештә 4 тән кечерәк һәм зуррак кыйммәтләр алалар.) Димәк, графикларның башка кисешү нокталары юк. 458. г) -1. 461. в) 4; г) $\frac{1}{4}$.

462. в) 4; г) -3; 1. 463. в) 3; г) -1. 464. в) 1; г) 1; 0. 465. в) $(-2; -3)$; г) $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$. 466. в) $[2; \infty)$; г) $(-\infty; 2)$. 467. в) $(-\infty; 0{,}5)$; г) $(-1; \infty)$. 468. в) -2; г) 2. 469. в) -1; г) 2. 470. в) 2; г) 2. 471. в) $(1; 2)$, $(2; 1)$; г) $(2; 1{,}5)$. 472. в) $[-3; -1]$; г) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$, $(4; \infty)$. 473. в) $(-2; \infty)$; г) $(-\infty; 1)$. 474. в) $(2; \infty)$; г) $[-1; \infty)$. 475. в) $(-\infty; 0]$;

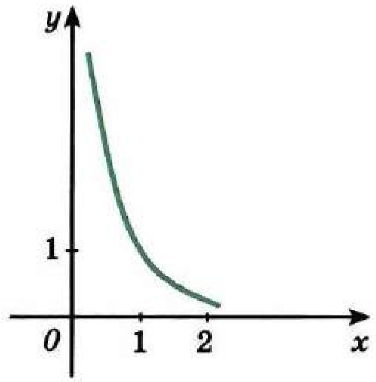
г) [1; ∞). **484.** г) $\frac{1}{49}$. **485.** г) 8. **486.** г) 3. **487.** г) $\log_5 5$, $\log_5 \frac{1}{25}$, $\log_5 1$, $\log_5 125$. **489.** г) $\frac{1}{2}$. **490.** г) $\frac{1}{25}$. **491.** г) $2\log_3 b - 3 - 7\log_3 a$. **493.** г) $\frac{7}{4}\lg c - 7 - \frac{2}{3}\lg a - 8\lg b$. **494.** г) $1 + a + b$. **496.** в) -2. **497.** в) $\frac{m^5 n^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{4}}}$. **498.** в) Чишү. Тигезлекнең уң һәм сул кисәкләрендәге аңлатмалар арасында булган аерманы карыйбыз, аны нуль белән чагыштырабыз: $\log_3 7 + \frac{1}{\log_7 3} - 2 = \frac{\log_3^2 7 - 2\log_3 7 + 1}{\log_7 3} = \frac{(1-\log_3 7)^2}{\log_7 3} > 0$; г) Чишү. Тигезлекнең сул кисәген үзгәртәбез: $3^{\log_2 5} = (5^{\log_5 3})^{\log_2 5} = 5^{\log_5 3 \cdot \log_2 5} = 5^{\frac{\log_2 3}{\log_2 5}\cdot\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$. **499.** г) $(-\infty; -4) \cup (4; \infty)$. **500.** в) $\left(-\frac{2}{5}; 2\frac{1}{3}\right)$. **502.** в), г) Беренчесе кимрәк. **503.** в), г) Беренчесе зуррак. **505.** в) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$. **506.** в), г) 0. **507.** г) Функциянең графигы 15 нче рәсемдә сурәтләнгән. **508.** г) π^2. **509.** в) 5. **510.** г) Юк. **511.** в) 0; -1. **512.** в) $\log_2 10$. **513.** г) 100. **514.** в) $-2{,}35$. **515.** в) $\frac{2}{3} - \log_3 2$. **516.** в) (0,7; ∞). **517.** в) (8; ∞); г) (12; ∞). **518.** в) 5; г) 0. **519.** в) 2; г) 0; 8. **520.** в) 25, $\frac{1}{5}$; г) 27, $\frac{1}{3}$. **521.** в) (32; 2), (2; 32); г) (1; 1). **522.** в) 4; г) 100, 10^5. **523.** в) 9; г) $\frac{1}{2}$. **524.** в) 2; г) 2. **526.** в) (1; 3); г) $(-4; -3) \cup (4; 5)$. **527.** в) $(0; 0{,}001) \cup (10; \infty)$; г) $\left[\frac{1}{27}; 27\right]$. **528.** в) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$; г) $(\sqrt{0,1}; 10)$. **529.** в) $\left(\frac{1}{27}; 3\right)$, г) (9; 7). **530.** в) (2; 6); г) (9; 6). **531.** в) $g(x) = \frac{1-x}{3}$.



15 нче рәсем

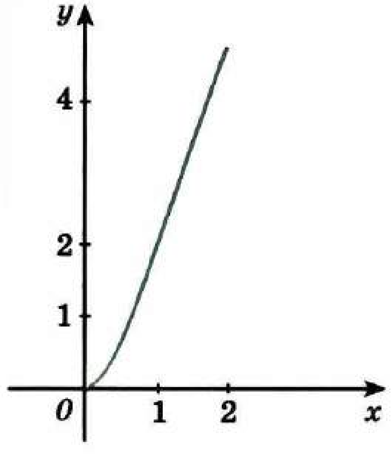


16 нчы рәсем



17 нче рәсем

$D(g) = E(g) = R$. **532.** г) $g(x) = x^2 - 1$, $D(g) = [0; \infty)$, $E(g) = [-1; \infty)$. **533.** г) График 16 нчы рәсемдә сурәтләнгән. **535.** в) $g(x) = x^4$, $x < 0$; г) $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$. **538.** в) $-\frac{1}{2}e^x$. **539.** $2xe^x + x^2e^x$. **540.** в) $y = 1 + x$; г) $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1)\ln 2$. **541.** г) $\frac{1}{2}e^x + x + C$. **542.** в) $\frac{7}{4\ln 2} \approx 2{,}5247$. **543.** г) $-2^{-x}\left(\ln 2 \operatorname{ctg}\frac{x}{3} + \frac{1}{3\sin^2\frac{x}{3}}\right)$. **544.** в) $\frac{3^x\left(2^x\ln 1{,}5 + 5^x \ln 0{,}6\right)}{\left(2^x + 5^x\right)^2}$. **545.** $(-\infty; 1]$ аралыгында үсә, $[1; \infty)$ аралыгында кими; $x_{max} = 1$, $f(1) = \frac{1}{e}$. **546.** г) $\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2{,}3^{x+1}}{\ln 2{,}3} + C$. **547.** г) $\frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}$. **548.** в) $\frac{3}{\ln 2} - 2 \approx 2{,}3$. **549.** в) $\frac{5}{1+5x}$. **550.** г) $\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. **551.** в) $\ln|x+2| + C$. **552.** г) $y = \frac{x-2}{\ln 2}$. **553.** г) $\frac{1}{3}\ln 10 \approx 0{,}7675$. **554.** в) $\frac{x(2\ln 5x - 1)}{\ln^2 5x}$. **555.** $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ да кими, $\left[0; \frac{1}{2}\right)$ да үсә; $x_{min} = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \ln 2$. **556.** в) $(0; e^2]$ да үсә, $[e^2; \infty)$ да кими, $x_{max} = e^2$, $f(e^2) = \frac{2}{e}$. **557.** в) $\frac{1}{2}\ln 8 \approx 1{,}0397$. **558.** г) $-\sqrt{5}x^{-\sqrt{5}-1}$. Графигы 17 нче рәсемдә сурәтләнгән. **559.** г) $2\ln 3 \cdot (2x)^{\ln 3 - 1}$, графигы 18 нче рәсемдә сурәтләнгән. **560.** г) 2,63. **561.** г) 2,0125. **562.** г) 27, $\frac{1}{8}$. **563.** г) $\frac{x^{e+1}}{e+1} + C$. **564.** г) 844. **565.** г) $\ln 1\frac{2}{3} \approx 0{,}5108$. **567.** в) Юк; г) $x_0 = 0$. **572.** г) Мәсәлән, $y = 2\cos\frac{x}{2}$. **573.** в) $x'' = -9x$. **575.** в) $\frac{t\ln 2}{\ln m - \ln n}$.



18 нче рәсем

576. 9 мин. 577. $\frac{1}{\lg 2}$ сәг $\approx$ 3,322 сәг; 0,6394. 578. $\frac{10\lg 2}{\lg 1,6}$ мин $\approx$ 14,75 мин. 580. $500e^{-5}$ м/мин $\approx$ 3,37 м/мин.

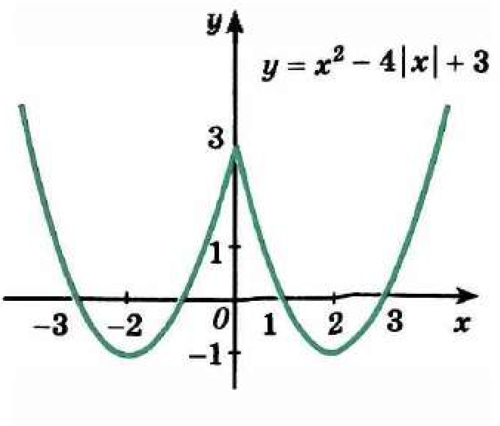
V бүлек

1. а) Әйе; б), в) юк; г) әйе. 3. а) 52 305; 52 335; 52 365; 52 395; 52 320; 52 350; 52 380; б) 52 344. 5. 35. 6. Күрсәтмә. $\frac{ab}{a+b}$ вакланмасы d санына кыскарсын, ди, d — ab ның бүлүчесе, шуңа күрә яисә a, d саннарының, яисә b, d саннарының уртак d' бүлүчесе бар; аныклык өчен d' саны a һәм d ның бүлүчесе булсын, ул вакытта $a+b$ d' ка бүленә, шулай булгач, b саны d' ка бүленә, димәк, $\frac{a}{b}$ вакланмасы d' ка бүленә. 13. в) $1\frac{8}{90}$. 14. а) $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, $p \in Z$, $q \in N$, $\frac{p}{q}$ — кыскартылмас вакланма, $\frac{p}{q} > 0$ булсын, шуңа күрә p һәм q ны натураль саннар дип исәпләргә була. Ул вакытта $5 = \frac{p^2}{q^2}$, ягъни $p^2 = 5q^2$, моннан p^2 ның, димәк, p ның да 5 кә бүленүе килеп чыга, ягъни $p = 5k$. $p = 5k$ ны $p^2 = 5q^2$ тигезлегенә куеп, $25k^2 = 5q^2$, $q^2 = 5k^2$ ны табабыз. Соңгы тигезлектән q ның 5 кә бүленүе күренә. Алда ясалган фараз белән каршылыкка очрадык: $\frac{p}{q}$ кыскартыла торган вакланма булып чыкты; в) әгәр $\sqrt{5} + 1 = r$ (монда r рациональ) икән, ул вакытта $\sqrt{5} = r - 1$ рациональ була, ә бу $\sqrt{5}$ нең иррациональлегенә каршы килә. 19. а) Тигезләр; в) беренчесе кечерәк; г) беренчесе зуррак. 31. 87 яки 69. 32. 0. 34. $b_1 = 0,2$; $q = 5$. 36. 5. 37. 12,5; 7,5; 4,5; 1,5 яки 2; 4; 8; 12. 38. $q = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$; $S = 3$. 39. $b_1 = 6$; $q = 0,5$. 43. г) $\frac{x-3}{y}$. 44. г) 2. 45. г) 3. 47. в) 1; г) 1. 48. в) $x\sqrt{x} - \sqrt{x}$. 49. г) $-\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}$.

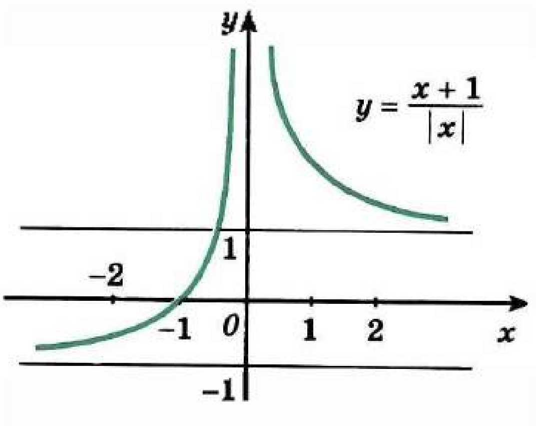
50. б) $ab^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)$; г) $-\frac{c^{2,5}}{c^2+2}$. 51. в) $c^{\frac{5}{2}}$; г) 3. 52. б) $|\sin\beta + \cos\beta|$; г) $\sin\beta$.

53. в) 1. 58. б) $\frac{1-m}{1+m}$; г) $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos 2\alpha = -\frac{7}{9}$; 59. а) 0. 60. а) 0 дән кечерәк. 61. 1. 62. г) Беренчесе зуррак. 63. в) Беренчесе зуррак. 64. а) $4\frac{3}{4}$. 65. б) 0,34. 66. в) –3; г) 1. 67. б) $4 + 4\log_{0,2} b - \frac{9}{7}\log_{0,2} c$. 68. б) 14. 69. г) 365,06446. 70. $\lg 2 \approx 0,3010$. 71. $2 - A$. 73. б) $S = 3\sqrt[3]{\frac{16V^2}{3}}$.

77. в) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}; -2) \cup (2; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty)$. 80. в) $\left(-\infty; \frac{8}{3}\right)$ һәм $(5; \infty)$ да $f(x) > 0$, $\left(\frac{8}{3}; 5\right)$ да $f(x) < 0$. 81. г) $(-\infty; 1)$ һәм $(1; \infty)$ да кими. 85. г) 19 нчы



19 нчы рәсем

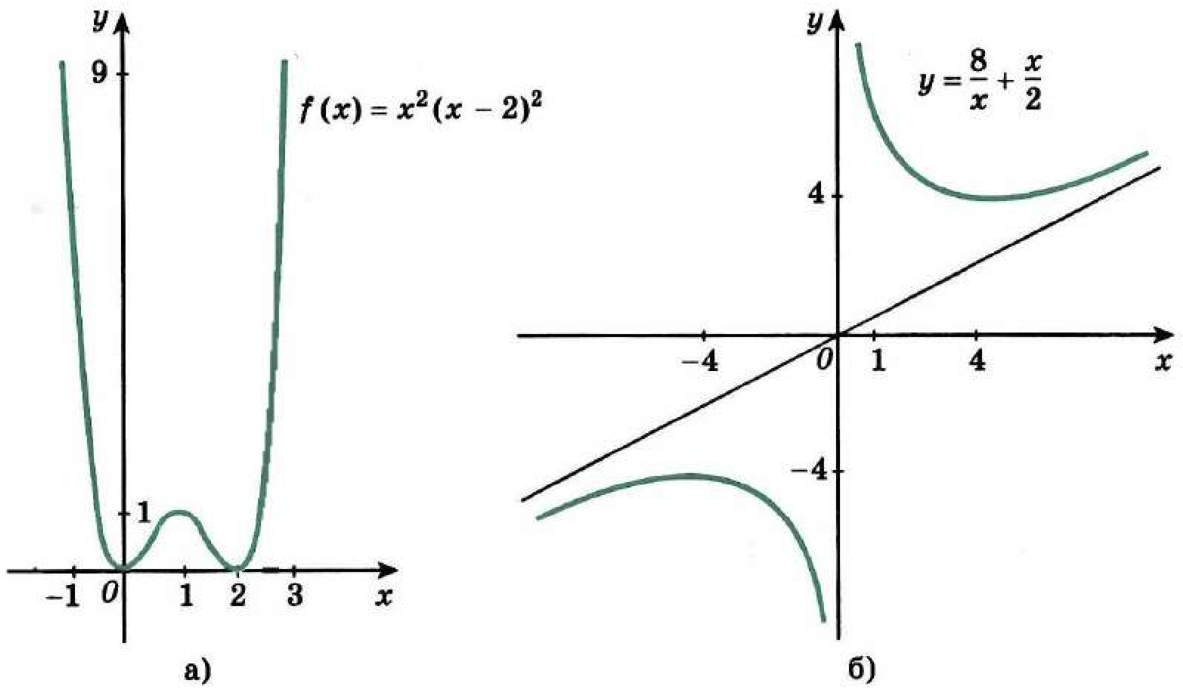


20 нче рәсем

рәсемне кара. 86. а) 20 нче рәсемне кара. 87. в), г) Әйе. 88. в) $f(x) = x^4 + 3x - 5$ булсын. $f(x)$ өзлексез, бу вакытта $f(1) = -1 < 0$. $f(2) = 33 > 0$. 91. $a = 3$, $b = -5$. 92. в) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D < 0$; г) $a < 0$, $b < 0$, $c = 0$, $D > 0$; д) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$, $D < 0$. 93. а) Була алалар ($y = ax^2 + b$ рәвешендәге квадратик һәм $y = b$ рәвешендәге сызыкча). 94. в) $y = \frac{x^2}{x^4-1} + \frac{x^3-x}{x^4-1}$. 96. в) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ рәвешендәге саннардан тыш, барлык саннар, $n \in Z$. 97. в) $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in Z$. 98. г) $[-1; 1]$. 99. г) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. 100. в) $\left(-\frac{5\pi}{2} + 4\pi n; \frac{\pi}{2} + 4\pi n\right)$ да $y > 0$, $\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi n; \frac{3\pi}{2} + 4\pi n\right)$ да $y < 0$, $n \in Z$. 101. в) Так; г) җөп. 102. г) к. 103. в) $\left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right]$ да кими, $\left[-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$ да үсә, $x_{min} = \frac{2\pi}{3} + \pi n$, $x_{max} = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. 104. г) $\min\limits_{D(y)} y = 1$, $\max\limits_{D(y)} y$ юк. 105. б) Күрсәтмә. $y = |\sin x|$. 108. Әйе. 109. в) $\operatorname{tg} 2 < -1 < \operatorname{ctg} 2$. 111. в) 0; г) 0. 112. в) $(-\infty; 0) \cup [1; 4]$. 113. в) $(-\infty; \infty)$; г) $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$. 114. в) $\left(\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$. 115. г) $(0; \infty)$. 116. в) $[1; \infty)$. 117. в) $(-\infty; \log_3 2)$ да $y > 0$, $(\log_3 2; \infty)$ да $y < 0$. 118. в) $[0; \infty)$ да $y > 0$. 119. Җөп тә түгел, так та түгел. 120. в) Җөп. 123. а) Күрсәтмә. $x > 1$ булганда, $y = x - 1$, $D(y) = (1; \infty)$. 124. г) $\min\limits_{[-1;6]} y = y(1) = 0$, $\min\limits_{[-3;6]} y = y(-1) = 4$. 125. г) ± 3. 126. г) $(0; 3)$. 128. а) 0; $\frac{\sqrt{65}-1}{8}$. 133. г) $\left[\frac{14}{11}; \infty\right)$. 134. в) $[1; 13]$; г) $[-1; -5]$. 135. г) $-3{,}5$ һәм $[3; \infty)$. 137. г) -6; г) 2; $\frac{34}{99}$. 138. а) 1; 2; $7\frac{1}{3}$; в) $\frac{5}{2}$; 4; г) 0; -1; 3. 139. а) $\frac{5}{3}$; в) $\frac{37}{9}$; г) $\frac{215}{27}$. 140. в) $-\frac{4}{3}$; г) -4; $\frac{4}{3}$. 141. в) -1; г) 1. 142. в) $(-\infty; \infty)$; г) $(1; 13)$.

143. г) $(-\infty; -4)\cup(6; \infty)$. 144. в) $(1; 3)\cup(3; 5)$; г) $(3; 4)$. 146. в) 2; г) -4; 4. 147. в) 2; г) 63. 148. в) 4; г) $-\frac{1}{3}$; 0. 149. в) -8; 8; г) -1; -3. 150. в) $(-\infty; -\sqrt{17}]\cup$ $\cup[\sqrt{17}; \infty)$; г) $(9; \infty)$. 151. в) $[2; 3]$; г) $[-3; 5]$. 152. а) $-\pi + 2\pi n$; $\pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n$, $n\in Z$; б) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5} + \pi n$ (яки arctg 0,5 + πn, $n \in Z$ — җавапның башка формасы); г) arctg 0,5 + πn, $n\in Z$. 153. в) $\pm\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n\in Z$; г) $(-1)^n\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n$, $n \in Z$. 154. в) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; г) $2\pi n$, $2\cdot(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n\in Z$. 155. в) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; г) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 156. в) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n\in Z$; г) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n\in Z$. 157. в) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n\in Z$; г) πn; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n\in Z$. 158. а) $-\frac{5}{4}$; б) 0; в) $-2\sqrt{3}-2$; г) $\varnothing$. 159. в) $\left(\frac{4\pi}{15} + \frac{4\pi n}{5}; \frac{8\pi}{15} + \frac{4\pi n}{5}\right)$, $n\in Z$; г) $\left[-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right]$, $n\in Z$. 160. в) $\left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right]$, $n\in Z$; г) $\left(-\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$, $n\in Z$. 161. а) $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n\in Z$; в) $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi n\right]$, $n\in Z$; г) $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n\in Z$. 162. а) $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$, $n\in Z$; в) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right)$, $n\in Z$; г) $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n\in Z$. 163. в) 1; 5; г) 3; 9. 164. в) 2; г) 1. 165. в) 3; г) 0; $\frac{1}{4}$. 166. в) $\pm\log_{\frac{5}{2}} 2$; г) 0; $\frac{1}{2}$. 167. б) $\pm\arccos\left(\sqrt{2}-1\right) + 2\pi n$, $n\in Z$; г) -1. 168. в) $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$; г) $(-\infty; -4)\cup$ $\cup(3; \infty)$. 169. в) $(1; 3)$; г) $(-\infty; -1]\cup[0; \infty)$. 170. б) $(-5; 3)\cup(4; \infty)$. 171. в) 6; г) 1001; $1 + \sqrt[3]{10}$. 172. в) 10; г) 3. 173. г) 64. 174. в) 100; $\frac{1}{100}$; г) 3; 9. 175. а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n\in Z$; б) $\arcsin\frac{1}{14} + 2\pi n$, $n\in Z$. 176. а) $\left(-3; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 4\right)$; г) $\left(\sqrt{7} - \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$. 177. а) $(0; 6)$; г) $(1; 2]\cup[3; 4)$. 178. в) $(2; \infty)$; г) $\left(\frac{5}{3}; \infty\right)$. 179. в) $(0; 0{,}1]\cup[100; \infty)$; г) $(-\infty; 0]\cup[\log_6 5; 1)$. 180. в) $\left(\frac{31}{7}; \frac{9}{7}\right)$; г) $\varnothing$. 181. в) $(0{,}4; 0{,}8)$; г) $(2; 3)$; $(3; 2)$. 182. в) $(0{,}5; 4)$; г) $(7; 3)$; $(-7; -3)$. 183. в) $(1;2)$; $(2; 1)$; г) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. 185. в) $\left[-3; \frac{4}{3}\right)$; г) $(-3{,}5; 0)$. 186. в) $(25; 49)$; г) $(9; 16)$; $(16; 9)$. 187. в) $(16; 4)$; г) $(16; 4)$; $(-4; -16)$. 188. в) $(81; 16)$; г) $(-1; -8)$; $(-8; -1)$. 189. а) $\left(\frac{\pi}{4} - (-1)^k\frac{\pi}{12} + \pi n - \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{12} + \pi n + \frac{\pi k}{2}\right)$, k, $n\in Z$;

б) $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}; \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6}\right), n \in Z$. в) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi n - \pi k\right), \left(-\frac{\pi}{3} + \pi n + \pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi n - \pi k\right)$, $k, n \in Z$; г) $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2} + 2\pi n\right), k, n \in Z$. **190.** б) $\left(\pi n; \frac{5\pi}{6} - \pi n\right); \left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + (-1)^n \frac{\pi}{6} - \pi n\right)$, $n \in Z$; в) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi n - \pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi n - \pi k\right)$, $k \in Z$, $n \in Z$; г) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; -\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} - 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} - 2\pi n\right)$, $n \in Z$. **191.** а) (2; 1); б) (5; 4); в) (5; 1); г) (3; 0). **192.** а) (1; 3); б) (3; 2); в) (2; 0); г) (2; 6). **193.** а) (2; 1); ($\log_4 7$; $\log_4 9$); б) (4;1). **194.** а) (100; 10); (0,1; 0,01); (4; 4); в) (1000 000; 0,1); г) $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. **195.** а) (27; 4); $\left(\frac{1}{81}; -3\right)$; б) (2; –1); в) (125; 4); (625; 3); г) (3; 2). **196.** а) (4; 2); б) (25; 36); в) (1; 1); (4; 2); г) (512; 1). **197.** 75 км/сәг. **198.** 4 км/сәг. **199.** 55 км/сәг. **200.** 18 км/сәг, 24 км/сәг. **201.** 10 с. **202.** 240 м². **203.** 6 һәм 12 көн. **204.** 20. **205.** 25%. **206.** 160 г, 20%. **207.** 60 км/сәг. **208.** 21 м/с, 147 м. **209.** 6 км/сәг, 4 км/сәг. **210.** 20; 30. **211.** 20 һәм 30 көн. **212.** 12 г, 48 г, 1,5 г/см³. **213.** 3 кг, 80%. **214.** 4 м/с, 3 м/с. **215.** 32. **216.** 8 һәм 3; 28 һәм 27. **218.** в) 3; г) 3. **219.** г) $\frac{(x^3-2)\sin x + 3x^2\cos x}{(2-x^3)^2}$. **220.** г) $\frac{\cos x - 2}{(1-2\cos x)^2}$. **221.** г) $\frac{e^x + e^{-x} - x(e^x - e^{-x})\ln x}{x(e^x + e^{-x})^2}$. **222.** г) $\frac{1}{x\ln 10} - \frac{6}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$. **223.** г) $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **225.** в) $f'(x_2) = f'(x_4)$; г) $f'(x_1) < 0 < f'(x_3)$. **228.** б) 25,375; 9,84. **229.** в) 1,005; г) $2 + \frac{1}{1500} \approx 2{,}00067$. **230.** в) $[1; \infty)$ да үсә, $(-\infty, 1]$ да кими. $x_{min} = 1$; г) $(-\infty; 4)$ да һәм $(4; \infty)$ да үсә. **231.** в) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$ да үсә. $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$ да кими, $x_{max} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x_{max} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $x_{min} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; г) $(-\infty; \infty)$ да үсә. **232.** а), б) 21 нче рәсемне кара. **234.** а), б) 22 нче рәсемне кара. **235.** в) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2}; 4\right]} f = f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{4}$; $\min\limits_{\left[\frac{1}{2}; 4\right]} f = f(1) = 3$; г) $\max\limits_{[-\pi; \pi]} f = f(-\pi) = \pi$; $\min\limits_{[-\pi; \pi]} f = f(\pi) = -\pi$. **236.** а) 10 + 0; б) 5 + 5. **237.** 10 см, 10 см. **238.** 72 см². **239.** $\frac{23}{410}$ сәг. **240.** 2,4 м. **241.** $4\sqrt{2}$ м. **242.** $h = 2r$. **243.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **245.** $R = 1{,}5$ сәг. **246.** $4R$. **247.** $H = R\sqrt{3}$. **248.** $b = \frac{40}{\sqrt{3}}$ см, $h = 40\sqrt{\frac{2}{3}}$ см. **249.** $R = \frac{P}{\pi + 4}$; $H = \frac{P}{\pi + 4}$.

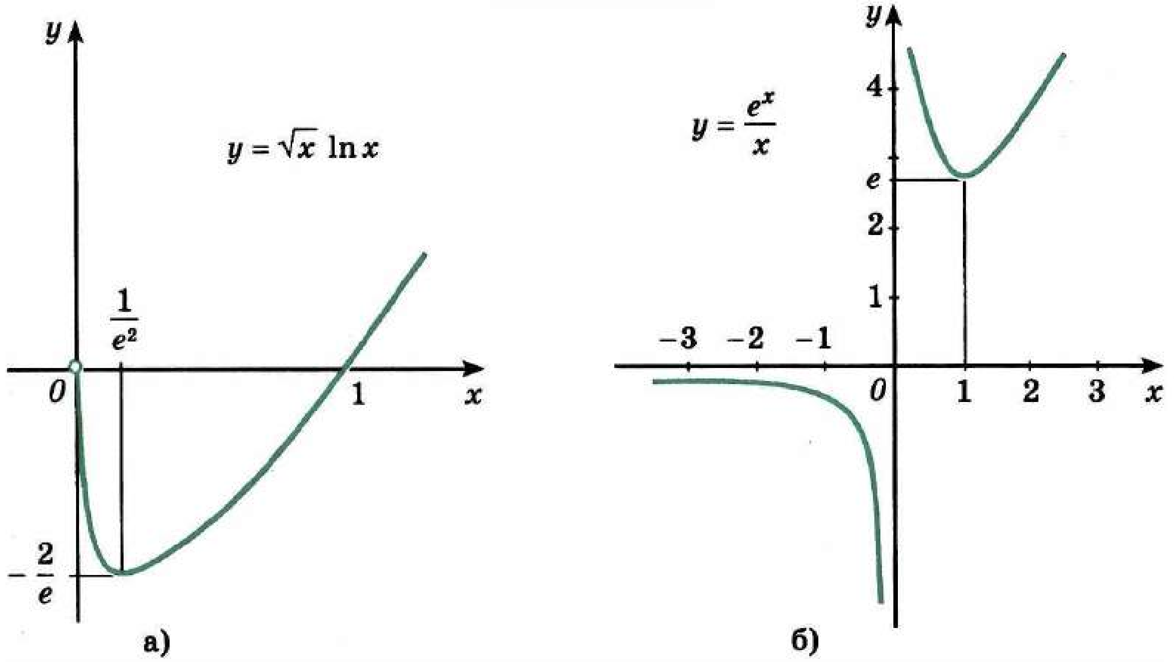


21 нче рәсем

250. Орыну ноктасыннан 1,5 R ераклыкта. **251.** 60°. **252.** М (1; 1). **253.** $\sqrt[3]{4V}$.

254. а) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$; б) (6; ∞). **255.** 3,5 рад/с. **256.** 0,04 π см²/с. **257.** 8 км/сәг.

258. $|v| = 1{,}5$ м/с. **259.** $\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$ м/с, $\frac{100}{\sqrt{(25-4t^2)^3}}$ м/с². **260.** 1) 360 г; $5x$ г/см;



22 нче рәсем

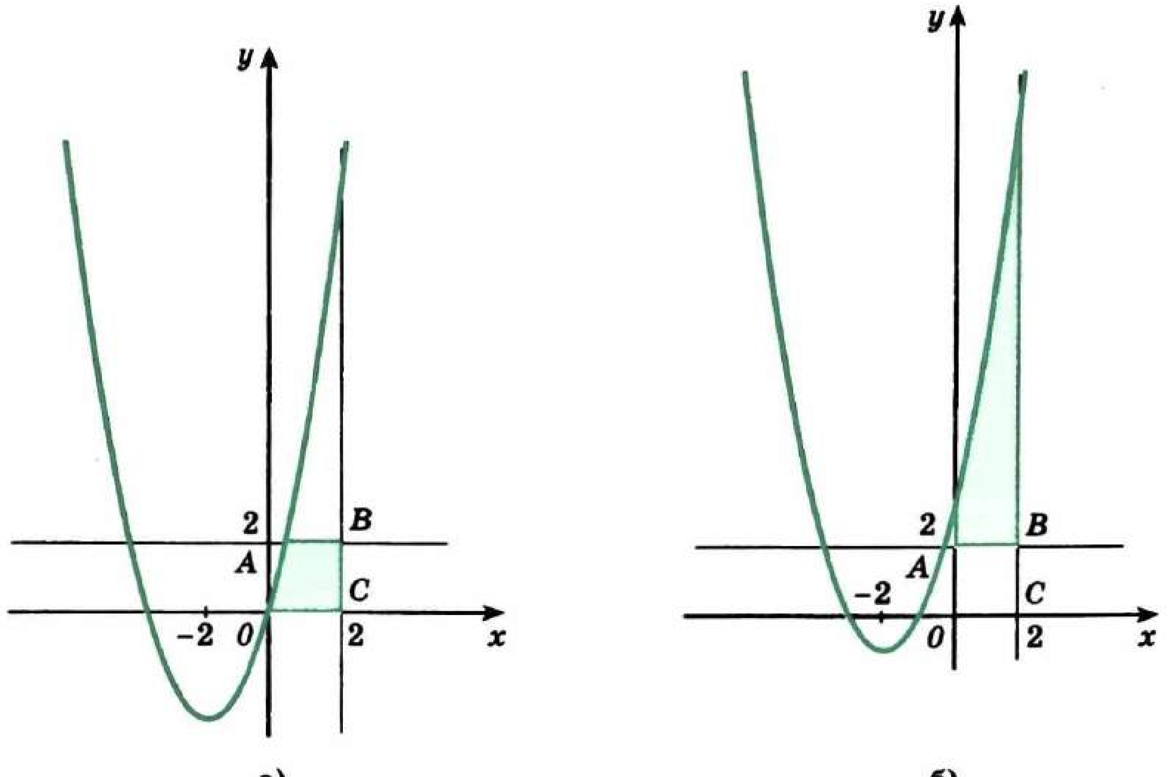
2) 0; 60 г/см. 261. 3 π рад/с. 262. а) 85 м; б) 4 с, 90 м. 263. а) $M\ (-1;\ -1{,}5)$; б) $M\ (1;\ -1{,}5)$. 264. $-\frac{1}{3}$; 0. 266. Теләсә нинди x өчен $f' = 5x^4 + 2 > 0$.

268. в) $2x + 3\ln|x-1| + C$; г) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x + C$. 269. в) $-\frac{1}{3x^3} - 2\frac{23}{24}$;

г) $-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}$. 270. $x^2 - 3x + 4$. 271. $y = x^3 - 5$. 272. $-\frac{1}{4}\cos 2t + 3$.

273. в) $\frac{7-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{12}$; г) 39. 274. а) 2; −2; б) 0,5; −0,5. 275. в) $\frac{4}{3}$; г) 9.

276. 18 һәм $\frac{74}{3}$. 277. $10\frac{2}{3}$. 278. $\frac{2}{3}$. 279. 2; 1. 280. $\frac{8}{3}$. Чишү. Күрсәтелгән фигура рәсемдә штрихланган (23 нче *а* рәсем $a < 2$ гә тиңдәш, ә 23 нче *б* рәсем $a \geq 2$ гә тиңдәш). $a < 2$ булганда, әлеге фигураның мәйданы 4 кә тигез булган $OABC$ квадратының мәйданыннан кечерәк, ә $a \geq 2$ булганда, $S = \int_0^2 (x^2 + 4x + a)\,dx - S_{OABC} = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + ax\right)\Big|_0^2 - 4 = \frac{8}{3} + 8 + 2a - 4 = 2a + \frac{20}{3}$, димәк, $2a + \frac{20}{3} = 12$, моннан $a = \frac{8}{3}$. 281. $a = \frac{2}{\pi}$, $b = 2$.



а) б)

23 нче рәсем

VI бүлек

1. г) Күрсәтмә. $n^2 + 5n + 16 = (n - 4)^2 + 13n$ саны 13 кә $n = 13k + 4$ булганда гына бүленә, ул вакытта $(n - 4)^2$ саны 169 га бүленә, ә $13n$ бүленми. 2. ± 5; ± 7.
3. б) Күрсәтмә. Әгәр d саны N ның бүлүчесе булса, ул вакытта $\frac{N}{d}$ шулай ук N ның бүлүчесе була, әстәвенә $d = \frac{N}{d}$ $N = d^2$ булганда гына мөмкин. 4. в) $(\alpha_1 + 1)\times$ $\times(\alpha_2 + 1)$ ... $(\alpha_k + 1)$. 5. б) Юк; в) юк; г) юк. Күрсәтмә. N ны 3 кә бүлгәндә, калдыкта 2 була. (а) ны кара. 6. а) Юк: сан 3 кә бүленә, ә 9 га бүленми; б) 9. Күрсәтмә. $b \leqslant 1987 \cdot 9 = 17\,883$, $c \leqslant 9 \cdot 4 + 1 = 37$, $d \leqslant 11$ һәм d саны 9 га бүленә.
8. а) $(x; y) = (0; 0)$. Күрсәтмә. № 5, а ны кара; б) $(0; 0)$; $(1; 1)$; $(1; -1)$. Күрсәтмә. $x \geqslant 2$ булганда, y^2 санын 4 кә бүлгәндә, калдыкта 3 калырга тиеш (№ 5, а ны кара); в) $(46; 45)$; $(46; -45)$; $(-46; -45)$; $(-46; 45)$; $(10; 3)$; $(10; -3)$; $(-10; -3)$; $(-10; 3)$. Күрсәтмә. $(x + y)$ һәм $(x - y)$ — 91 нең бүлүчеләре; г) $(3; 3)$; $(3; -3)$. Күрсәтмә. $(y - 1)$ һәм $(y + 1)$ саннары — $x > 0$ булганда, 2 санының дәрәҗәләре.
9. в) $(7k + 1; 13k + 1)$, $k \in Z$; б) $(1; 1)$; г) $(1; 1)$; $(1; -1)$; $(3; 3)$; $(3; -3)$. Күрсәтмә. $x \geqslant 4$ булганда, $1! + 2! + ... + x!$ саны 3 кә тәмамлана. 10. ± 13. 11. 210; 4. Күрсәтмә. $\lg 2 \approx 0{,}30103$, $\lg 5 = 1 - \lg 2 \approx 0{,}69897$ (0,00001 кадәрге төгәллек белән) һәм $\lg 125^{100} = 300 \lg 5 \approx 209{,}691$. Әгәр N санының k цифры булса, $k - 1 \leqslant \lg N < k$ була. Моннан тыш, $\lg 4 < 0{,}691 < \lg 5$. 14. б) Күрсәтмә. $\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > \frac{1}{n+1}$. 17. Күрсәтмә. Чиксез периодик унарлы вакланма чикле унарлы вакланма белән ваклаучы 10^k (k — периодтагы цифрлар саны) булган чиксез геометрик прогрессия суммасын кушып табыла. 19. а) Әйе; б) әйе (мисал: $\left(\sqrt{2}\right)^{2\log_2 3} = 3$). 20. б) $\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q}$ дип фараз итик, биредә $p \in Z$, $q \in N$, $\frac{p}{q}$ — кыскартылмаучы вакланма. Ул вакытта $3 = \frac{p^3}{q^3}$, ягъни $p^3 = 3q^3$, моннан p ның 3 кә бүленүе килеп чыга. $p = 3k$ ны $p^3 = 3q^3$ тигезләмәсенә куеп, $27k^3 = 3q^3$ ны табабыз, ягъни $9k^3 = q^3$. Соңгы тигезләмәдән q ның 3 кә бүленүе килеп чыга. Каршылыкка килеп чыктык: $\frac{p}{q}$ вакланмасы 3 кә кыскартыла; в) $\lg 5 = \frac{p}{q}$ булсын, бу вакытта $\lg 5 > 0$ икәнен истә тотсак, p һәм q — натураль саннар дип исәпләргә була. $\lg 5 = \frac{p}{q}$ тигезлегеннән $10^{\frac{p}{q}} = 5$ не табабыз, моннан $10^p = 5^q$, ә бу тигезлек дөрес түгел: аның сул ягы җөп сан була, ә уң ягы юк. 21. а) $\sqrt{3} + \sqrt{5} = r$ булсын, биредә r — рациональ сан. Ул вакытта $3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 5 = r^2$, моннан $\sqrt{15} = \frac{r^2 - 8}{2}$, ә бу $\sqrt{15}$ нең иррациональ булуына каршы килә. 22. Күрсәтмә. k — бу вакланманың периоды озынлыгы булсын, k пчы икеледән соң килүче цифрдан башлап, k цифр карыйк. Бу барлык цифрлар — җиделеләр, шуңа күрә

бу вакланманың периоды $(\underbrace{77...77}_{k\ цифр})$ гә тигез булырга тиеш, бу дөрес түгел, бу очракта моннан соңгы барлык цифрлар җиделе булырга тиеш. **23.** а) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$; б) $4\sqrt{5}-7$; в) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; г) $2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$. **24.** а) 6; б) $\sqrt{3}-\sqrt{7}$. **25.** а) Башта $\sqrt[3]{3}$ тән котылыгыз: $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})\cdot\left((\sqrt{2})^2-\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2\right)=(\sqrt{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3=2\sqrt{2}+3$;

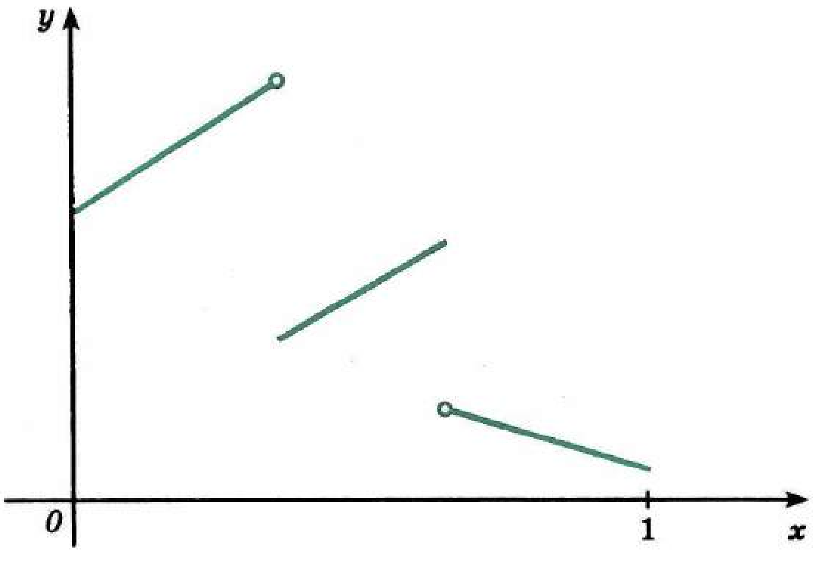
б) башта санаучыны һәм ваклаучыны $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ кә тапкырлагыз; в) № 29. е ның нәтиҗәсеннән файдаланыгыз. **26.** а), б) Юк. **27.** **Күрсәтмә.** Кубка күтәреп, $x=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$ нең $x^3-5x-12=0$ тигезләмәсенең тамыры булуын исбатлагыз, ә бу тигезләмәнең бер генә реаль тамыры бар: $x=3$. Димәк, бирелгән сан 3 кә тигез. **28.** Теләсә нинди натураль k өчен $\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+...+\frac{1}{2^{k+1}}>\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+...+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$. **29.** а) $(x^2-2x+2)\times$ $\times(x^2+2x+2)$; б) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; в) $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$; г) $3(x^2+y^2)(y^2+z^2)(x-z)(x+z)$; д) $3(y+z)(z+x)(x+y)$; е) $(x+y+z)\times$ $\times(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$. **33.** а) $\alpha=\arccos x$ булсын, ул вакытта $\begin{cases}\cos\alpha=x,\\0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\end{cases}$ һәм, беренчедән, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, ә икенчедән, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=x$, димәк, x санының арксинусы билгеләмәсе буенча $\frac{\pi}{2}-\alpha=\arcsin x$. **34.** а) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; б) $1-\frac{3}{4}(m^2-1)^2$; в) $\frac{1}{16}$; г) $\frac{m+m^3}{2}$. **35.** а) $3\pi-10$; б) $4\pi-12$; в) $2-\pi$; г) 3. **36.** **Күрсәтмә.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ формуласыннан файдаланыгыз.

39. а) $\frac{abc}{ab+ac+bc}$; б) $\frac{ab+1}{a(8-5b)}$. **40.** а) **Күрсәтмә.** 2 нигезе буенча ике кисәкнең дә логарифмнары тигез; б) 0. **41.** 7. **43.** 2; −6; 18; −54. **44.** 931. **45.** $a>12$.

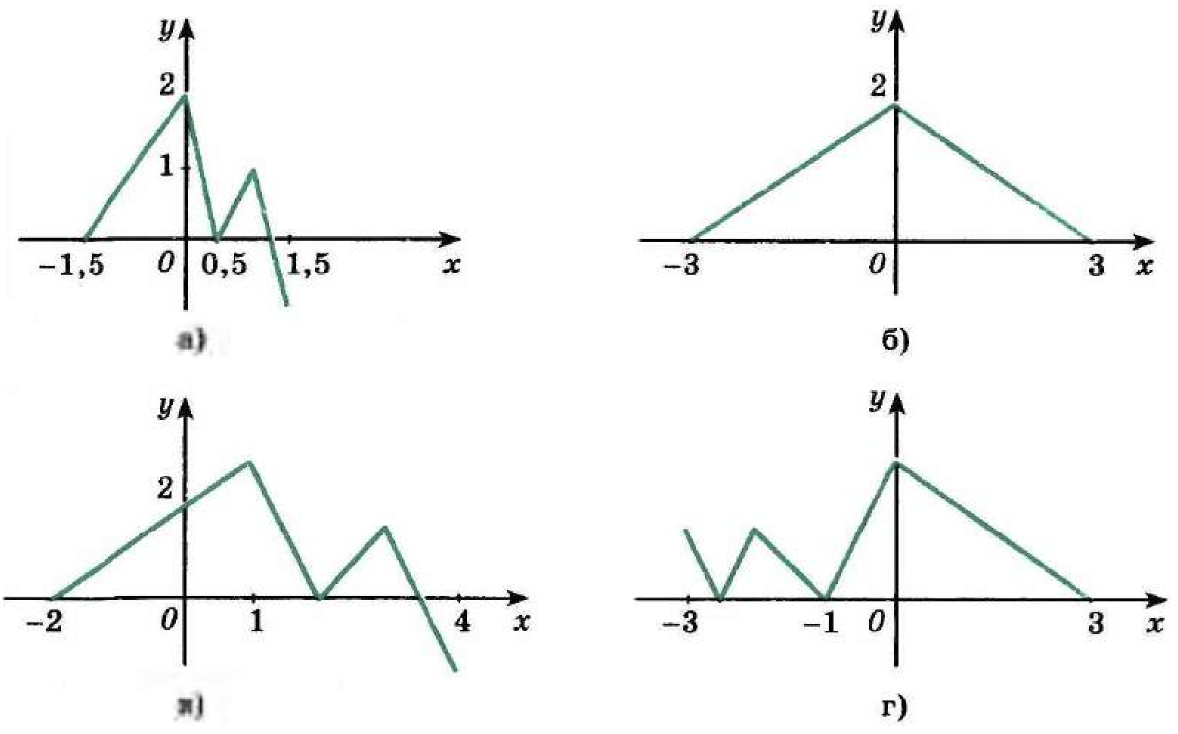
46. 1 яки −2. **47.** 0. **48.** $\left(\frac{A}{B}\right)^2$. **49.** $a_{50}>b_{50}$. **50.** а) **Күрсәтмә.** $\underbrace{99...99}_{k\ цифр}=\frac{10^k-1}{9}$;

б) күрсәтмә. $S-Sx=x+x^2+...+x^n-nx^{n+1}$; в) $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+n}$. **51.** а) $x\neq\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$; в) $[-2;-1)\cup(1;2]$; г) R; е) $(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})$. **52.** б) $[-2;1]$; г) $\left[-\frac{1}{2};1\right]$;

з) $[-2;\ 2]$; к) $[-2;\ 2]$; л) $[0;\ 4]$. **53.** а) $\left[-\frac{1}{4};\ 2\right]$; в) $[-6;\ 4]$; г) $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$. **54.** в) $\left(-\frac{10}{3};\ 5\right]$; г) $[0;\ 1)$. **56.** а) $f(x) = 0$ телисә нинди $x \in D(f)$ өчен, әстәвенә $D(f)$ 0 ноктасына карата симметрик. **59.** а) Әйе (мәсәлән, Дирихле функциясе, x рациональ булса, бу функциянең кыйммәте 1 гә тигез, һәм x иррациональ булса, 0 гә тигез); б) юк (әгәр андый функция булса, $\sqrt{2}$ һәм $1-\sqrt{2}$ саннары аның периодлары булырга тиеш, ә аларның суммасы 1 юк). **60.** К ү р с ә т м ә. а) 1 кыйммәтен функция бер ноктада, 0 ноктасында гына ала. **61.** б) [illegible]; в) $2\pi\sqrt{2}$; г) $\frac{1}{2}$. **63.** К ү р с ә т м ә. а) $\log_2 3 > 1{,}5 > \log_3 8$. **64.** а) ctg 6; cos 2; tg 3; sin 4°. **67.** а) Телисә нинди n да; б) җөп n да; в) андый n юк. **68.** а) $f(x) = b$ яки $f(x) = x$; б) $f(x) = x$ яки $f(x) = b - x$. **69.** а) Җөп n да x, так n да $8 - x$, билгеләнү өлкәсе R; в) n саны $3k$ рәвешендә булганда, n саны $3k+1$ рәвешендә булганда, $\frac{1}{1-x}$, n саны $3k+2$ булганда, $\frac{x-1}{x}$; $n = 1$ булганда, $D(f) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ -\infty)$ һәм, $n \geq 2$ булганда, $D(f_n) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ \infty)$. **70.** а) $y = \frac{1}{ax}$, $a \neq 0$; б) $y = x$ яки $y = \frac{ax+b}{cx-a}$ $(bc \neq -a^2)$. **71.** 24 нче рес. кара. **75.** Өстәп булмый; б) җөпкә кадәр; а) һәм б) так функциягә кадәр. **76.** а) $T > 2$; б) $T = 3$, $T > T_0$, биредә $T_0 = 6{,}5$; в) $T > T_0$, биредә $T_0 = 5$. **77.** 25 нче рес. кара. **81.** а) $\min\limits_{R} f = -1$; $\max\limits_{R} f = 2$; б) $\max\limits_{R} f = 1$, иң кечкенә кыйммәте булмый. **83.** $x \to \infty$ кә омтылганда, $y = x - 1$, $x \to -\infty$ кә омтылганда, $y = -x - 1$; г) $y = 1$, $x = 3$, $x = -3$. **84.** в) К ү р с ә т м ә.



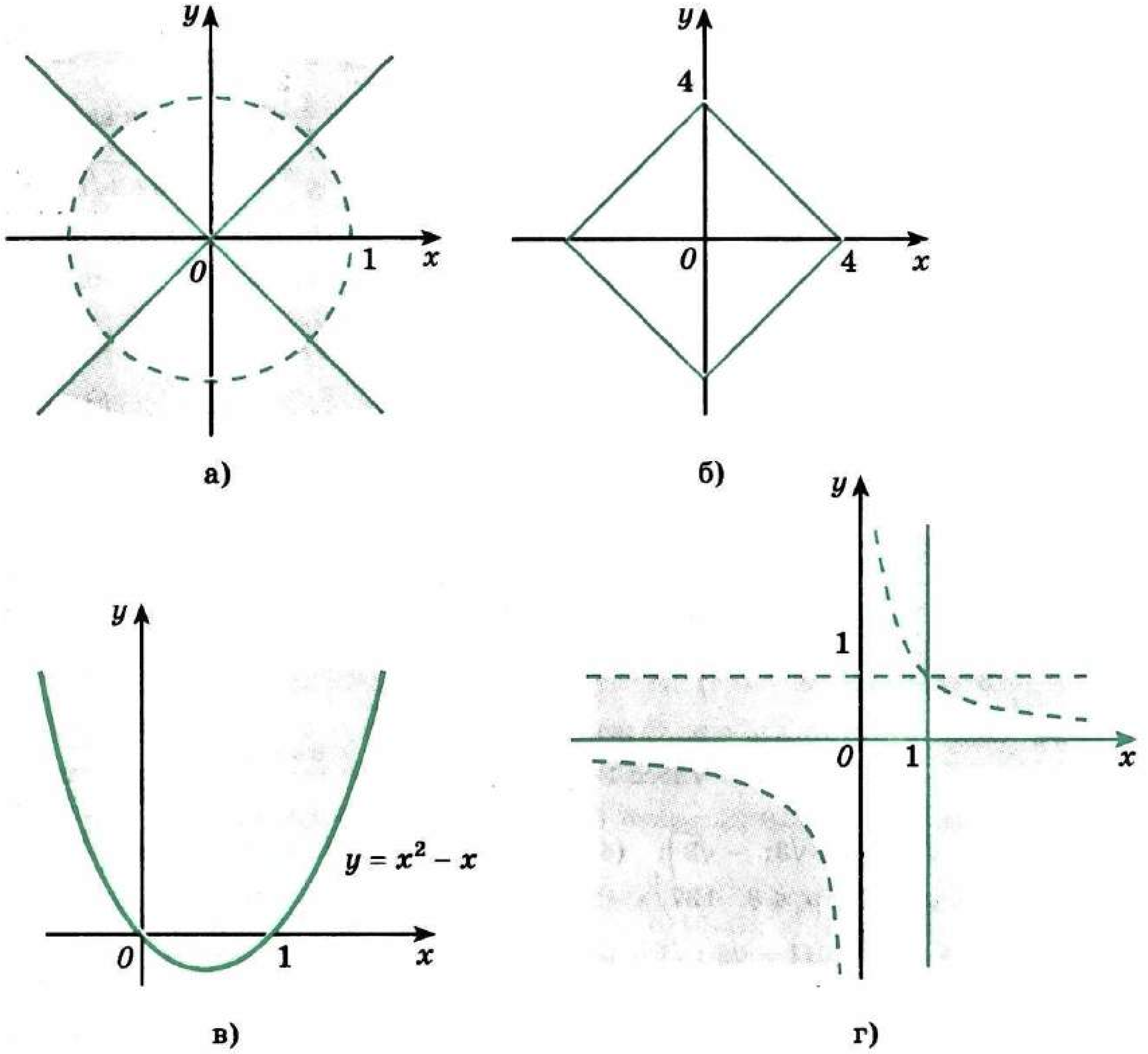
24 нче рәсем



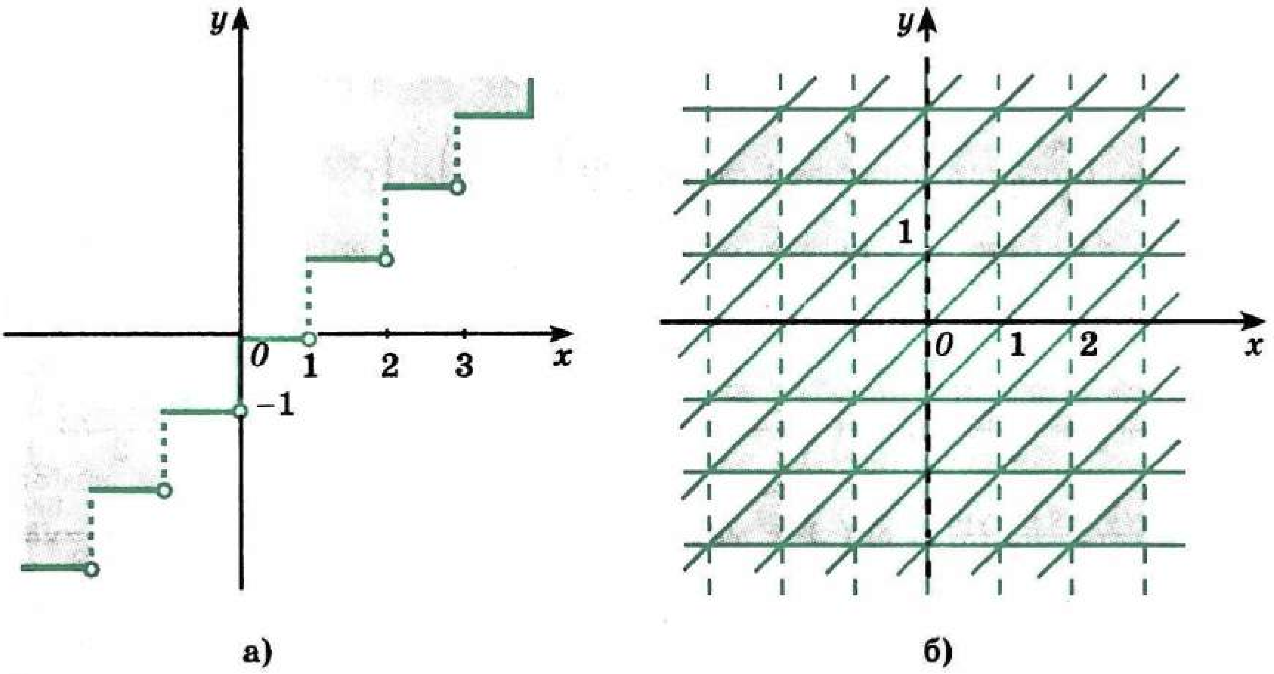
25 нче рәсем

$\sin x \geq 0$ булганда, $y = \operatorname{tg} x$ һәм, $\sin x \leq 0$ булганда, $y = -\operatorname{tg} x$. **90.** а) 1; б) 1; в) 3; г) 14. **91.** а) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d > 0$; б) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$. **92.** а) $x = 0$ һәм $y = 2$ турылар пары; б) $y = x^2 - 2x$ һәм $y = 2x - x^2$ (ике парабола). **94.** 26 нчы рәс. кара; г) к ү р с ә т м ә. $\frac{xy+1}{xy-1} \geq \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow \frac{y(1-x)}{(xy-1)(y-1)} \geq 0$. **95.** б) $(x^2 - 1) \times (y^2 - 1) = 0$ — 4 туры. **96.** в), г) 27 нче рәс. кара. **97.** а) $a \leq 0$ һәм $a \geq 4$, $a < -\frac{1}{2}$ булганда — төрле тамгалы, $a > 4$ булганда — уңай; $-\frac{1}{2} < a \leq 0$ булганда — тискәре. **98.** а) $2 < a < 5$. **99.** а) $p^2 - 2q$; $p^4 - 4p^2q + 2q^2$. К ү р с ә т м ә. Виет теоремасын кулланыгыз. **100.** а) $p = 0$; б) андый a лар юк. **101.** $a + b + c = f(1) < 0$, шуңа күрә $c = f(0) < 0$. **102.** К ү р с ә т м ә. Бу тамырның 1 булуын исбатлагыз, ул вакытта $a + b + c = 0$ һәм $x = 1$ — $cx^2 + bx + a = 0$ тигезләмәсенең тамыры. **103.** К ү р с ә т м ә. а) $x_0 = \frac{p}{q}$ ны тигезләмәгә куегыз һәм p һәм q саннары үзара гади булуыннан файдаланыгыз; б) $P(x)$ ны $P(x) = Q(x)(x - a) + r$ рәвешендә күрсәтегез, биредә r — $P(x)$ ны $(x - a)$ санына бүлгәндәге калдык; $x = a$ ны куеп, $P(a) = r$ ны табабыз. **104.** в) ± 1; г) -3; 0,5. **105.** в) $-\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5 + 4\sqrt{101}}}{2}$; г) $-1 \pm \sqrt{\sqrt{\frac{33}{2}} - 3}$.

106. г) К ү р с ә т м ә. $(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = (x + 1)(x + 2)(x - 4)(x - 5) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 10)$. $y = x^2 - 3x + 1$ булсын, ул вакытта $y(y - 5) \times$



26 нчы рәсем



27 нче рәсем

$\times(y-11)=-30$, моннан (№ 103 не кара) $y_1=6$, $y_{2,3}=5\pm\sqrt{30}$. 107. а) 1, $-2\pm\sqrt{3}$; б) 1; 3; $\frac{-9\pm\sqrt{33}}{4}$. 108. а) 2; $\frac{1}{2}$; б) **күрсәтмә.** $y=x+\frac{1}{x}$ булсын, ул вакытта $2y^2+y-7=0$; в) -1; 2; г) $1+\sqrt{7}\pm\sqrt{2\sqrt{7}+5}$. 109. а) 2; $-\frac{5}{2}$; б) $\frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{1067}}}{4}$.

110. **Күрсәтмә.** а) $(x^2+1)^2=2(x-1)^2$, моннан $x^2+1=\pm\sqrt{2}\,(x-1)$; б) чишүнең бер ысулы — $y=\frac{1}{x}$ алыштыруы белән а) га китерү. 111. а) 2; 4; -1; $-\frac{1}{2}$; б) **күрсәтмә.** $y=\frac{x^2-x+1}{x+1}$ булсын, ул вакытта $y^2+2y-1=0$. 112. а) $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

113. а) ±1; б) 5; -8. 114. а) 1; б) $[6;\ \infty)$. 115. а) $(-\infty;\ -4]\cup[-2;\ -1]\cup[1;\ \infty)$.

116. а) $\left(-\infty;\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2};\ \infty\right)$. 117. а) $(-\infty;\ \infty)$; б) $\varnothing$. 118. а) $(1;\ 3)$; б) $\left(-\infty;\ \frac{4-\sqrt{19}}{3}\right]\cup\left[\frac{4+\sqrt{19}}{3};\ \infty\right)$. 119. в) **Күрсәтмә.** $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geq\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}\geq\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}$; г) **күрсәтмә.** $d=\frac{a+b+c}{3}$ дип исәпләгез.

125. б) $\left(3\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right)$; $\left(-3\sqrt{3};\ -\sqrt{3}\right)$; $(4;\ 5)$; $(-4;\ -5)$. 126. а) $\left(\frac{3}{4};\ \frac{5}{4}\right)$; $\left(\frac{1}{4};\ \frac{7}{4}\right)$; б) $(1\pm(3-y_0);\ y_0)$, $2\leqslant y_0\leqslant3$. 127. а) $(1;\ 1;\ 0)$; б) $(-3;\ 2;\ -1)$. 128. а) $(1;\ 2)$; $(2;\ 1)$; б) $(1+\sqrt{3};\ 1-\sqrt{3})$; $(1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3})$. 129. а) $(5;\ 3)$; $(-3;\ -5)$; $(\sqrt{17};\ \sqrt{17})$; $(-\sqrt{17};\ -\sqrt{17})$; б) $(2;\ -1)$; $(1;\ -2)$; $(-2;\ -1)$; $(1;\ 2)$; $(0;\ 3)$; $(-3;\ 0)$.

130. а) $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};\ -\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\ -\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$; $\left(\frac{3(3+\sqrt{69})}{10};\ \frac{3+\sqrt{69}}{10}\right)$; $\left(\frac{3(3-\sqrt{69})}{10};\ \frac{3-\sqrt{69}}{10}\right)$; б) $(0;\ 0;\ 0)$; $\left(\frac{5}{3};\ \frac{10}{3};\ 5\right)$, $\left(-\frac{5}{9};\ \frac{5}{3};\ \frac{10}{9}\right)$. 131. а) $(2;\ 1)$; $(-2;\ -1)$; $\left(\frac{5}{\sqrt{3}};\ -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(-\frac{5}{\sqrt{3}};\ \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$. в) [illegible]; [illegible]; $\left(\sqrt[4]{\frac{27}{4}};\ \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$; $\left(-\sqrt[4]{\frac{27}{4}};\ -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$. 132. а) $(0;\ 0)$; $(\sqrt{7};\ \sqrt{7})$; $(-\sqrt{7};\ -\sqrt{7})$; $(3;\ 2)$; $(2;\ 3)$; $(-3;\ -2)$; $(-2;\ -3)$; $(\sqrt{19};\ -\sqrt{19})$; $(-\sqrt{19};\ \sqrt{19})$; б) $(0;\ 0)$; $(2;\ -2)$; $(-2;\ 2)$; $(\sqrt{6};\ \sqrt{6})$; $(-\sqrt{6};\ -\sqrt{6})$; $\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2};\ \frac{-\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{-\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2};\ \frac{-\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{-\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $(-1+\sqrt{3};\ -1+\sqrt{3};\ -1+\sqrt{3})$; $(-1-\sqrt{3};\ -1-\sqrt{3};\ -1-\sqrt{3})$; $(0;\ 1;\ 1)$; $(1;\ 0;\ 1)$; $(1;\ 1;\ 0)$; $(2;\ -1;\ -1)$; $(-1;\ 2;\ -1)$; $(-1;\ -1;\ 2)$; г) $(1;\ 0;\ 1)$; $(-1;\ 0;\ -1)$; $\left(\frac{1}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$; $\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{4}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$. 133. а) $(3;\ 2;\ 1)$; $(3;\ -2;\ -1)$; $(-3;\ 2;\ -1)$;

(−3; −2; 1); б) (3; 2; 1). **134.** а) $(2; \sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{9})$; $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}; \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; в) ∅; г) $\left(\frac{10}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(-\frac{10}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$; (4; 3; 2); (−4; −3; −2). **135.** 3 м/мин; 1,8 м/мин. **136.** 863. **138.** 40 км². **139.** 8. **140.** 280 сум, портфель авторучкадан кыйммәтрәк. **141.** 12,5 г. **142.** 16 сәг. 45 мин. **143.** 100 м/с. **144.** а) $\frac{5}{4}$; б) 1; 2; в) 7; г) $\pm\frac{257}{255}$. **145.** а) 1; б) 2; 11; в) 1; г) 0. **146.** а) $\pi + 2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; в) ∅; г) πn; $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **147.** а) [3; 11]; б) [5; 10]. **148.** а) ∅; б) 2. **149.** а) $\frac{63}{65}$; $\frac{9}{7}$; б) күрсәтмә. Ике кисәген дә $\sqrt[3]{(7+x)^2}$ ка бүлегез. **150.** а) −1; б) 8; $8 \pm \sqrt{\frac{432}{7}}$. **151.** а) $\frac{12}{127}$; $-\frac{4}{43}$; б) ∅. **152.** ∅. **153.** а) ∅, $a < -1$ булса; $x = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}$, $-1 \leqslant a < 1$ булса; $x = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}$, $1 \leqslant a < \sqrt{2}$ булса; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \sqrt{2}$ булса; ∅, $a > \sqrt{2}$ булса; б) ∅, $a < -1$ булса; $x = \frac{a^2+1}{2a}$, $-1 \leqslant a < 0$ булса; ∅, $0 \leqslant a < 1$ булса; ∅, $0 \leqslant a < 1$ булса; $x = \frac{a^2+1}{a}$, $a > 1$ булса. **154.** а) $(-\infty; 1] \cup \left[3; \frac{17+\sqrt{13}}{6}\right)$; б) [0; 3]; в) (1; ∞); г) $\left[-1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **155.** а) $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$; б) [1; ∞]; в) $\left[\frac{81 - 9\sqrt{97}}{8}; 3\right]$; г) $\left[0; \frac{841}{144}\right)$. **156.** а) ∅; б) $\left[-1; 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right)$. **157.** а) $\left(1; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; \infty\right)$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (3; \infty)$. **158.** а) [1; ∞); б) $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (4; \infty)$; в) $\left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 1\right]$; г) (2; ∞). **159.** а) (1; 64); (64; 1); б) (4; 1); (1; 4); в) (1; 27); (27; 1); г) (1; 8); (8; 1). **160.** а) (2; 3); $\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right)$; б) (2; −2); в) (4; 2); $\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; г) (8; 27); (−27; −8). **161.** а) (−2; −8); б) $\left(\frac{24}{23}; 24\right)$; $\left(3; \frac{3}{2}\right)$.

162. а) (9; 1); б) (64; 1); (−1; −64); в) (9; 4); $\left(\frac{529}{64}; \frac{1}{64}\right)$; г) (4; 3); $\left(4\sqrt[3]{\frac{59}{5}}; 3\sqrt[3]{\frac{59}{5}}\right)$.

163. а) $(-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; в) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, πn, $n \in Z$; г) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. **164.** а) 0; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} - 2\pi n$, $n \in N$; б) ∅; в) 0; $2\pi n$, $\pi - 2\pi n$, $n \in N$; г) 0. **165.** а) $\pm\arccos\frac{1}{4} + \pi n$, $n \in Z$; б) πn; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in Z$; в) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$;

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. 167. а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. 169. а) $\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} +$ $+ \pi n$, $n \in Z$; б) $\varnothing$. **170.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **171.** $2k$, $k \in Z$, биредә $k \neq 31l$, $l \in Z$; $\frac{31}{33}(2n+1)$, $n \in Z$, $n \neq 33m + 16$, $m \in Z$. **172.** а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **173.** 0. **174.** $\left(-1; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$; $\left(1; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$. **175.** $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **177.** а) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$; $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; в) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$; $\left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$; г) $\left(\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$; $\left[\frac{\pi}{3} \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **178.** а) $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\left[-\frac{3\pi}{10} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $\left[-\frac{\pi}{10} + \pi n; \frac{\pi}{10} + \pi n\right]$, $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{10} + \pi n\right]$, $n \in Z$; в) $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$; г) $\left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$. **180.** К ү р с ә т м ә. $\cos \pi x = -1$ яки $\frac{1}{4} \leqslant \cos \pi x \leqslant \frac{1}{2}$. **181.** $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$. **182.** К ү р с ә т м ә. $\cos \sin x > \cos x > \sin \cos x$. **184.** а) $\left(\frac{5\pi}{4} + \pi\left(2n + \frac{k}{2}\right); \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)$, k, $n \in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \pi + 2\pi k\right)$, k, $n \in Z$. **185.** $\left(2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi k; 2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi n\right)$; $\left(2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi k; 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi n\right)$; $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $k \in Z$, $n \in Z$.

186. $\left(\frac{\pi}{6} + \pi m; \frac{\pi}{3} + \pi n; -\frac{\pi}{3} + \pi(2p - m - n)\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi m; -\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi(2p - m - n + 1)\right)$, $m, n, p \in Z$. **187.** а) ± 2; б) 2; в) ± 1; г) 1. **188.** а) $\frac{1}{3}$; 2; 4; б) 1; $\frac{\pi}{9}$; $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in N$; в) $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; 1; 3; г) 0. **189.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; б) $\operatorname{arctg} 10 + \pi n$, $n \in Z$; в) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **190.** $a = \frac{5}{2}$. **191.** $(-\infty; \log_2(\sqrt{2} - 1)] \cup [0{,}5; \infty]$; б) $(0; 2)$; г) $(-\infty; \infty)$. **192.** а) $(2; 3) \cup (4; \infty)$; б) $\left(-\sqrt{7}; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \sqrt{7}\right)$. **193.** $a \geqslant 2$.

194. а) (2; 0); б) (1; 1); в) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ 2\pi n-\frac{\pi}{3}\right)$, $k,\ n\in Z$; г) $\left(\pi n;\ 2\pi k\pm\frac{\pi}{3}\right)$, $k,\ n\in Z$. **195.** а) 8; б) $\log_3\frac{3+\sqrt{41}}{2}$; в) 0; г) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

196. а) $10^{[illegible]}$; $10^{[illegible]}$; б) 2; $\frac{1}{8}$; в) 10; $\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$; г) $\varnothing$. **197.** Күрсәтмә. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg} x\operatorname{arcctg} x=10^\circ$; б) $\varnothing$; в) $10^{\frac{\sqrt{3}}{[illegible]}}$; г) $\pm 0{,}5$. **198.** $0<a<\frac{1}{8}$.

199. а) $a\leqslant 0$; б) $a>0$. **200.** $|a|>\frac{1}{e}$. **201.** а) $\left(\frac{1}{4};3\right)$; б) $(3;\infty)\cup(1;+2^{1{,}25})$; в) (4; 10); г) $(1;\sqrt[3]{5})$. **202.** а) $\varnothing$; б) $\left(\frac{1}{3};3\right)$; в) $\left(\log_3\frac{2}{[illegible]};\infty\right)$; г) $\left(\frac{1}{5};5\right)$.

203. а) $(4;\infty)$; б) $(-4-\sqrt{2};-5)\cup(-3;-4+\sqrt{2})\cup(1;2)$; в) $[\sqrt{6}-1;2)\cup(2;5]$; г) $(\log_2 10;\infty)$. **204.** (2; 2,5). **205.** (2; 4); б) $\left(\frac{2}{9};\frac{1}{9}\right)$; в) (13; 8); г) (512; 1).

206. а) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$; $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $n,\ k\in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $n,\ k\in Z$. **209.** а) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x|x|-0}{x}=0$. **210.** Чагыштырма табыйк: $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x)+f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\to f'(0)$ теләсә нинди x өчен (чөнки $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$, ягъни $f(0)=0$).

211. Күрсәтмә. $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, бу функциянең x нульгә омтылганда чикләмәсе булмый. **212.** Гомумән алганда, юк. Мисаллар: а) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=|x|$, $x_0=0$; б) $f_1(x)=f_2(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $x_0=0$. **214.** а) $f(x)=\arcsin x$ функциясенең дифференциалланучы $g(x)=\sin x$ (билгеләнү өлкәсе $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$) функциясенә кире функция буларак чыгарылмасы була. $\sin(\arcsin x)=x$ тигезлеген дифференциаллап табабыз: $\cos(\arcsin x)\cdot(\arcsin x)'=1$, моннан $(\arcsin x)'=$ $=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\arcsin x=\alpha$ булганлыктан, $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$ була, чөнки $\cos\alpha\geqslant 0$. **215.** а) $x^x(\ln x+1)$; б) $(\sin x)^{\cos x}\cdot\frac{\cos^2 x-\sin^2 x\ln\sin x}{\sin x}$.

216. Күрсәтмә. $\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$. **217.** Күрсәтмә. $h(x)=f(x)-g(x)$

функциясе $(x_0;\ \infty)$ да үсә. **218.** а) $4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$; б) $16-\frac{n+2}{2^{n-3}}-\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}=16-\frac{n^2+5n+8}{2^{n-1}}$. **221.** а) $a<-3,\ a>1$; б) $0<a<28$. **222.** а) К ү р с ә т м ә. $f(x)=\cos x+x$ функциясе $(-\infty;\ \infty)$ да үсә. **223.** а) $(-\infty;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$. **224.** К ү р с ә т м ә. Җитәрлек дәрәҗәдә зур уңай x ларда бу тигезләмәнең сул кисәге уңай, ә җитәрлек дәрәҗәдә модуле буенча зур тискәре x ларда тискәре икәнлеген исбатлагыз. **225.** К ү р с ә т м ә. Математик индукция методыннан һәм Лагранж теоремасыннан файдаланыгыз (Лагранж теоремасы буенча, күпбуынның ике тамыры арасында бу күпбуын чыгарылмасының тамыры бар). **226.** $P(x)$ p тапкыр A кыйммәтен алсын, $p>n$. Ул вакытта $P(x)$ — A күпбуынының дәрәҗәсе n һәм аның n нан күбрәк тамыры була, ә бу моңа кадәрге мәсьәлә нәтиҗәсенә каршы килә. **227.** К ү р с ә т м ә. а) $R(x)=C$ булса, ул вакытта C — $p(x)-Cq(x)$ күпбуынының тамыры k дәрәҗәсеннән югарырак түгел; б) $q(x)p'(x)-p(x)q'(x)=0$ булганда, $R'(x)=\frac{q(x)p'(x)-p(x)q'(x)}{q^2(x)}$ һәм $R'(x)=0$, $m\neq n$ булса, бу тигезләмәнең сул ягы — дәрәҗәсе $m+n-1$ дән югарырак булган күпбуын, һәм, $m=n$ булса, дәрәҗәсе $m+n-2$ дән югарырак булмаган күпбуын. **228.** $\min\limits_{[0;3]}f(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{27}$; $\max\limits_{[0;3]}f(x)=f(3)=105$. **229.** $1\frac{27}{43}$ сәг. **230.** Кәгазь битенең буе 30 см, киңлеге 20 см. **231.** 20 км/сәг. **232.** $\sqrt{\frac{5}{12}}$. **233.** а) Беренчесе зуррак; б) икенчесе зуррак. **236.** а) 1; б) 1. **237.** $|a|>2$ булганда, 1 тамыр; $|a|=2$ булганда, 2 тамыр; $|a|<2$ булганда, 3 тамыр; б) $-4-\sqrt{12}<a<0$ булганда, тамыры юк; $a=-4-\sqrt{12}$ булганда, 1 тамыр; $a<-4-\sqrt{12}$, $a=0$ һәм $a>4$ булганда, 2 тамыр; $a=4-\sqrt{12}$ булганда, 3 тамыр; $0<a<4-\sqrt{12}$ булганда, 4 тамыр. **238.** $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{1,5}$. **239.** $f(3\pi)=12\pi-1$. **240.** $R+Rt$, R. **241.** $\frac{150}{17}$ м/мин. **242.** $90°$. **243.** а) $y=-\frac{9}{4}x+3$; $y=-3$, $y=-12x-15$; в) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)$; г) $y=\pm\sqrt{3}x+6$. **244.** πn, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. **247.** $a=4$. **248.** $a=3$, $b=1$. **249.** К ү р с ә т м ә. $x=\frac{a+1}{2}$ булганда, $f(x)=2x-a$ һәм $f'(x)=1$. **250.** M_0 — $y=x^2$ параболасының «эчлеге», M_1 — парабола үзе. M_2 — бу

параболаның «тышкы өлеше», M_k — $k \geqslant 3$ булганда буш. **251.** а) $\frac{x|x|}{2} + C$;

б) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + C, & x \geqslant 1 \text{ булганда}, \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + C - 1, & x < 1 \text{ булганда}; \end{cases}$

в) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x + C, & x \leqslant -1 \text{ булса}, \\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3} + C, & -1 < x < 1 \text{ булса}, \\ \frac{x^3}{3} - x + \frac{8}{3} + C, & x \geqslant 1 \text{ булса}. \end{cases}$

252. а) $\frac{1}{3}(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2} + C$; б) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$; в) $\ln \sin x + C$; г) $-\ln \cos x + C$.

253. а) $\ln|x - 1| - \ln 2 - 1$; б) $-\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 1$; в) $\sin x - \sin e + \pi$; г) $-\frac{x^3}{2} + x$.

254. а) $F(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \text{ булса}, \\ x, & x \geqslant 0 \text{ булса}; \end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 4, & x \geqslant 1 \text{ булса}, \\ x - 3, & x < 1 \text{ булса}. \end{cases}$

255. Күрсәтмә. $(F(x) - F(-x))' = F'(x) + F'(-x) = f(x) - f(x) = 0$, ягъни $G(x) = F(x) - F(-x)$ — даими. Моннан тыш, $G(0) = F(0) - F(0) = 0$, моннан $F(x) = F(-x)$. **256.** Күрсәтмә. $G(x) = F(x) + F(-x)$ булсын, ул вакытта $G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, ягъни $G(x) = C$, биредә C — даими, $F(0) = 0$ булса, $C = 0$. **257.** 10 с, 700 м (чөнки $t > 0$). **264.** $y = \sqrt[3]{6x-4}$. Күрсәтмә. $(y^3)' = 3y'y^2 = 6$.

265. $\frac{\sin x - \cos x}{2}e^x$ һәм $\frac{\sin x + \cos x}{2}e^x$. **266.** а) Табабыз: $x'(t) = (x_0 + \int_{t_0}^{t} v(z)\,dz)' = x'_0 + (v(t) - v(t_0))' = 0 + v'(t) = v'(t)$ һәм $x_0 = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} v(z)\,dz = x_0 + 0 = x_0$.
267. Күрсәтмә. Формуланы $y = 1$, $y = x$, $y = x^2$ һәм $y = x^3$ өчен тикшерегез.
268. а) Күрсәтмә. № 255 не кара; б) күрсәтмә. № 256 ны кара; $F(x) + F(-x) = C$, бу вакытта $x = 0$ не куеп, $C = 2F(0)$ не табабыз, моннан теләсә нинди x өчен $\int_{-x}^{x} f(z)dz = F(x) - F(-x) = 2(F(x) - F(0))$, шулар арасында $x = a$ өчен да.
269. а) 0; б) 0. **270.** а) 135,6; в) $-1\frac{2}{7}$. Күрсәтмә. $y = 1 - \frac{x}{2}$ формуласы буенча үзгәрешлене алыштырыгыз. **271.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) ln 2. Күрсәтмә. $\frac{1}{n}$ ны җәя тышына чыгарыгыз; в) $\frac{1}{p+1}$; г) $\frac{1}{1-p}(2^{1-p} - 1)$. **272.** а) π. Күрсәтмә.

$\cos^2 nx = \frac{1+2\cos nx}{2}$; б) 0; в) π; г) 0. Чишү. $\int\limits_0^{\pi} \sin 3x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}(\sin 8x -$

$- \sin 2x)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi}$. **273.** а) 2; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $7\frac{1}{3}$; г) $\frac{5}{3}$.

274. πab. **275.** $\begin{cases} a < 2, \\ b < 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 2, \\ b > 2 \end{cases}$ булганда; б) $C < 0$ һәм $C > 3$;

в) $\begin{cases} a < -C \\ b < -C; \end{cases}$ $\begin{cases} a > -C \\ a > -C \end{cases}$ булганда. **276.** а) $24\frac{1}{3}$; б) $2\frac{2}{3}$. **277.** 8; $\frac{12-2\sqrt{21}}{5}$.

279. 25 Дж. **280.** $a = -1$. **281.** $\frac{g^2M^2}{6m^2}$ (g — ирекле төшү тизләнеше). **282.** $\frac{\pi\rho R^3H^2g}{12}$.

285. R радиуслы бериш ярымшарның массалар үзәге шар үзәгеннән $\frac{3}{8}$ ераклыгында, аның симметрия күчәрендә ята.

Атамалар күрсәткече

Аралыкта өзлексез функция 134
аргументның үсемтәсе 105
арккосинус 69
арккотангенс 70
арксинус 68
арктангенс 69
асимптота
— авыш 55
— вертикаль 55
— горизонталь 55

Башлангыч 185
башлангычларның гомуми рәвеше 188
башлангычларның төп үзлеге 185
башлангычны табу кагыйдәләре 192
берәмлек әйләнә 15
бөтен рациональ функция 23
бөтен сан 178
бүленмәүчелек методы 214
Вакланмалы рациональ функция 23
Вейерштрасс теоремасы 165

Гармоник тирбәнешләр 63, 278
гармоник тирбәнешләрнең амплитудасы 63
гармоник тирбәнешләрнең башлангыч фазасы 63
гармоник тирбәнешләрнең ешлыгы 63
гармоник тирбәнешләрнең периоды 63
гармоник тирбәнешнең тигезләмәсе 279
Даиминең чыгарылмасы 113

дифференциалланучы функция 114
дифференциаллау 114
дифференциаллау кагыйдәләре 121
дифференциаль исәпләү 170
дәрәҗәле функция 273
дәрәҗәле функциянең башлангычы 273
дәрәҗәле функциянең чыгарылмасы 124
дәрәҗәләрнең төп үзлекләре 232

e саны 263

Зурлык 178

Интеграл 200, 212
— анык 212
— анык булмаган 212
интеграл исәпләү 212
интеграллау 201
интеграллау чикләре 201
интерваллар методы 135
иррациональ күрсәткечле санның дәрәҗәсе 236
иррациональ сан 179
иррациональ тигезләмә 227

Кавальери принцибы 215
кайтма функция 259
катлаулы функция 127
катлаулы функциянең чыгарылмасы 127
квадрат тамыр 222

кимүче функция 43
кире функция 259
кире функция турында теорема 261
китерү формулалары 7
косеканс 20
косинус 15
котангенс 18
котангенслар сызыгы 18
куб тамыр 222
кәкресызыклы трапеция 196
кәкресызыклы трапециянең мәйдан формуласы 198
күплекләрнең берләшмәсе 23
күрсәткечле тигезләмә 242
күрсәткечле тигезләмәләр системалары 243
күрсәткечле тигезсезлек 243
күрсәткечле функция 239
күрсәткечле функциянең башлангычы 267
күрсәткечле үсүнең (кимүнең) дифференциаль тигезләмәсе 277

Лагранж формуласы 142
логарифм 246
логарифмик тигезләмәләр системалары 256
логарифмик тигезсезлек 256
логарифмик функция 251
логарифмик функциянең чыгарылмасы 269
логарифмнарның төп үзлекләре 246

Максимум ноктасы 47
массалар үзәге 209
минимум ноктасы 47
моменталь тизлек 111, 147

Натураль логарифм 266
натураль сан 178
n нчы дәрәҗә арифметик тамыр 220
n нчы дәрәҗә тамыр 220
ноктада функциянең өзлексезлеге 117

Ньютон Лейбниц формуласы 202

Парабола фокусы 151
периодик функция 36

Радиан 5
радикал 220
рациональ күрсәткечле санның дәрәҗәсе 231
рациональ сан 177
реаль сан 177

Санлы функция 22
саннарның аермасы 181
саннарның суммасы 181
саннарны чагыштыру кагыйдәләре 181
саннарның унарлы якынлашуы 181
санның бөтен өлеше 180
санның вакланма өлеше 180
санның рациональ күрсәткечле дәрәҗәсе 231
секанс 20
синус 15
синуслар сызыгы 16
синусоида 17
сызыкча тыгызлык 150

Так функция 34
тамыр күрсәткече 220
тамырларның төп үзлекләре 222
тамыр турында теорема 67
тангенс 18
тангенслар сызыгы 18
тангенсоида 20
тизләнеш 148
тригонометрик тигезләмәләр системалары 86
тригонометрик тигезсезлек 79
тригонометрик функцияләрнең башлангычы 191
тригонометрик функцияләрнең кыйммәтләре тамгасы 7
тригонометриянең төп формулалары 7

Тэйлор формуласы 174
төп логарифмик бердәйлек 246

Ферма теоремасы 157
функция аргументы 22
функция графигына орынма 110
функция графигына орынма тигезләмәсе 140
функция графигының рәвешен үзгәртү 24
функциянең билгеләнү өлкәсе 22
функциянең графигы 24
функция дифференциалы 171
функциянең даимилек билгесе 188
функциянең даими тамга аралыгы 53
функциянең иң зур кыйммәте 165
функциянең иң кечкенә кыйммәте 165
функциянең киму аралыгы 53
функцияне тикшерү схемасы 54
функциянең киму билгесе 153
функциянең критик ноктасы 157
функциянең кыйммәте 23
функциянең кыйммәтләре өлкәсе 23
функциянең максимумы 48
функциянең максимумы билгесе 159
функциянең ноктадагы чыгарылмасы 113
функциянең нуле 53
функциянең периоды 36
функциянең чикләмәсе 175
функциянең чыгарылмасы 114
функциянең экстремумы 48
функциянең үсемтәсе 105
функциянең үсү аралыгы 53
функциянең үсү билгесе 153

Унарлы логарифм 248

Чагылдыру 28
чикләмә 171
чикләмәле күчү 117
чикләмәле күчү кагыйдәләре 118
чиксез кечкенә зурлык 171
чит тамыр 228
чыгарылманың геометрик мәгънәсе 139
чыгарылманың механик мәгънәсе 147

Эзлеклелекнең чикләмәсе 176
Экстремум ноктасы 48

Үзара кире функцияләр 261
үзгәрешле көчнең эше 207
үсүче функция 43

Җисем күләме формуласы 206
җөп функция 33

Эчтәлек

Сүз башы 3

I бүлек

ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛӘР

§ 1.

Санча аргументның тригонометрик функцияләре

1. Синус, косинус, тангенс һәм котангенс (кабатлау) 5
2. Тригонометрик функцияләр һәм аларның графиклары 14

§ 2.

Функцияләрнең төп үзлекләре

3. Функцияләр һәм аларның графиклары 21
4. Җөп һәм так функцияләр. Тригонометрик функцияләрнең периодиклыгы 31
5. Функцияләрнең үсүе һәм кимүе. Экстремумнар 40
6. Функцияләрне тикшерү 48
7. Тригонометрик функцияләрнең үзлекләре. Гармоник тирбәнешләр 56

§ 3.

Тригонометрик тигезләмәләрне һәм тигезсезлекләрне чишү

8. Арксинус, арккосинус һәм арктангенс 64
9. Иң гади тригонометрик тигезләмәләрне чишү 69
10. Иң гади тригонометрик тигезсезлекләрне чишү 75
11. Тригонометрик тигезләмәләрне һәм тигезләмәләр системаларын чишүгә мисаллар 81

Тарихтан мәгълүматлар 85
Кабатлау өчен сораулар һәм мәсьәләләр 91

II бүлек

ЧЫГАРЫЛМА ҺӘМ АНЫ КУЛЛАНУ

§ 4.

Чыгарылма

12. Функциянең үсемтәсе 97
13. Чыгарылма төшенчәсе 101
14. Функциянең өзлексезлеге һәм чикләмә аша күчү төшенчәсе 108
15. Чыгарылмаларны исәпләү кагыйдәләре 113
16. Катлаулы функциянең чыгарылмасы 118
17. Тригонометрик функцияләрнең чыгарылмалары 121

§ 5.

Өзлексезлекне һәм чыгарылманы куллану

18. Өзлексезлекне куллану 124
19. Функция графигына орынма 129
20. Якынча исәпләүләр 134
21. Физикада һәм техникада чыгарылма 137

§ 6.

Функцияне тикшергәндә чыгарылма куллану

22. Функциянең үсүе (кимүе) билгесе 143
23. Функциянең критик нокталары, аның максимумнары һәм минимумнары 147
24. Функцияне тикшергәндә чыгарылма куллануга мисаллар 151
25. Функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләре 155

Тарихтан мәгълүматлар 160
Кабатлау өчен сораулар һәм мәсьәләләр 170

III бүлек БАШЛАНГЫЧ ФУНКЦИЯ ҺӘМ ИНТЕГРАЛ

§ 7.

Башлангыч функция

26. Башлангыч функциянең билгеләмәсе 174
27. Башлангыч функциянең төп үзлеге 177
28. Башлангыч функцияләрне табуның өч кагыйдәсе 181

§ 8.

Интеграл

29. Кәкресызыклы трапециянең мәйданы 185
30. Ньютон — Лейбниц формуласы 188
31. Интегралның куллану 194

Тарихтан мәгълүматлар 199
Кабатлау өчен сораулар һәм мәсьәләләр 205

IV бүлек КҮРСӘТКЕЧЛЕ ҺӘМ ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯЛӘР

§ 9.

Дәрәҗә төшенчәсен гомумиләштерү

32. n нчы дәрәҗә тамыр һәм аның үзлекләре 207
33. Иррациональ тигезләмәләр 214
34. Рациональ күрсәткечле дәрәҗә 218

§ 10.

Күрсәткечле һәм логарифмик функция

35. Күрсәткечле функция 224
36. Күрсәткечле тигезләмәләрне һәм тигезсезлекләрне чишү 229
37. Логарифмнар һәм аларның үзлекләре 232

38. Логарифмик функция 238
39. Логарифмик тигезләмәләр һәм тигезсезлекләрне чишү 242
40. Кире функция турында төшенчә 246

§ 11
Күрсәткечле һәм логарифмик функциянең чыгарылмасы

41. Күрсәткечле функциянең чыгарылмасы 251
42. Логарифмик функциянең чыгарылмасы 256
43. Дәрәҗәле функция 259
44. Дифференциаль тигезләмәләр турында төшенчә 263

Тарихтан мәгълүматлар 269
Кабатлау өчен сораулар һәм мәсьәләләр 273

V бүлек
КАБАТЛАУГА МӘСЬӘЛӘЛӘР

§ 1.
Реаль саннар

1. Рациональ һәм иррациональ саннар 277
2. Процентлар. Пропорцияләр 279
3. Прогрессияләр 280

§ 2.
Бердәй рәвешүзгәртүләр

4. Алгебраик аңлатмаларның рәвешен үзгәртү 281
5. Радикаллар һәм вакланма күрсәткечле дәрәҗәләр кергән аңлатмаларның рәвешен үзгәртү 282
6. Тригонометрик аңлатмаларның рәвешен үзгәртү 283
7. Дәрәҗә һәм логарифмнар кергән аңлатмаларның рәвешен үзгәртү 285

§ 3
Функцияләр

8. Рациональ функцияләр 286
9. Тригонометрик функцияләр 290
10. Дәрәҗәле, күрсәткечле һәм логарифмик функцияләр 293

§ 4.
Тигезләмәләр, тигезсезлекләр, тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр системалары

11. Рациональ тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр 295
12. Иррациональ тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр 297
13. Тригонометрик тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр 298
14. Күрсәткечле тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр 299
15. Логарифмик тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр 300
16. Рациональ тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр системалары 301
17. Иррациональ тигезләмәләр системалары 302
18. Тригонометрик тигезләмәләр системалары 302

19. Күрсәткечле һәм логарифмик тигезләмәләр системалары 303
20. Тигезләмәләр һәм тигезләмәләр системалары төзүгә мәсьәләләр 304

§ 5.
Чыгарылма, башлангыч функция, интеграл һәм аларның кулланылышлары

21. Чыгарылма 306
22. Чыгарылманы функция тикшерүдә куллану 308
23. Чыгарылманы физикада һәм геометриядә куллану 310
24. Башлангыч функция 312
25. Интеграл 312

VI КАТЛАУЛЫРАК МӘСЬӘЛӘЛӘР

§ 1.
Саннар. Аңлатмаларның рәвешен үзгәртү

1. Бөтен саннар 314
2. Математик индукция методы 315
3. Реаль саннар 316
4. Аңлатмаларның рәвешен үзгәртү 317
5. Прогрессияләр 318

§ 2.
Элементар функцияләр һәм аларның үзлекләре

6. Функцияләрне тикшерү 319
7. Функцияләрнең графиклары 322

§ 3.
Тигезләмәләр, тигезсезлекләр һәм системалар

8. Рациональ алгебраик тигезләмәләр 325
9. Рациональ алгебраик тигезсезлекләр 327
10. Рациональ алгебраик тигезләмәләр системалары 328
11. Тигезләмәләр һәм тигезләмәләр системаларын төзүгә мәсьәләләр 329
12. Иррациональ тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр 330
13. Тригонометрик тигезләмәләр, тигезсезлекләр һәм системалар 333
14. Күрсәткечле һәм логарифмик тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр . . 335

§ 4.
Анализ башлангычлары

15. Чыгарылма 337
16. Функцияләрне тикшерүдә чыгарылмалар куллану 338
17. Чыгарылманы физикада һәм геометриядә куллану 340
18. Башлангыч функция 341
19. Интеграл 343
Күнегүләргә җаваплар һәм күрсәтмәләр 346
Атамалар күрсәткече 377

Учебное издание

Колмогоров Андрей Николаевич
Абрамов Александр Михайлович
Дудницин Юрий Павлович и др.

**Алгебра
и начала анализа**

Учебник для **10—11** классов
общеобразовательных учреждений

Казань. Издательство «Магариф». 2007

Перевод с русского на татарский язык

Уку-укыту басмасы

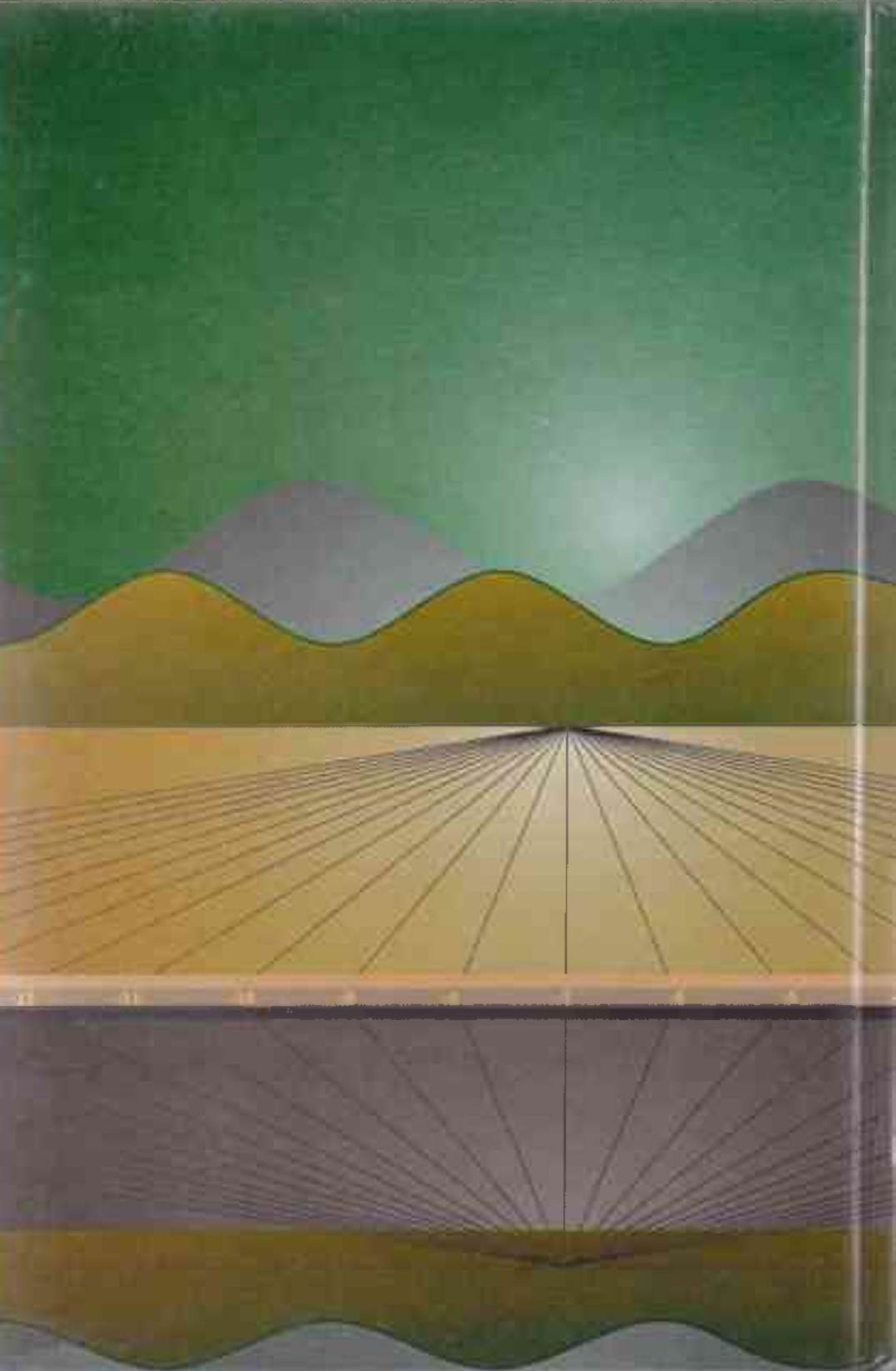
Колмогоров Андрей Николаевич
Абрамов Александр Михайлович
Дудницин Юрий Павлович һ. б.

**Алгебра һәм
анализ башлангычлары**

Татар урта гомуми белем бирү мәктәбенең
10—11 нче сыйныфлары өчен дәреслек

Редакция мөдире *Л. Х. Мөхәммәтҗанова*
Редакторлары *Л. Р. Хафизова, Ф. М. Хафизова,*
Л. Х. Мөхәммәтҗанова
Бизәлеш редакторы *Р. А. Сәйфуллина*
Техник редакторы *Л. И. Матвеева*
Компьютерда биткә салучысы *В. С. Тимошкин, Л. И. Матвеева*
Корректорлары *С. З. Гыймалетдинова, Г. Р. Ногманова, Г. Г. Мөхәммәтҗанова*

Оригинал-макеттан басарга кул куелды 27.12.07. Форматы 60×90¹/₁₆. Офсет кәгазе.
«Школьная» гарнитурасы. Офсет басма. Басма табагы 24,0 + форз. 0,25.
Нәшер-хисап табагы 21,07 + форз. 0,39. Тиражы 9500 д. Заказ С-1615.

«Мәгариф» нәшрияты. 420059. Казан, Оренбург тракты, 20а.
Тел./факс (843) 277-52-88; 277-52-62.
E-mail:magarif@mail.ru

«Идел-Пресс» полиграфия-нәшрият комплексы» ААҖ.
420066. Казан, Декабристлар урамы, 2.